Содержание

Введение

Практическое пособие является первой частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физического факультета. Оно адресовано как студентам, так и преподавателям. Книга написана в соответствии с действующей программой по данному курсу и содержит наборы индивидуальных домашних заданий.

Пособие включает материал по темам «Числовые множества», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции», которые условно можно назвать «Введение в анализ».

Структура пособия основана на рабочей программе по данному курсу, поэтому каждая тема разбита на части, соответствующие одному практическому занятию. Материал каждого занятия разбит на следующие пункты:

– основные теоретические сведения и формулы;
– вопросы для самоконтроля;
– типовые примеры;
– задания для аудиторной и домашней работ;
– варианты индивидуальных домашних заданий;
– список используемой литературы.

При подборе задач авторами использованы «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах» В. Ф. Бутузова (1984), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991) и другие. Поэтому многие задачи пособия не претендуют на оригинальность, хотя среди них есть целый ряд новых.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезным для преподавателей при проведении практических занятий и студентам в их самостоятельной работе над предметом. Они с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1 Числовые множества

Практическое занятие 1 **Числовые множества**

1.1 Язык теории множеств
1.2 Понятие функции

1.1 Язык теории множеств

Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под *множеством* понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Способы задания множеств:

– перечислением его элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d, то пишут $A=\{a,b,c,d\}$;

– указанием характеристики свойств элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A=\{x|\ P(x)\}$.

– диаграммы Эйлера-Венна – множество изображается в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. Равенство множеств A и B обозначают $A=B$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Если множество A *не равно* множеству B, то пишут $A\neq B$.

Множество A, $A\neq\varnothing$, называется *подмножеством* множества B, $B\neq\varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если A – подмножество множества B, то пишут $A\subseteq B$.

Понятие подмножества определяет между двумя множествами *отношение включения*. Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$,то A называется *собственным подмножеством* множества B и *обозначается* $A\subset B$.

Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется *основным* или *универсальным*. Обозначается универсальное множество буквой U.

Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или обоим одновременно):

$$A\cup B=\{x|\,x\in A \text{ или } x\in B \text{ или } x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A\cap B=\{x|\,x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Разностью двух множеств B и A называется множество $B\setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A:

$$B\setminus A=\{x|\,x\in B \text{ и } x\notin A\}.$$

Разность $U\setminus A$ называется *дополнением* множества A до универсального множества U и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A}=U\setminus A=\{x|\,x\notin A\}.$$

Пара элементов $(x;y)$, $x\in A$, $y\in B$, называется *упорядоченной*, если указан порядок записи элементов x и y. Элементы x и y упорядоченной пары $(x;y)$ называются *координатами*, при этом x – первая координата, y – вторая.

При этом $(x_1;y_1)=(x_2;y_2)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1=x_2 \text{ и } y_1=y_2.$$

Основные числовые множества:

– множество *натуральных* чисел, т.е. чисел, которые используются при счете: $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$;

– объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество *целых* чисел $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\};$$

– множество чисел вида p/n, где $p \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$, называется *множеством рациональных* чисел $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ q = \frac{p}{n} \middle| \, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\};$$

– числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются *иррациональными*;

– объединение рациональных и иррациональных чисел составляет *множество действительных* чисел $\mathbf{R}$.

Очевидно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Множество действительных чисел $\mathbf{R}$, пополненное символами $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbf{R}}$ и называется *расширенным множеством действительных чисел*, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются *бесконечно удаленными точками* числовой прямой, остальные точки – *конечными точками* числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbf{R}}$ являются:

– *интервал* с концами a и b:

$$(a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; a < x < b \right\};$$

– *отрезок* с концами a и b:

$$[a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; a \le x \le b \right\};$$

– *полуинтервалы*:

$$[a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; a \le x < b \right\}, \; (a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; a < x \le b \right\};$$

– *бесконечные* интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; x \ge a \right\}, \; (a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; x > a \right\},$$

$$(-\infty;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; x < b \right\}, \; (-\infty;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; x \le b \right\},$$

$$(-\infty;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \; -\infty < x < \infty \right\}.$$

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$:

$$A \times B = \left\{ (x;y) \middle| \; \forall x \in A, \forall y \in B \right\}.$$

Если $A = B$, то $A \times A$ называется *декартовым квадратом* и обозначается A^2, т.е. $A^2 = A \times A$.

