Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. ЛУБОЧКИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2009

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. ЛУБОЧКИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

по спецкурсу

для студентов специальности 1 – 31 03 03 02
«Прикладная математика»
(научно-педагогическая деятельность)
специализации 1 – 31 03 03 02 06
«Оптимизация и оптимальное управление»

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2009

УДК 517.977 (075.8)
ББК 22.161.8+22.193.1 я73
Л 826

Рецензенты:
В. Л. Мережа, доцент, кандидат физико-математических наук;
кафедра вычислительной математики и программирования учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Лубочкин, А. В.

Л 826 Оптимальное управление линейными системами по выпуклым критериям качества : тексты лекций по спецкурсу для студентов специальности 1 – 31 03 03 02 «Прикладная математика» (научно-педагогическая деятельность) специализации 1 – 31 03 03 02 06 «Оптимизация и оптимальное управление» / А. В. Лубочкин; М-во образования РБ, Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 55 с.

ISBN 978–985–439–369–8

В текстах лекций рассматриваются две задачи оптимального управления линейными системами по специальным выпуклым критериям качества: квадратичному и негладкому, которые могут возникать, например, при исследовании процессов управления с минимальной энергией и с минимальным расходом топлива. Для этих задач обосновываются методы решения первого порядка.

Тексты лекций предназначены для студентов специальности 1 – 31 03 03 02 «Прикладная математика» (научно-педагогическая деятельность) специализации 1 – 31 03 03 02 06 «Оптимизация и оптимальное управление»

УДК 517.977 (075.8)
ББК 22.161.8+22.193.1 я73

ISBN 978–985–439–369–8

Содержание

Введение 5

Тема 1 Введение в спецкурс 6

1 Минимизация среднеквадратичной интенсивности управления для линейных систем 10

Тема 2 Линейно-квадратичная задача оптимального управления с ограничениями 10

2.1 Постановка задачи 10

2.2 Формула Коши 11

2.3 Управляемость, критерии управляемости 12

2.4 Доступное, допустимое и оптимальное управления, опора, опорное управление 13

Тема 3 Формула приращения критерия качества 14

3.1 Приращение критерия качества 14

3.2 Вектор потенциалов, котраектория, коуправление, сопряженная система 15

3.3 Формула приращения, физический смысл коуправления 15

Тема 4 Критерий оптимальности 16

4.1 Критерий оптимальности 16

4.2 Доказательство достаточности методом приращений 16

4.3 Доказательство необходимости, установление класса оптимального управления 17

Тема 5 Метод первого порядка 22

5.1 Идея метода 22

5.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи 26

5.3 Процедура доводки 29

Тема 6 Сходимость метода 33

2 Минимизация средней интенсивности управления для линейных систем 36

Тема 7 Линейно-негладкая задача оптимального управления с ограничениями: постановка задачи, основные понятия 36

Тема 8 Критерий оптимальности 37
8.1 Формула приращения критерия качества 37
8.2 Критерий оптимальности 38
8.3 Класс оптимального управления 41

Тема 9 Метод первого порядка 42
9.1 Идея метода 42
9.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи 46
9.3 Процедура доводки 47

Тема 10 Конечность метода 52

Литература 54

Введение

Настоящий курс лекций написан по материалам спецкурса, который читается на математическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины студентам пятого курса, специализирующимся на кафедре вычислительной математики и программирования. Данный спецкурс является пятым и завершающим спецкурсом из серии спецкурсов, читаемых автором на третьем и четвертом курсах — «Оптимизация линейных статических моделей» [14], «Оптимизация линейных дискретных динамических моделей» и «Оптимальное управление линейными системами» [15], «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16], в которых обосновываются методы решения задач линейного программирования, задач оптимального управления линейными дискретными и непрерывными системами с ограничениями, задач линейно-выпуклого (линейно-квадратичного и кусочно-линейного) программирования соответственно. Материалы последнего из упомянутых спецкурсов, а также данного курса лекций содержат изложение оригинальных методов автора решения различных оптимизационных задач, опубликованных в [8–13].

В данном спецкурсе излагаются методы решения двух линейно-выпуклых задач оптимального управления (задач минимизации специальных квадратичного и негладкого критериев качества на траекториях линейных динамических систем с ограничениями). Суть подобных задач подробно обсуждается в теме 1, а также во введении к спецкурсу «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16]. Однако в [16] эти задачи оптимального управления рассматривались в суженном классе допустимых управлений (в классе импульсных управлений). Здесь они рассматриваются в предельных для них классах допустимых управлений — в классе непрерывных, кусочно-гладких функций (для первой задачи) и в классе кусочно-постоянных управлений (для второй).

Рассматриваемые здесь методы аналогичны методу решения линейной терминальной задачи оптимального управления, изложенному в спецкурсе «Оптимальное управление линейными системами» [15], и заключаются в выполнении двух процедур: процедуры формирования, решения и анализа результатов опорной задачи (результатом которой является построение грубого решения задачи оптимального управления) и процедуры доводки (в которой это грубое решение уточняется).

Тема 1 Введение в спецкурс

Линейные задачи оптимального управления наиболее удобны и легки для исследования. Конечно, многие реальные ситуации можно описать такими линейными моделями. Допустимо также использование линейных моделей при исследовании задач более сложного (нелинейного) вида для получения первых приближений к решению, для оценки ситуации и т. д. В этом случае говорят, что используется линеаризованная модель задачи.

Однако большинство задач, возникающих на практике, не являются линейными, не являются, по крайней мере, полностью линейными, они имеют различные нелинейные элементы. Построить решения таких задач (а не приближений к ним) можно только в том случае, если рассматривать эти задачи в исходном виде, не линеаризуя математическую модель. Чаще всего такие задачи имеют вполне определенный физический смысл.

Среди нелинейных моделей наиболее простыми являются линейно-выпуклые модели. Рассмотрим два типа таких линейно-выпуклых задач — задач оптимального управления линейными системами с ограничениями, в которых оптимизируются нелинейные (выпуклые) критерии качества (квадратичный и негладкий). Для этих задач построим некоторые из возможных методов решения — методы первого порядка.

Итак, рассмотрим некоторый объект (процесс), изменение состояния которого во времени описывается следующей линейной системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x(t)$, x_0, $b \in R^n$; $u(t) \in R$; $A \in R^{n\times n}$; $\dot{x} = dx/dt$. Систему (1.1) иногда называют линейным стационарным переходным процессом (с управлением) или линейным стационарным процессом управления.

Будем считать, что доступными являются лишь ограниченные управляющие воздействия

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

При этом конкретное значение максимального допустимого управления (по абсолютной величине) не является принципиальным; значение единица в (1.2) взято для простоты, а ограничение с любым другим значением может быть сведено к ограничению (1.2) с помощью масштабирования управления.