Пусть X, Y – произвольные множества.

1.2 Понятие функции

Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией* (*отображением*), заданной на множестве X со значениями во множестве Y, при этом элемент x называется *независимой переменной* (*аргументом*), элемент y – *зависимой* переменной.

Обозначается:

$$y = f(x), \; x \in X, \; f : x \mapsto y \text{ при } x \in X \text{ и } y \in Y; \; f : X \to Y.$$

Множество X называется *областью определения* функции f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется *множеством значений* функции f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f : x \mapsto y \Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется *образом* элемента x при отображении f и *обозначается* $f(x)$. Элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x)$, $x \in X$.

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется *образом множества* X при этом отображении:

$$f(X) = \left\{ f(x) \middle| x \in X \right\} \subseteq Y.$$

Полным прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in X \middle| f(x) \in B \right\} \subseteq X.$$

Функция f^{-1} называется *обратной* к функции f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Определение обратной функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f^{-1}: x \mapsto y \iff \forall y \in Y\ \exists x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Если $f : x \mapsto y$ и $g : y \mapsto z$ функции, то функция $g \circ f : x \mapsto z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $z \in Z$, $g \circ f = g(f(x))$, называется *сложной* функцией или *композицией* функций f и g.

Два множества A и B называются *эквивалентными* (*равномощными*), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. *Обозначается*: $A \sim B$.

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. Если множество счетное, то его элементы можно занумеровать. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если A – конечное множество, то число его элементов обозначается $|A|$ или $\dim A$ и называется *мощностью множества* A.

Вопросы для самоконтроля

1 Что вы понимаете под термином «множество»? Какие существуют способы задания множества? Приведите примеры.

2 Какие множества называются равными? Приведите примеры.

3 Что называется подмножеством множества. Какое подмножество называется собственным подмножеством множества.

4 Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения.

5 Что называется декартовым произведением множеств?

6 Что называется функцией? Дайте определение области определения, области значения функции.

7 Какие множества называются эквивалентными?

8 Какое множество называется счетным? Приведите примеры.

9 Какие числовые множества вы знаете?

Решение типовых примеров

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств $A = \left\{ \frac{1}{5^n} \middle|\ n \in \mathbf{N} \right\}$ и $B = \left\{ \frac{1}{25^n}, \middle|\ n \in \mathbf{N} \right\}$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$A = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \frac{1}{625}; \ldots \right\} \text{ и } B = \left\{ \frac{1}{25}; \frac{1}{625}; \frac{1}{15625}; \ldots \right\},$$

то

$$A \cap B = \left\{ \frac{1}{25}; \frac{1}{625}; \ldots \right\} = B,\ A \cup B = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \frac{1}{625}; \ldots \right\} = A,$$

$$A \setminus B = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{125}; \ldots \right\} = \left\{ \frac{1}{5^{2k-1}} \middle|\ k \in \mathbf{N} \right\},\ B \setminus A = \varnothing.$$

2 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

*Р е ш е н и е***.** Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда и m есть четное число. Если m – четное, то оно представимо в виде $m = 2k$. Тогда имеем $n^2 = 2k^2$. Следовательно, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$.

3 Доказать, что $0{,}4(9) = 0{,}5(0)$.

Р е ш е н и е. Пусть $x = 0{,}4(9)$.

Тогда $100x - 10x = 49{,}(9) - 4(9) = 45$.

Откуда $x=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}5(0)$

Задания для аудиторной работы

1 Какие элементы множества

$$A=\{-40;-32{,}4;-8;-\frac{1}{9};0;\frac{5}{7};6;12;19\frac{2}{9};30\}$$

являются натуральными числами, целыми числами, дробными, рациональными числами, отрицательными числами, неотрицательными числами?

2 Составьте подмножества множества

$$B=\{-24;-23\frac{1}{3};-22;-9;0;\frac{1}{5};2;5;9;10;12;24\},$$

элементами которых являются $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, нечетные, четные числа, отрицательные числа, числа кратные 4.

3 Какие из следующих утверждений $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\subset\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\subset\mathbf{Z}$ справедливы?

4 Укажите пустые множества среди:

а) множество целых корней уравнения $x^2-16=0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2+16=0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1.

5 Найдите пересечение, объединение, разность множеств из упражнения 1 и 2.

6 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\left\{\frac{1}{3^n}\Big|\ n\in\mathbf{N}\right\} \text{ и } B=\left\{\frac{1}{10^n}\Big|\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

7 Доказать, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

8 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.

9 Доказать, что $0{,}6(9)=0{,}7(0)$.

Задания для домашней работы

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\{-2;-1;0;1;2;3;\ldots\} \text{ и } B=\{3;9;27;\ldots\}.$$

2 Верны ли равенства: $0{,}41(9)=0{,}42(0)=0{,}42$?

3 Какие из чисел $-\frac{5}{9}$, $1{,}(3)$, $\frac{27}{12}$, $-\frac{6}{7}$, $0{,}(4)$, 9, $-2{,}3$, $0{,}(2)$ являются рациональными? Каждое число представьте в виде соотношения $\frac{m}{n}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$.

4 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\{2^n\mid\ n\in\mathbf{N}\} \text{ и } B=\{(-1)^n\cdot 2\mid\ n\in\mathbf{N}\}.$$

5 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, имеющую в периоде цифру 9, нельзя получать как результат деления двух натуральных чисел.

6 Доказать, что $\sqrt{6}$ – иррациональное число.

Практическое занятие 2 **Грани числовых множеств**

2.1 Точные грани числовых множеств
2.2 Метод математической индукции

2.1 Точные грани числовых множеств

Рассмотрим произвольное числовое множество $A \subset \mathbf{R}$.

Множество действительных чисел A называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$, т.е.

$$\exists M \in \mathbf{R}: \forall x \in A \quad x \le M .$$

При этом число M называется *верхней гранью* множества A.

Множество A неограничено сверху, если

$$\forall M \in \mathbf{R}: \exists x_0 \in A \quad x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A \;\; x < c_1$.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной верхней гранью*.

Обозначается:

$$M = \sup A \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A : x \le M \;\text{ и }\; \forall M' < M \quad \exists x_0 > M', x_0 \in A .$$

Множество действительных чисел A называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \ge m$, т.е.

$$\exists m \in \mathbf{R}: \forall x \in A \quad x \ge m .$$

При этом число m называется *нижней гранью* множества A.

Множество A *неограничено снизу*, если

$$\forall m \in \mathbf{R}: \exists x_0 \in A \quad x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется *наименьшим элементом* множества A, если $\forall x \in A \;\; x > c_2$.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной нижней гранью*.

Обозначается:

$$m = \inf A \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A : x \ge m \;\text{ и }\; \forall m' > m \quad \exists x_0 \le m', x_0 \in A .$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*: $\exists K > 0 : \; \forall x \in A \quad |x| \le K$.

Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

2.2 Метод математической индукции

Метод математической индукции используется при доказательстве утверждений, зависящих от натурального аргумента. Для доказательства необходимо:

1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

При решении задач часто используется *бином Ньютона*.

Пусть задано конечное множество элементов. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками*. Число возможных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!, \;\; n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \;\; 0! = 1 .$$

Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется *сочетанием n элементов по k*. Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Число C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \end{array}$$

Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки. В каждой n строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Число сочетаний используется при вычислении коэффициентов в формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключается метод математической индукции?

2 Какие множества называются ограниченными. Приведите примеры ограниченных и неограниченных множеств.

3 Дайте определение точной верхней грани, нижней грани множества. Приведите примеры множеств, ограниченных сверху, снизу.

4 Приведите примеры числовых множеств X, у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольше, а в случаях в) и г) наименьшее число?

5 Что означает запись $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$?

Решение типовых примеров

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $n \le 2^{n-1}$.

Решение. При $n = 1$ неравенство верно т.к. $1 \le 1$. Предположим, что неравенство верно для $k \in \mathbf{N} : k \le 2^{k-1}$. Докажем, что неравенство верно для $(k+1)$:

$$2^k = 2^{k-1} \cdot 2 \ge 2 \cdot k \ge k+1.$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства: $(k-1)^2 \ge 0$.

Тем самым доказано, что неравенство верно $\forall n \in \mathbf{N}$.