Рассмотрим процесс управления на некотором временном отрезке фиксированной длины

$$T = [0, t^*].$$

Доступное управление

$$u(t), \quad t \in T$$

(т.е. управление, удовлетворяющее на отрезке T ограничению (1.2)), будем считать допустимым, если координаты выходного сигнала

$$y = Hx \in R^m$$

системы (1.1) удовлетворяют в момент времени $t = t^*$ следующему ограничению

$$y(t^*) = Hx(t^*) = g. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t^*)$ — терминальное (конечное) состояние системы (1.1), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in T$; $H \in R^{m\times n}$, $m \leq n$; $g \in R^m$.

Качество переходного процесса (процесса управления) можно оценивать с помощью различных функционалов от управления $u(t)$, $t \in T$. Эти функционалы называют критериями качества.

Если (в частности) необходимо минимизировать энергию, затрачиваемую на перевод системы из начального состояния $x(0) = x_0$ в одно из состояний терминального множества $\{x\colon\ Hx = g\}$, то необходимо минимизировать следующий критерий качества

$$J_1(u) = \int\limits_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt. \tag{1.4}$$

Если нужно минимизировать расход топлива, то будем минимизировать функционал

$$J_2(u) = \int\limits_0^{t^*} |u(t)|\, dt. \tag{1.5}$$

Делитель 2 в функционале (1.4) взят только для удобства дальнейших выкладок, на минимальное значение (1.4) он не влияет. Таким образом, из (1.1)-(1.5) получаем следующие линейно-квадратичную и линейно-негладкую задачи оптимального управления:

1) задачу минимизации среднеквадратичной интенсивности управления

$$\begin{gathered} J_1(u) = \int_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt \to \min_{u(\cdot)}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \\ Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*]; \end{gathered} \tag{1.6}$$

2) задачу минимизации средней интенсивности управления

$$\begin{gathered} J_2(u) = \int_0^{t^*} |u(t)|\, dt \to \min_{u(\cdot)}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \\ Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \end{gathered} \tag{1.7}$$

которые отличаются друг от друга только критерием качества, но при этом задача (1.6) является гладкой, а задача (1.7) — негладкой.

Задачи оптимального управления (1.6) и (1.7) можно рассматривать в различных классах функций (управлений).

Известно, что предельным для задачи (1.6) является класс непрерывных, кусочно-гладких управлений. Оптимальное управление задачи (1.6) непрерывно и состоит из участков двух типов: на одних участках управление принимает критические значения 1 или -1, эти критические участки соединяются непрерывно между собой на отрезках ненулевой длины (рисунок 1.1). Гладкость управления нарушается лишь в точках перехода с одного участка на другой.

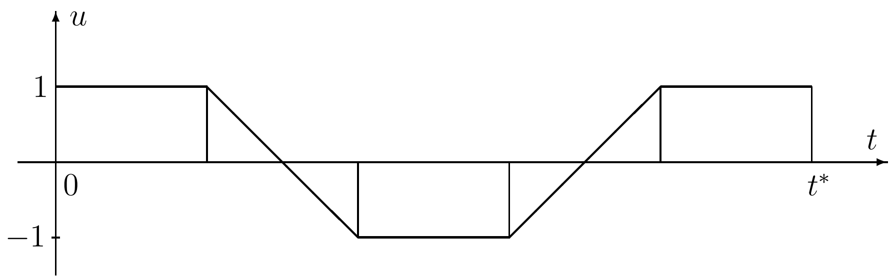

Рисунок 1.1 – Оптимальное управление в линейно-квадратичной задаче

Предельным для задачи (1.7) является класс кусочно-постоянных функций, т. к. оптимальное управление этой задачи состоит из участков, на которых управление принимает критические значения 1 или -1, а между соседними такими участками управление тождественно равно нулю на отрезках ненулевой длины (рисунок 1.2).

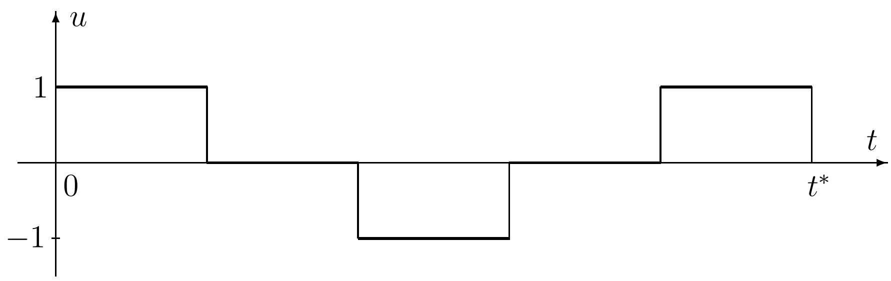

Рисунок 1.2 – Оптимальное управление в линейно-негладкой задаче

Указанные классы управлений предельны для задач (1.6) и (1.7) (соответственно) в том смысле, что их расширение не улучшает результат.

В спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16] было рассмотрено более грубое (но более простое) решение задач вида (1.6) и (1.7). Там эти задачи рассматривались в классе импульсных управлений, т. е. функций, принимающих постоянные значения на отрезках одинаковой длины $h > 0$:

$$u(t) \equiv u_i = \text{const}, \quad t \in [ih, (i+1)h], \quad i = \overline{0, N-1} \quad (t^* = Nh). \qquad (1.8)$$

Тогда в рассматриваемом классе управлений (1.8) задачи (1.6) и (1.7) оказывались эквивалентны сепарабельным линейно-выпуклым задачам математического программирования следующего вида —
линейно-квадратичной:

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2/2 \to \min, \quad \tilde{A}u = \tilde{b}, \quad |u_i| \le 1, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{1.9}$$

и кусочно-линейной:

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u_i| \to \min, \quad \tilde{A}u = \tilde{b}, \quad |u_i| \le 1, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{1.10}$$

соответственно, в которых параметры $\tilde{A} \in R^{m\times N}$ и $\tilde{b} \in R^m$ строятся, используя (1.8) и формулу Коши, по параметрам исходной задачи.

В спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16] для решения каждой из задач вида (1.9) и (1.10) были предложены прямые опорные методы первого и второго порядка.

В результате такого грубого решения оптимальное управление задач (1.6) и (1.7) будет иметь «ступеньчатый» вид (рисунок 1.3: a) линейно-квадратичная задача; b) линейно-негладкая задача).

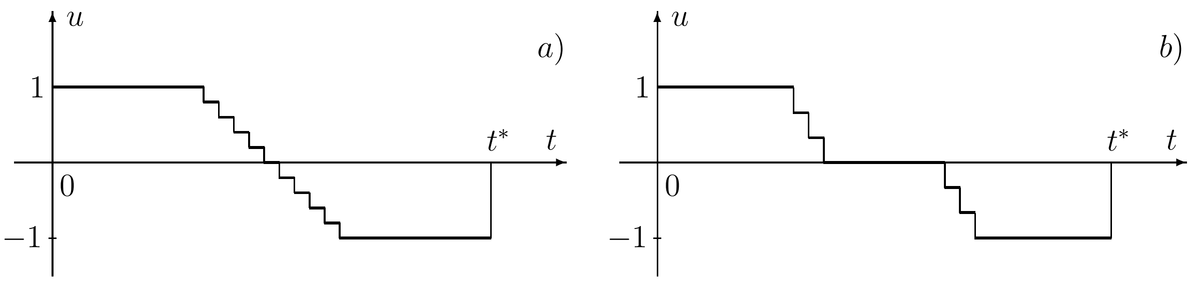

Рисунок 1.3 – Оптимальное управление в классе импульсных управлений

В данном спецкурсе это грубое решение используется и для точного построения оптимального управления. Грубое решение (которое является результатом работы первой процедуры метода — процедуры формирования, решения и анализа результатов опорной задачи) служит для выявления структуры оптимального управления и вычисления приблизительных значений определяющих его элементов (точек переключения между участками и т. д.), а затем (с помощью второй процедуры — процедуры доводки) находятся точные (с любой наперед заданной точностью) значения этих элементов. По этим определяющим элементам нетрудно восстановить оптимальное управление задач (1.6) и (1.7) в предельных для них классах управлений.

1 Минимизация среднеквадратичной интенсивности управления для линейных систем

Тема 2 Линейно-квадратичная задача оптимального управления с ограничениями

2.1 Постановка задачи

2.2 Формула Коши

2.3 Управляемость, критерии управляемости

2.4 Доступное, допустимое и оптимальное управления, опора, опорное управление

2.1 Постановка задачи

На фиксированном промежутке $T = [0, t^*]$ в классе кусочно-непрерывных[1] функций (управлений) $u(t)$, $t \in T$; $u(t) = [u(t-0) + u(t+0)]/2$, рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt \to \min_{u(\cdot)}, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{2.3}$$

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in T. \tag{2.4}$$

Здесь: $x = x(t)$ — n-вектор состояния оптимизируемой динамической системы в момент времени t; $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия в этот же момент; A — постоянная $n \times n$-матрица параметров, определяющая динамику системы; b — постоянный n-вектор параметров входного устройства (через которое управление воздействует на динамическую систему, на ее состояние); $\dot{x} = dx/dt$ — скорость изменения состояния; $x_0 \in R^n$ — начальное состояние системы; $x(t^*)$ — терминальное (конечное) состояние системы (2.2), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in T$; H — постоянная $m \times n$-матрица параметров выходного устройства,

[1]Класс кусочно-непрерывных функций традиционно используется при постановке задач оптимального управления. Однако для рассматриваемой в данном разделе задачи этот класс является чрезмерно широким. Известно, что предельным для нее является класс непрерывных, кусочно-гладких функций (это показывается в п. 4.3). Именно на этот класс и ориентирован метод решения, описываемый в п.п. 5.1–5.3.

$\operatorname{rank} H = m \le n$; g — постоянный m-вектор заданных значений выходного сигнала

$$y(t) = Hx(t), \quad t \in T, \tag{2.5}$$

в терминальный (конечный) момент времени t^*.

Задача (2.1)-(2.4) отличается от линейной терминальной задачи оптимального управления, рассмотренной в спецкурсе «Оптимальное управление линейными системами» [15], лишь критерием качества (вместо линейного терминального критерия качества здесь используется специальный квадратичный критерий (2.1)). Поэтому в последующих п.п. 2.2 – 2.4 данной темы перенесем на задачу (2.1)-(2.4) определения основных понятий (дословно), приведем необходимые формулы (без вывода) и утверждения (без доказательства), связанные с общими элементами указанных задач оптимального управления.

2.2 Формула Коши

Во многих случаях нужна формула Коши, позволяющая вычислять состояния $x(t)$ системы (2.2) для любого момента $t \in T$ через начальное состояние x_0 и управление $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$:

$$x(t) = \mathcal{F}(t, 0)x_0 + \int_0^t \mathcal{F}(t, \tau) b u(\tau)\, d\tau. \tag{2.6}$$

Здесь матричная функция $\mathcal{F}(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, $\tau \le t$ — фундаментальная матрица решений однородной части:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.7}$$

динамической системы (2.2). Она является решением системы

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mathcal{F}(t, \tau)A, \quad \mathcal{F}(t, t) = E. \tag{2.8}$$

Для рассматриваемых в данном спецкурсе динамических систем часто удобнее пользоваться другой фундаментальной матрицей решений системы (2.7): $F(t)$, $t \in T$, которая является решением системы

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = E. \tag{2.9}$$

При этом для рассматриваемых систем справедливы следующие равенства, связывающие фундаметальные матрицы (2.8) и (2.9):

$$\mathcal{F}(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau) = F(t - \tau).$$

Поэтому с помощью фундаментальной матрицы (2.9) формулу Коши (2.6) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t-\tau)bu(\tau)\,d\tau.$$

2.3 Управляемость, критерии управляемости

Поскольку нас интересует решение задачи (2.1)-(2.4), то прежде всего возникает проблема существования функций $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющих ее ограничениям. Проблема соблюдения терминального ограничения (2.3) связана с классическим понятием управляемости динамической системы.

Система (2.2) называется управляемой на отрезке T по выходу (2.5), если для любого m-вектора g найдется такое управление $u(t)$, $t \in T$, что соответствующая ему траектория $x(t)$, $t \in T$, системы (2.2) порождает выходной сигнал (2.5), принимающий в конечный момент t^* значение $y(t^*) = Hx(t^*) = g$.

Такого вида управляемость называют относительной управляемостью (управляемостью относительно линейного многообразия $Hx = g$).

В спецкурсе «Оптимальное управление линейными системами» [15] доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.1 (общий критерий относительной управляемости) *Для управляемости системы (2.2) на отрезке T по выходу (2.5) необходимо и достаточно, чтобы при любом m-векторе l, $\|l\| = 1$, выполнялось соотношение $l'H\mathcal{F}(t^*,t)b \not\equiv 0$, $t \in T$.*

Из теоремы 2.1 вытекают теоремы 2.2 и 2.3:

Теорема 2.2 (вторая форма критерия относительной управляемости) *Для управляемости системы (2.2) на отрезке T по выходу (2.5) необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{rank}\,\bigl(Hb, HAb, \ldots, HA^{n-1}b\bigr) = m$.

Теорема 2.3 (опорный критерий относительной управляемости) *Для управляемости системы (2.2) на отрезке T по выходу (2.5) необходимо и достаточно существования такого множества $T_{on} = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ изолированных моментов $t_j \in T$, $j = \overline{1,m}$, для которого не вырождена $m \times m$-матрица $P = (h(t),\ t \in T_{on})$ со столбцами $h(t) = H\mathcal{F}(t^*,t)b$, $t \in T_{on}$.*

2.4 Доступное, допустимое и оптимальное управления, опора, опорное управление

Из постановки задачи (2.1)-(2.4) следует, что доступными являются лишь ограниченные управления, т. е. управления, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2.4). Из множества доступных управлений выбираются допустимые управления.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, и соответствующую ей траекторию $x(t)$, $t \in T$, системы (2.2) назовем допустимым управлением и допустимой траекторией, если на $u(t)$, $t \in T$, выполняются геометрические ограничения (2.4) ($u(t)$, $t \in T$, является доступным управлением), и в конечный момент на $x(t)$, $t \in T$, выполняется терминальное ограничение (2.3).