2 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n = 1$ равенство очевидно.

Предположим, что оно верно для натурального числа k :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим верность утверждения для следующего натурального числа $(k+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Следовательно, утверждение верно для любого $n \in \mathbf{N}$.

3 Найти точную верхнюю грань интервала $(0,1)$.

Решение. Так как для любого $x \in (0;1) \Rightarrow x < 1$, то число 1 является верхней гранью. Покажем, что это точная верхняя грань, т.е. для любого $\bar{x} < 1 \ \exists \ a \in (0,1) : a > \bar{x}$.

Действительно, если $\bar{x} \le 0$, то $\forall a \in (0;1) : a > x$. Если $\bar{x} > 0$, то на интеграле $(\bar{x};1)$ существует действительное число a: $\bar{x} < a < 1$, т.е. $a > \bar{x}$.

Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной грани $\sup(0;1) = 1$ $(\sup(0;1) \notin (0;1))$.

4 Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Решение. *Шаг 1.* Пусть $X = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m, n \in \mathbf{N}, m < n \right\}$. Так как $\frac{m}{n} > 0$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$, то $0 -$ нижняя грань множества X. Более того, $\forall \bar{x} > 0$, так как, если $\bar{x} \ge 1$, то $a = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $a < \bar{x}$. Если $0 < \bar{x} < 1$, то число $\bar{x}$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: $\bar{x} = 0, x_1, x_2 \dots x_k \dots$, причем $\exists x_n : x_n \neq 0$.

Рациональное число $a = 0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}(x_n - 1)$ удовлетворяет условию $0 < a < \bar{x} < 1$, т.е. является правильной рациональной дробью и $0 < \bar{x}$. Следовательно, для числа 0 выполнено определение точной, нижней грани: $\inf X = 0$. При этом $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, 0 – не натуральное число и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 2. Так как X содержит только правильные дроби, то $\frac{m}{n} < 1$, то число 1 – верхняя грань множества X. Более того, $\forall \bar{x} < 1 \ \exists \frac{m}{n} \in X : \frac{m}{n} > \bar{x}$. Действительно, $\exists$ рациональное число $x_1 = \frac{m}{n} : \bar{x} < x_1 < 1$. Значит, $x_1 \in X$ и для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup X = 1$. Но $\sup X \notin X$, т.к. $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

Задания для аудиторной работы

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

3 Доказать, что для любых положительных чисел $y_1, y_2, \dots y_n$, удовлетворяющих условию $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, имеет место неравенство: $y_1 + y_2 + \dots y_n \geq n$.

4 Доказать неравенство для $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

5 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и n – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

6 Пусть A – множество чисел, противоположных по знаку чисел из множества B. Докажите, что

$$\sup A = -\inf B, \ \inf A = -\sup B.$$

Задания для домашней работы

1 Используя метод математической индукции, докажите равенство $n \in \mathbf{N}$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ кратно 3.

3. Используя метод математической индукции, докажите неравенства $n \in \mathbf{N}$:

а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $(n \geq 2)$, б) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $(n \geq 2)$.

4 Используя метод математической индукции, докажите неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}, \text{ при } x_k \geq 0, \ x = \overline{1, n}.$$

5 Найти точную нижнюю грань интервала $(0;1)$.

6 Пусть $X, Y \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset X$, X – ограничено сверху. Доказать, что Y также ограничено сверху и $\sup Y \leq \sup X$.

7 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и m – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

Практическое занятие 3 **Множество комплексных чисел**

3.1 Понятие комплексного числа
3.2 Действия над комплексными числами

3.1 Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, где i удовлетворяет условию $i^2=-1$, при этом число x называется *действительной частью* а число y – *мнимой частью* комплексного числа z.

Для комплексного числа z приняты обозначения

$$z = x+iy,\ \operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Im} z = y.$$

Запись комплексного числа в виде $z=x+iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа.* Множество комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$. Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x = x+0\cdot i$. Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Отсюда

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1+iy_1 = x_2+iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z = 0+i\cdot 0$, называется *нулем* и обозначается 0.