Допустимое управление $u^0(t)$, $t \in T$, и траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, назовем оптимальными, если на них критерий качества (2.1) достигает минимального значения

$$J(u^0) = \int\limits_0^{t^*} \left[u^0(t)\right]^2 /2\, dt = \min_{u(\cdot)} J(u) = \min_{u(\cdot)} \int\limits_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt.$$

По форме записи задача оптимального управления состоит в построении оптимального управления.

Из теоремы 2.3 следует, что необходимым и достаточным условием относительной управляемости является существование хотя бы одной опоры ограничений (терминального ограничения (2.3)).

Совокупность

$$T_{on} = \{t_j,\ j = \overline{1, m}\}$$

из m изолированных моментов $t_j \in T$, $j = \overline{1, m}$, называется опорой ограничений, если не вырождена $m \times m$-матрица $P = (h(t_j),\ t_j \in T_{on})$.

Основным объектом преобразования излагаемого далее метода является пара из управления и опоры. Пару $\{u, T_{on}\}$ из допустимого управления $u = (u(t),\ t \in T)$ и опоры ограничений T_{on} назовем опорным управлением. Будем называть его невырожденным, если

$$|u(t)| < 1, \quad t \in T_{on}. \tag{2.10}$$

Тема 3 Формула приращения критерия качества

3.1 Приращение критерия качества

3.2 Вектор потенциалов, котраектория, коуправление, сопряженная система

3.3 Формула приращения, физический смысл коуправления

3.1 Приращение критерия качества

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — начальное опорное управление. Наряду с ним рассмотрим некоторое допустимое управление $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, и соответствующую ему траекторию $\overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$. Найдем приращение

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) = \\
&= \int_0^{t^*} \left[u(t) + \Delta u(t)\right]^2 /2\, dt - \int_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt = \\
&= \int_0^{t^*} \left[u^2(t) + 2u(t)\Delta u(t) + \Delta u^2(t)\right] /2\, dt - \int_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt = \\
&= \int_0^{t^*} u(t)\Delta u(t)\, dt + \eta, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

где

$$\eta = \int_0^{t^*} \Delta u^2(t)/2\, dt.$$

Поскольку допустимая вариация траектории $\Delta x(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + b\Delta u, \quad \Delta x(0) = 0, \quad H\Delta x(t^*) = 0, \qquad (3.2)$$

то, используя формулу Коши (2.6), получим

$$H\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*, t) b\Delta u(t)\, dt = 0. \qquad (3.3)$$

Из (3.1)–(3.3) имеем:

$$\Delta J(u) = -\int_0^{t^*} \left[y' H\mathcal{F}(t^*, t)b - u(t)\right] \Delta u(t)\, dt + \eta, \qquad (3.4)$$

где y — произвольный m-вектор.

3.2 Вектор потенциалов, котраектория, коуправление, сопряженная система

Введем обозначение

$$\psi^{'}(t) = y^{'}H\mathcal{F}(t^*, t). \tag{3.5}$$

Из (3.5), (2.8) имеем

$$\dot{\psi}^{'}(t) = y^{'}H\frac{\partial\mathcal{F}(t^*, t)}{\partial t} = -y^{'}H\mathcal{F}(t^*, t)A, \quad \psi^{'}(t^*) = y^{'}H,$$

т. е. функция $\psi(t)$, $t \in T$, является решением уравнения

$$\dot{\psi} = -A^{'}\psi, \quad \psi(t^*) = H^{'}y. \tag{3.6}$$

Систему (3.6) назовем сопряженной системой, а ее решение $\psi(t)$, $t \in T$ — котраекторией.

Функцию $\Delta(t)$, $t \in T$:

$$\Delta(t) = \psi^{'}(t)b - u(t), \quad t \in T, \tag{3.7}$$

назовем коуправлением.

Вектор y выберем так, чтобы $\Delta(t_j) = 0$, $t_j \in T_{on}$:

$$\begin{aligned} \Delta(t_j) &= \psi^{'}(t_j)b - u(t_j) = y^{'}H\mathcal{F}(t^*, t_j)b - u(t_j) = \\ &= y^{'}h(t_j) - u(t_j) = 0, \quad t_j \in T_{on}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y^{'}\left(\, h(t_j),\ t_j \in T_{on}\,\right) - \left(\, u(t_j),\ t_j \in T_{on}\,\right)^{'} = y^{'}P - \left(\, u(t_j), t_j \in T_{on}\,\right)^{'} = 0.$$

Таким образом,

$$y^{'} = \left(\, u(t_j),\ t_j \in T_{on}\,\right)^{'}Q, \tag{3.8}$$

где $Q = P^{-1}$. Вектор y (3.8) назовем вектором потенциалов.

3.3 Формула приращения, физический смысл коуправления

Из (3.4), (3.5), (3.7) получаем окончательный вид формулы приращения критерия качества

$$\Delta J(u) = -\int\limits_0^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)\,dt + \eta. \tag{3.9}$$

Используя различные вариации управления (игольчатую, треугольную) нетрудно выяснить (аналогично тому, как это делалось в предыдущих спецкурсах) физический смысл коуправления $\Delta(\cdot)$ для точек $t \in T$ (предлагается проделать самостоятельно).

Тема 4 Критерий оптимальности

4.1 Критерий оптимальности

4.2 Доказательство достаточности методом приращений

4.3 Доказательство необходимости, установление класса оптимального управления

4.1 Критерий оптимальности

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление. Подсчитаем по нему вектор потенциалов y (3.8), котраекторию $\psi(t)$, $t \in T$ (3.6) и коуправление $\Delta(t)$, $t \in T$ (3.7).

Теорема 4.1 (критерий оптимальности) *Для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (2.1)-(2.4) достаточно существования такой опоры T_{on}, что для опорного управления $\{u, T_{on}\}$ выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} \Delta(t) \leq 0 \ \text{ при } \ u(t) = -1; \quad \Delta(t) \geq 0 \ \text{ при } \ u(t) = 1; \\ \Delta(t) = 0 \ \text{ при } \ |u(t)| < 1, \ \ t \in T. \end{gathered} \tag{4.1}$$

В случае невырожденности опорного управления соотношения (4.1) являются необходимыми для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$.

4.2 Доказательство достаточности методом приращений

Доказательство достаточности нетрудно провести методом приращений (вариаций) управления (при этом используется формула приращения критерия качества (3.9)).

Пусть для опорного управления $\{u, T_{on}\}$ соотношения (4.1) выполняются. Тогда для любой допустимой вариации управления $\Delta u(t)$, $t \in T$, имеем:

$$\Delta u(t) \geq 0 \ \text{ при } \ \Delta(t) < 0; \quad \Delta u(t) \leq 0 \ \text{ при } \ \Delta(t) > 0, \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)\,dt \le 0$$

для любой допустимой вариации управления.

Поэтому из (3.9) в совокупности с $\eta \ge 0$ получаем: $\Delta J(u) \ge 0$ для любой допустимой вариации управления, что и доказывает достаточную часть критерия оптимальности.