Понятие неравенства для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т. е. $z_1 \neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Комплексное число $\bar{z} = x-iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x-iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Комплексное число $z=x+iy$ геометрически изображается на плоскости $\mathbf{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\vec{z}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатную плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbf{C}$, ось абсцисс – *действительной* осью, ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости (рисунок 3.1).

Модулем комплексного числа $z=x+iy$ называется расстояние от точки $z(x,y)$ до начала координат и *обозначается* $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Аргументом комплексного числа $z=x+iy$ называется угол φ, образованный положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{z}$.

Обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент z ($z\neq 0$) определяется равенствами (рисунок 3.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$,, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

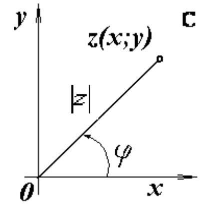

Рисунок 3.1 – Комплексная плоскость $\mathbf{C}$

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3.2 Действия над комплексными числами

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексного числа z_1 *на* $z_1 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под *частным* $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное знаменателю число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z *в степень* n, $n \in \mathbf{N}$, рассматривается как умножение z на себя n раз.

Обозначается: z^n.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любому комплексному числу $z \in \mathbf{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка $M(x; y) \in \mathbf{R}^2$, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Вводя полярные координаты (полярная ось u совпадает с положительным направлением действительной оси Ox, полюс O – с началом координат O, полярный угол φ равен углу между полярной осью и лучом OM), эту точку можно однозначно определить заданием главного значения аргумента $\arg z$ и модуля $|z|$ комплексного числа z.

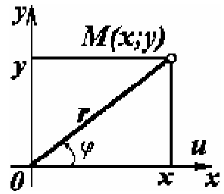

Рисунок 3.2 – Связь декартовых и полярных координат

Из рисунка 3.2 видно, что модуль $|z|$ совпадает с полярным радиусом r точки $M(x; y)$, главный аргумент $\arg z$ – с полярным углом φ, при этом $0 \le r < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Очевидно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа.*

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),\ n\in\mathbf{N},$$
$$k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Показательная форма комплексного числа. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Используя формулу Эйлера $\mathrm{e}^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получаем

$$z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Выражение $z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Здесь $r=|z|$; $\varphi=\arg z+2k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1=r_1\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $z_2=r_2\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z_1z_2=r_1r_2\,\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Если $z_2\neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{\mathrm{e}^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Если $n\in\mathbf{N}$, $z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z^n=\left(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n=r^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}.$$

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\mathrm{e}^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}},\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение множества комплексных чисел.

2 Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными? Приведите примеры.

3 Как изображаются комплексные числа на плоскости?

4 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

5 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.

6 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

7 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.

Решение типовых примеров

1 Даны два комплексных числа $z_1=1-i$; $z_2=-2+3i$. Найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Используя правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z_1+z_2=(1-i)+(-2+3i)=(1-2)+i(3-1)=-1+2i,$$
$$z_1-z_2=(1-i)-(-2+3i)=1-i+2-3i=3-4i,$$
$$z_1\cdot z_2=(1-i)\cdot(-2+3i)=-2+2i+3i-3i^2=$$
$$=-2+2i+3i+3=1+5i,$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2}=\frac{(1-i)\cdot(-2-3i)}{(-2+3i)\cdot(-2-3i)}=\frac{-2+2i-3i-3}{4+9}=$$
$$=\frac{-5-i}{13}=-\frac{5}{13}-i\frac{1}{13}.$$

2 Представить комплексные числа $z=-1+i$, $z=-4$, $z=i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. При решении используем определения модуля и аргумента комплексного числа.

Для комплексного числа $z=-1+i$ имеем $x=-1$; $y=1$. Тогда модуль равен

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Так как

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то аргумент $\mathrm{Arg} z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отсюда главное значение аргумента $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показательной – $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Аналогично для комплексного числа $z = -4$ имеем:

$x = -4$; $y = 0 \Rightarrow r = 4$, $\arg z = \varphi = \pi$; $\Rightarrow$

$$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4\mathrm{e}^{i\pi}.$$

Для комплексного числа $z = i$ имеем $x = 0$; $y = 1$ и

$r = 1$, $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3 Вычислить $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{10}$

Решение. Представим $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме. Так как $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$, то

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Подставляя в формулу $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, получим:

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{3\cdot 10}{4}\pi + i\sin\frac{3\cdot 10}{4}\pi\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{10}(0 - i) = -2^{10} i.$$

4 Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Решение. Для комплексного числа $z = \sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$r = \sqrt{2}$; $\arg z = -\frac{\pi}{4}$, $\Rightarrow$ $z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right) \quad k = 0,1,2,3,4.$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}\right)$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

при $k = 3$ имеем $z_3 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

при $k = 4$ имеем $z_4 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$.