4.3 Доказательство необходимости, установление класса оптимального управления

Доказательство необходимости также проведем методом вариаций управления (доказательство от противного). При этом дополнительно установим класс оптимального управления.

Пусть $u(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление, а $\{u, T_{on}\}$ — невырожденное опорное управление задачи (2.1)-(2.4). Предположим, что, вопреки утверждению, соотношения (4.1) не выполняются, т. е. существует такая точка $t_0 \in T$, в которой эти соотношения нарушаются (очевидно, $t_0 \in T \setminus T_{on}$).

Предположим сначала, что точка t_0 не является точкой разрыва управления $u(t)$, $t \in T$ (а, значит, и коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$).

Для определенности предположим, что для момента t_0 соотношения (4.1) нарушаются следующим образом:

$$\Delta(t_0) > 0, \quad u(t_0) < 1.$$

Из непрерывности управления и коуправления в точке t_0 следует существование такого числа $\xi_1 > 0$, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_1$, на отрезке $[t_0 - \xi,\, t_0 + \xi]$ нет точек разрыва $u(t)$, $t \in T$, и $\Delta(t)$, $t \in T$, а также выполняются соотношения:

$$\Delta(t) > 0, \quad u(t) < 1, \quad t \in [t_0 - \xi,\, t_0 + \xi]\,. \tag{4.2}$$

В силу невырожденности опорного управления $\{u, T_{on}\}$ найдутся такие числа $\xi_2 > 0$, $\zeta_0 > 0$, u_j^{ξ}, $j = \overline{1,m}$, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_2$, выполняются соотношения:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^{\xi} \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)\,dt = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)u(t)\,dt;$$

$$\left| u_j^{\xi} \right| \le 1 - \zeta_0, \quad t_j \in T_{on}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.3}$$

Пусть число $\xi_0 > 0$ выбрано так, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_0$, выполняются и соотношения (4.2), и соотношения (4.3), причем $\bigcap\limits_{j=0}^{m} [t_j - \xi,\, t_j + \xi] = \oslash$.

Для каждого ξ, $0 < \xi < \xi_0$, построим вариацию управления $\Delta u_\xi(t)$, $t \in T$, следующим образом. Положим

$$\Delta u_\xi(t) \equiv v_0 > 0, \qquad t \in [t_0 - \xi,\, t_0 + \xi]\,;$$

$$\Delta u_\xi(t) \equiv 0, \quad t \in T \setminus \bigcup_{j=0}^{m} [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,.$$

Вариацию управления на отрезках $[t_j - \xi,\, t_j + \xi]$, $t_j \in T_{on}$, $j = \overline{1, m}$, построим в виде постоянных функций

$$\Delta u_\xi(t) \equiv v_j, \quad t \in [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,, \quad j = \overline{1, m}.$$

Из равенства

$$\int\limits_0^{t^*} h(t)\Delta u(t)\, dt = 0, \tag{4.4}$$

справедливого для каждой допустимой вариации управления, следует

$$\sum_{j=0}^{m} v_j \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)\, dt = 0. \tag{4.5}$$

Разложив левую часть равенства (4.5) по степеням ξ в точках t_j, $j = \overline{0, m}$:

$$\sum_{j=0}^{m} v_j \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)\, dt = \sum_{j=0}^{m} v_j \left(\int\limits_{t_j}^{t_j+\xi} h(t)\, dt - \int\limits_{t_j}^{t_j-\xi} h(t)\, dt \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} v_j \left(\int\limits_{t_j}^{t_j+\xi} \left(h(t_j) + \dot h(t_j)\,(t - t_j) + \frac{\ddot h(t_j)}{2}\,(t - t_j)^2 + o\left((t - t_j)^2\right)\right) dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t_j}^{t_j-\xi} \left(h(t_j) + \dot h(t_j)\,(t - t_j) + \frac{\ddot h(t_j)}{2}\,(t - t_j)^2 + o\left((t - t_j)^2\right)\right) dt \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} v_j \left(h(t_j)\xi + \dot h(t_j)\frac{\xi^2}{2} + \ddot h(t_j)\frac{\xi^3}{6} + o(\xi^3) - \right.$$

$$\left. - \left(-h(t_j)\xi + \dot h(t_j)\frac{\xi^2}{2} - \ddot h(t_j)\frac{\xi^3}{6} + o(\xi^3)\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} v_j \left(2\xi h(t_j) + \frac{\xi^3}{3}\ddot h(t_j) + o(\xi^3)\right) = \sum_{j=0}^{m} v_j \left(2\xi h(t_j) + o(\xi^2)\right) = 0,$$

и введя вектор $v=(v_j,\ j=\overline{1,m})$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} v_j\left(2\xi h(t_j)+o(\xi^2)\right)+2\xi h(t_0)v_0=\left(2\xi P+o(\xi^2)\right)v+2\xi h(t_0)v_0=0,$$

т. е.

$$\left(P+o(\xi)\right)v=-h(t_0)v_0. \tag{4.6}$$

Поскольку $\det P\neq 0$, то для достаточно малых ξ, $0<\xi<\xi_0$, будем иметь $\det\tilde{P}\neq 0$, где $\tilde{P}=P+o(\xi)$.

Тогда из (4.6) получаем $v=-\tilde{P}^{-1}h(t_0)v_0$, т. е.

$$v_j=k_jv_0,\quad j=\overline{1,m}, \tag{4.7}$$

где $k_j=-e_j^{'}\tilde{P}^{-1}h(t_0)$, $j=\overline{1,m}$.

В силу линейной зависимости (4.7) и невырожденности (4.3) опорного управления для достаточно малых v_0 и ξ, $0<\xi<\xi_0$, выполняются неравенства $\left|u_j^{\xi}+v_j\right|\leq 1$, $j=\overline{1,m}$. Тогда управление вида

$$\overline{u}(t)\equiv u_j^{\xi}+v_j,\qquad t\in\left[t_j-\xi,\,t_j+\xi\right],\qquad j=\overline{1,m};$$

$$\overline{u}(t)=u(t)+\Delta u_{\xi}(t),\quad t\in T\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\left[t_j-\xi,\,t_j+\xi\right],$$

по определению невырожденности и построению вариации $\Delta u_{\xi}(t)$, $t\in T$, является допустимым.

Из невырожденности (4.3) опорного управления для достаточно малых ξ, $0<\xi<\xi_0$, имеем:

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}h(t)\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)dt=\sum_{j=1}^{m}2\xi h(t_j)\left(u_j^{\xi}-u(t_j)\right)+o(\xi)=0,$$

откуда

$$u_j^{\xi}-u(t_j)=e_j^{'}P^{-1}\cdot O(\xi)=O(\xi),\quad j=\overline{1,m}. \tag{4.8}$$

Значение v_0 выберем так, чтобы $v_0=\zeta^{1/2}$, где $\xi=\zeta^{1/2}$.

Учитывая (4.7), (4.8), при достаточно малых v_0 и ξ, $0<\xi<\xi_0$, а, следовательно, и малом ζ, получим

$$\eta=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}+v_j-u(t)\right)^2/2\,dt+\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi}v_0^2/2\,dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)^2/2\,dt+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)v_j\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} v_j^2/2\,dt+\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} v_0^2/2\,dt=o(\zeta),$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)^2/2\,dt=o(\xi^2)=o(\zeta);$$

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)v_j\,dt=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\left(u_j^{\xi}-u(t)\right)k_jv_0\,dt=v_0\cdot o(\xi)=o(\zeta);$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} v_j^2/2\,dt &= \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}(k_jv_0)^2/2\,dt=v_0^2\cdot O(\xi)=O(\xi^2)\cdot O(\xi)=\\ &= O(\xi^3)=o(\xi^2)=o(\zeta);\end{aligned}$$

$$\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} v_0^2/2\,dt=v_0^2\cdot O(\xi)=o(\zeta).$$

Подсчитаем при рассматриваемых v_0 и ξ, $0<\xi<\xi_0$, приращение критерия качества на управлениях $\overline{u}(t)$, $u(t)$, $t\in T$:

$$\Delta J(u)=-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi}\Delta(t)\left(u_j^{\xi}+v_j-u(t)\right)\,dt-v_0\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi}\Delta(t)\,dt+o(\zeta)=$$

$$=o(\zeta)-v_0\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi}\Delta(t)\,dt<0.$$

Полученное противоречие доказывает выполнение соотношений (4.1) в точках $t\in T\backslash T_{on}$, не являющихся точками разрыва управления (остальные случаи нарушения соотношений (4.1) исследуются аналогично).

Покажем теперь, что разрыв оптимального управления $u(t)$, $t\in T$, невозможен, если при некоторой опоре T_{on} пара $\{u,T_{on}\}$ — невырожденное опорное управление (именно такой случай и рассматривается в необходимой части теоремы 4.1).

Предположим, что в точке t_0 управление $u(t)$, $t\in T$, терпит разрыв. Здесь также считаем, что $\xi>0$ выбрано так, что на отрезке $[t_0-\xi,\,t_0+\xi]$ нет точек разрыва управления (кроме точки t_0).

При достаточно малом ξ могут реализоваться только два случая:

1) $|u(t)|<1$, $t\in[t_0-\xi,\,t_0[\cup]t_0,\,t_0+\xi]$;

2) $|u(t)|\equiv 1$ хотя бы на одном из рассматриваемых полуинтервалов.

В силу выполнения соотношений (4.1) для $t \in [t_0 - \xi,\, t_0[\cup]t_0,\, t_0 + \xi]$ в первом случае имеем

$$\Delta(t) = \psi^{'}(t)b - u(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0 - \xi,\, t_0[\bigcup]t_0,\, t_0 + \xi]\,,$$

откуда

$$u(t) \equiv \psi^{'}(t)b, \quad t \in [t_0 - \xi,\, t_0[\bigcup]t_0,\, t_0 + \xi]\,.$$

В силу непрерывности функции $\psi^{'}(t)b$, $t \in T$, получаем

$$u(t_0 - 0) = u(t_0 + 0) = u(t_0),$$

т. е. разрыв в точке t_0 невозможен.

В случае 2), для определенности предполагая, что

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in [t_0 - \xi, t_0[\,,$$

получим

$$\Delta(t) = \psi^{'}(t)b - 1 \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \psi^{'}(t)b \geq 1, \quad t \in [t_0 - \xi,\, t_0[\,;$$

а также

$$\Delta(t) = \psi^{'}(t)b + 1 \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \psi^{'}(t)b \leq -1, \quad t \in]t_0,\, t_0 + \xi]\,,$$

если

$$u(t) \equiv -1, \quad t \in]t_0,\, t_0 + \xi]$$

или

$$|\psi^{'}(t)b| = |u(t)| < 1, t \in]t_0,\, t_0 + \xi]\,,$$

если

$$|u(t)| < 1, \quad t \in]t_0,\, t_0 + \xi]\,.$$

В силу непрерывности функции $\psi^{'}(t)b$, $t \in T$, и в этом случае приходим к выводу о невозможности разрыва управления в точке t_0.

Остальные ситуации случая 2) исследуются аналогично.

Теорема 4.1 доказана.

В силу принципиальной значимости доказанный в необходимой части критерия оптимальности факт выделим в отдельное утверждение.

Теорема 4.2 *Если $u^0(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление, и при некоторой опоре T_{on} пара $\{u^0, T_{on}\}$ — невырожденное*[2] *опорное управление, то $u^0(t)$, $t \in T$ — непрерывная по t функция.*

[2]Дополнительное требование невырожденности опорного управления не является принципиальным ограничением, требующим расширения класса допустимых управлений. В случае вырожденности опорного управления опорные моменты, для которых не выполняются условия невырожденности (2.10), можно заменить на другие моменты, принадлежащие так называемым квазиособым отрезкам (п. 5.1 и рисунок 5.1). И тогда условия теоремы 4.2 будут выполнены. Исключением является лишь тот случай, когда в задаче (2.1)-(2.4) существует единственное допустимое управление, принимающее лишь критические значения 1 или -1.

Тема 5 Метод первого порядка

5.1 Идея метода

5.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи

5.3 Процедура доводки

Излагаемый далее метод называется методом первого порядка потому, что он использует только опору ограничений, не привлекая новую конструкцию — опору критерия качества, которая обычно используется при построении опорных методов решения линейно-квадратичных задач оптимального управления.

5.1 Идея метода

Предлагаемый метод решения задачи (2.1)-(2.4) состоит в выполнении двух процедур: процедуры формирования, решения и анализа результатов опорной задачи и процедуры доводки.

Целью выполнения первой процедуры является построение грубого решения задачи оптимального управления (в суженном классе допустимых управлений) и выявление на основе этого грубого решения структуры оптимального управления, а также вычисление приближенных значений точек переключения с одного участка оптимального управления на другой и компонент вектора потенциалов (3.8).

Процедура доводки завершает работу алгоритма построением оптимального управления (в предельном классе допустимых управлений) путем уточнения значений точек переключения и компонент вектора потенциалов с любой наперед заданной точностью.

Как показано в п. 4.3 при доказательстве теоремы 4.2, предельным для задачи (2.1)-(2.4) является класс непрерывных, кусочно-гладких функций, т. к. оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, задачи (2.1)-(2.4) непрерывно и состоит из участков двух типов (пример на рисунке 5.1) — на одних участках

$$T_i^* = [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}], \quad i \in K_* = K_*^+ \bigcup K_*^-$$

(критических), управление принимает критические значения:

$$u(t) \equiv k_i = 1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*^+$$

(на таких участках $\psi'(t)b \geq 1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^+$) или

$$u(t) \equiv k_i = -1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*^-$$

(на таких участках $\psi'(t)b \le -1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^-$); эти критические участки управления непрерывно стыкуются с участками второго типа

$$T_i^0 =]\underline{t}_i, \overline{t}_i[\,, \quad i \in K_0,$$

на которых для непрерывной функции $\psi'(t)b$, $t \in T$, выполняется неравенство $|\psi'(t)b| < 1$, $t \in T_i^0$, $i \in K_0$, и поэтому

$$u(t) \equiv \psi'(t)b, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0$$

(участки второго типа называют квазиособыми, т. к. на них выполняется тождество $\Delta(t) = \psi'(t)b - u(t) \equiv 0$, $t \in T_i^0$, $i \in K_0$). Гладкость управления нарушается лишь в точках стыковки $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0$, участков первого типа с участками второго типа (все упомянутые здесь множества индексов строго определяются ниже).