Точки z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 3.3). Полярный угол точки z_0 равен $\varphi_0 = -\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к φ_0, т.е. $\varphi_k = \varphi_0 + \dfrac{2\pi k}{5}$ при $k = 1,2,3,4$.

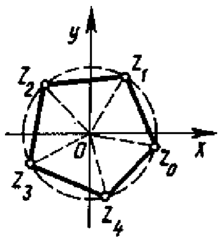

Рисунок 3.3 – Корни комплексного числа $\sqrt[5]{1-i}$

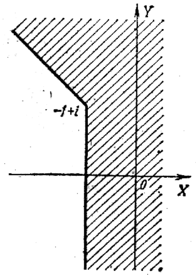

Рисунок 3.4 – Множество G

5 Изобразить на плоскости **C** множество

$$G = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Решение. Комплексное число $z_1 = z + 1 - i = z - (-1+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$. Данное множество G изображено на рисунке 3.4.

Задания для аудиторной работы

1 Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 для z_1 и z_2:

а) $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 3-5i$; в) $z_1 = 2+i$; $z_2 = 1-2i$;

б) $z_1 = 5-2i$; $z_2 = 2+3i$; г) $z_1 = \dfrac{-1+i}{-1-i}$; $z_2 = 2i$.

2 Вычислить:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{1-i}{1+i}$; в) $\dfrac{2}{1-3i}$; г) $\dfrac{-2-i}{1+2i}$.

3 Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить числа на плоскости **C** комплексные числа:

а) $z = 3i$; г) $z = -3-3i$;
б) $z = -2$; д) $z = -1+2i$;
в) $z = 1-i$; е) $z = 1$.

4 Изобразить на комплексной плоскости **C** следующие множества:

а) $\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \}$; г) $\{ z \in \mathbf{C} \mid |z-1-i| \le 4 \}$;

б) $\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$; д) $\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1 \right\}$;

в) $\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \arg z = \dfrac{\pi}{4} \right\}$; е) $\{ z \in \mathbf{C} \mid 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \}$.

5 Вычислить:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; в) $(-1+i)^{10}$; д) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{25}$;

б) $(1-i)^{100}$; г) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; е) $(3+4i)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt{\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{-i}$; в) $\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7 Найти действительные решения уравнения:

$$(3x-i)(2+i) + (x-iy)(1+2i) = 5+6i.$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие уравнению: $\bar{z} = z^2$.

Задания для домашней работы

1 Для z_1 и z_2 найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2.

а) $z_1 = 2i$; $z_2 = 1-i$; в) $z_1 = -1-i$; $z_2 = 2-i$;

б) $z_1 = 5-i$; $z_2 = 3i$; г) $z_1 = 5-i$; $z_2 = -1+i$.

2. Выполнить действия:

а) $\frac{3-i}{5i}$; б) $\frac{2i}{1+i}$; в) $\frac{3}{2-i}$; г) $\frac{2-i}{3+4i}$.

3. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах. Изобразить числа на плоскости.

а) $z = ai$; б) $z = b$; в) $z = 2+2i$; г) $z = -5+2i$.

4 Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием:

а) $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{Im}\frac{z}{1+i} = 0$;

б) $|z+2i| = 2$; д) $\operatorname{Re}\frac{z}{i} = 0$.

в) $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, е) $\operatorname{Im} z \le 0$, $\operatorname{Re} z \ge 1$.

5 Вычислить:

а) $(2-2i)^7$; в) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{80}$;

б) $(\sqrt{3}-3i)^6$; г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$.

7. Найти действительные решения уравнения:

$$(x-iy)(1-2i) = i^5.$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

а) $z = |z|$; б) $\frac{1}{|z|} \ge 1$, $z \ne 0$; в) $\left|\frac{1}{z}\right| \le 2$, $z \ne 0$.