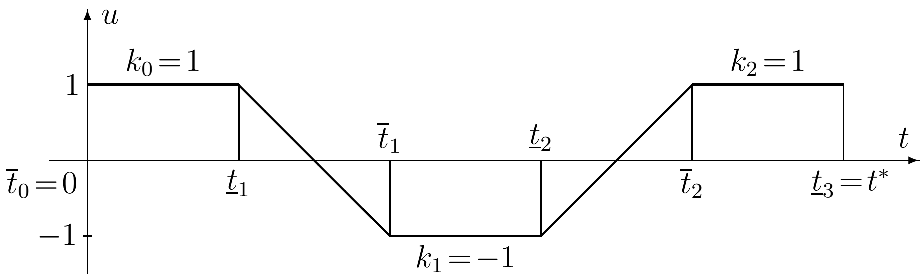

Рисунок 5.1 – Оптимальное управление в линейно-квадратичной задаче

Первая процедура строит более грубое решение задачи (2.1)-(2.4), основанное на рассмотрении задачи оптимального управления в классе функций, постоянных на каждом из отрезков выбранного разбиения отрезка T. Можно разбивать отрезок T на отрезки разной длины, учитывая при этом особенности (участки) исходного допустимого управления. Здесь предлагается самый простой вариант — задача (2.1)-(2.4) рассматривается в классе импульсных управлений, т. е. кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования $h > 0$. Тогда задача оптимального управления будет эквивалентна выпуклой сепарабельной задаче квадратичного программирования, рассмотренной в спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16], а решение задачи (2.1)-(2.4) будет иметь «ступеньчатый» вид (рисунок 5.2). Это решение во многих случаях может быть вполне достаточным на практике (если $h > 0$ — достаточно мало), и тогда процесс решения задачи (2.1)-(2.4) на этом можно завершить.

В противном случае возникает проблема построения (на основе полученного грубого решения) точного решения задачи оптимального управления. Если параметр $h > 0$ выбран достаточно малым, то грубое решение вполне определяет структуру оптимального управления, а также приближенные значения точек переключения между критическими и квазиособыми участками управления и компонент вектора потенциалов (именно такая ситуация демонстрируется на рисунках 5.1 и 5.2).

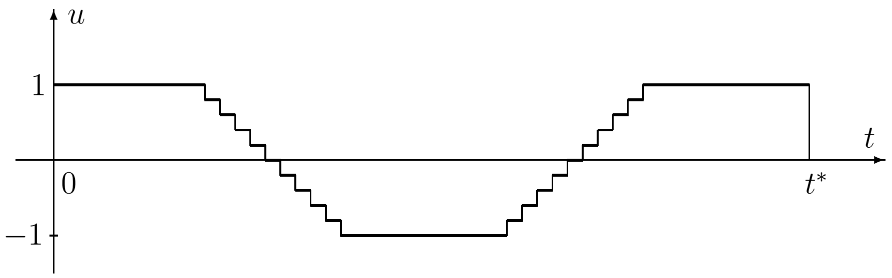

Рисунок 5.2 – Оптимальное управление в классе импульсных управлений

Определим более строго понятие структуры оптимального управления. Подсчитаем следующие числа и построим множества:

1) количество p принадлежащих отрезку T квазиособых отрезков

$$T_i^0 =]\underline{t}_i, \overline{t}_i[\subset T, \quad i \in K_0 = \{1, \dots, p\},$$

на которых выполняется неравенство:

$$|\psi^{'}(t)b| < 1, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0, \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$u(t) \equiv \psi^{'}(t)b; \quad \Delta(t) = \psi^{'}(t)b - u(t) \equiv 0, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0$$

(здесь $|\psi^{'}(\underline{t}_i)b| = 1$; $|\psi^{'}(\overline{t}_i)b| = 1$, $i \in K_0$, кроме, возможно, точек $\underline{t}_1$ и $\overline{t}_p$);

2) число (признак) s^0, определяемое соотношениями:

$$s^0 = 0, \text{ если } \underline{t}_1 > 0; \quad s^0 = 1, \text{ если } \underline{t}_1 \le 0 < \overline{t}_1, \tag{5.2}$$

где через $\underline{t}_1$ обозначена точка, в которой $|\psi^{'}(\underline{t}_1)b| = 1$, и тогда при $s^0 = 0$ точка $\underline{t}_1 \in \operatorname{int} T$ (первый участок управления критический); при $s^0 = 1$ точка $\underline{t}_1 \notin \operatorname{int} T$ и далее под отрезком $T_1^0 =]\underline{t}_1, \overline{t}_1[$ будем понимать отрезок $T_1^0 =]\underline{t}_1, \overline{t}_1[=]0, \overline{t}_1[\subset T$ (первый участок управления квазиособый);

3) число (признак) s^*, определяемое соотношениями:

$$s^* = p, \text{ если } \overline{t}_p < t^*; \quad s^* = p - 1, \text{ если } \underline{t}_p < t^* \le \overline{t}_p, \tag{5.3}$$

где через $\overline{t}_p$ обозначена точка, в которой $|\psi^{'}(\overline{t}_p)b| = 1$, и тогда при $s^* = p$ точка $\overline{t}_p \in \operatorname{int} T$ (последний участок управления критический); при $s^* = p - 1$ точка $\overline{t}_p \notin \operatorname{int} T$ и далее под отрезком $T_p^0 = \big]\underline{t}_p, \overline{t}_p\big[$ будем понимать отрезок $T_p^0 = \big]\underline{t}_p, \overline{t}_p\big[= \big]\underline{t}_p, t^*\big[\subset T$ (последний участок управления квазиособый);

4) множество индексов (номеров)

$$K_* = \{s^0, \dots, s^*\}$$

принадлежащих T критических участков

$$T_i^* = [\,\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}] \subset T, \quad i \in K_*,$$

управления:

$$|\psi^{'}(t)b| \geq 1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*, \tag{5.4}$$

согласованное с множеством индексов

$$K_0 = \{1, \dots, p\}$$

квазиособых участков (критический участок, следующий за очередным квазиособым, имеет тот же номер), которое разобъем на два подмножества $K_* = K_*^+ \cup K_*^-$, $K_*^+ \cap K_*^- = \oslash$:

$$\begin{gathered} K_*^- = \left\{ i \in K_*\colon\ \psi^{'}(t)b \leq -1,\ \ t \in T_i^* \right\}; \\ K_*^+ = K_* \setminus K_*^- = \left\{ i \in K_*\colon\ \psi^{'}(t)b \geq 1,\ \ t \in T_i^* \right\} \end{gathered} \tag{5.5}$$

(очевидно, $u(t) \equiv k_i = -1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^-$; $u(t) \equiv k_i = 1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^+$).

Совокупность

$$S = \left\{ p,\, s^0,\, s^*,\, K_*^-,\, K_*^+ \right\} \tag{5.6}$$

назовем структурой оптимального управления задачи (2.1)-(2.4).

Кроме структуры (5.6) оптимального управления рассмотрим множество его определяющих элементов:

$$\left\{ y;\ \ \underline{t}_i,\ i \in P_0 = \{s^0+1, \dots, p\};\ \ \bar{t}_i,\ i \in P^0 = \{1, \dots, s^*\} \right\}, \tag{5.7}$$

состоящее из оптимальных вектора потенциалов y (3.8) и принадлежащих T левых $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и правых $\bar{t}_i$, $i \in P^0$, концов квазиособых отрезков T_i^0, $i \in K_0$ (5.1) (здесь $|\psi^{'}(\underline{t}_i)b| = 1$, $i \in P_0$; $|\psi^{'}(\bar{t}_i)b| = 1$, $i \in P^0$). Зная определяющие элементы (5.7), можно легко построить оптимальное управление.

Пусть после выполнения первой процедуры определены структура оптимального управления (5.6) и приближенные значения определяющих элементов (5.7) (подробнее об этом говорится в п. 5.2). Задача (обязанность) процедуры доводки — используя эти данные, построить оптимальное управление (непрерывную, кусочно-гладкую функцию, удовлетворяющую с любой наперед заданной точностью всем ограничениям задачи (2.1)-(2.4) и условиям оптимальности (4.1)). Процедура доводки строит оптимальное управление путем уточнения определяющих элементов (5.7) с помощью решения специальных конечных уравнений доводки.

5.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление, для которого не выполняются условия оптимальности (4.1). Приступаем к формированию опорной задачи.

Задачу (2.1)-(2.4) (как уже говорилось выше) рассмотрим в классе импульсных управлений, т. е. кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования $h > 0$. Для этого выберем целое число $N > 1$ и разобъем отрезок $T = [0, t^*]$ на N равных частей (рассмотрим сетку с равноотстоящими узлами) ((5.8) и рисунок 5.3)

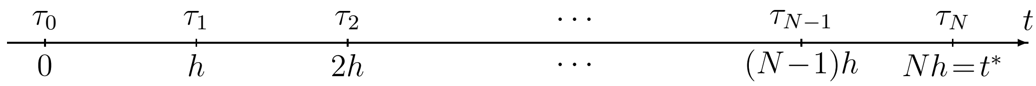

Рисунок 5.3 – Сетка с равноотстоящими узлами

$$\tau_i = ih, \quad i = \overline{0, N}; \quad h = t^*/N. \tag{5.8}$$

Положим

$$u(t) \equiv u_i = \text{const}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.9}$$

Тогда для элементов задачи (2.1)-(2.4) получим:

1) для критерия качества (2.1):

$$J(u) = \int\limits_0^{t^*} u^2(t)/2\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} u^2(t)/2\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2/2 \int\limits_{ih}^{(i+1)h} dt = h \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2/2;$$

2) для геометрических ограничений (2.4):

$$|u_i| \le 1, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

И, наконец, используя формулу Коши (2.6) (для системы (2.2)),

3) для терминального ограничения (2.3) получим:

$$\begin{aligned} Hx(t^*) &= H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*, t)bu(t)\, dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(t)u(t)\, dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} u_i \int\limits_{ih}^{(i+1)h} h(t)\, dt = g. \end{aligned}$$

Введем обозначения для векторов и матрицы:

$$\tilde{u} = \left(u_i,\ i = \overline{0, N-1}\right); \quad \tilde{b} = \left(\tilde{b}_i,\ i = \overline{1, m}\right) = g - H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0;$$

$$\tilde{A} = \left(\tilde{a}_i,\ i = \overline{0, N-1}\right) = \left(\int\limits_{ih}^{(i+1)h} h(t)\, dt,\ i = \overline{0, N-1}\right).$$

Тогда в классе импульсных управлений (5.9) задача (2.1)-(2.4) будет эквивалентна следующей выпуклой сепарабельной линейно-квадратичной задаче (постоянный множитель h на минимум целевой функции не влияет):

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2/2 \to \min, \quad \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b}, \quad |u_i| \leq 1, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{5.10}$$

Задачу (5.10) будем называть опорной задачей. Ее можно решать любыми известными методами, например, прямыми опорными методами (первого или второго порядка), рассмотренными в спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16], или двойственными опорными методами.

В качестве начальной опоры

$$J_{on} = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

задачи (5.10) возьмем номера тех отрезков

$$[\tau_i, \tau_{i+1}] = [ih, (i+1)h], \quad i \in \{i_1, \ldots, i_m\},$$

которым принадлежат опорные моменты из $T_{on} = \{t_1, \ldots, t_m\}$:

$$t_1 \in [\tau_{i_1}, \tau_{i_1+1}] = [i_1 h, (i_1+1)h],\ \ldots\ ,\ t_m \in [\tau_{i_m}, \tau_{i_m+1}] = [i_m h, (i_m+1)h].$$

В силу невырожденности опорной матрицы $P = (h(t_i),\ t_i \in T_{on})$ исходной задачи (2.1)-(2.4) при «достаточно малом» h будет невырождена и построенная описанным выше способом опорная матрица

$$\tilde{P} = (\tilde{a}_i,\ i \in J_{on}) = \left(\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(t)\, dt,\ i \in J_{on}\right)$$

опорной задачи (5.10).

Если задачу (5.10) решать двойственным методом, то этой начальной информации вполне достаточно. Алгоритм двойственного метода следует лишь дополнить простой (начальной) процедурой построения начального согласованного опорного псевдоплана.

В случае решения опорной задачи прямыми методами необходимо построить также начальный план

$$\tilde{u} = \left(u_i,\ i = \overline{0, N-1}\right).$$

Если начальное управление задачи (2.1)-(2.4) — кусочно-постоянная функция, а точнее, она постоянна на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, построенного разбиения отрезка T, т. е. имеет место тождество (5.9) для конкретных значений u_i, $i = \overline{0, N-1}$, то это тождество и определяет начальный план. В противном случае нужно воспользоваться дополнительной начальной процедурой замены начального управления исходной задачи на постоянные «средние» значения (как это сделано в формуле (4.3) для ξ-окрестностей опорных моментов) на тех отрезках, на которых тождество (5.9) не выполняется (по теореме о среднем, такие постоянные значения всегда существуют).

Пусть

$$\{\tilde{u}^0, J^0_{on}\}, \quad \tilde{u}^0 = \left(u^0_i,\ i = \overline{0, N-1}\right), \quad J^0_{on} = \{i^0_1, \ldots, i^0_m\},$$

— оптимальный опорный план задачи (5.10). Новое допустимое управление $\overline{u}(t)$, $t \in T$, задачи (2.1)-(2.4) (оптимальное в классе функций (5.9)) построим следующим образом:

$$\overline{u}(t) = u^0_i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Опорные моменты для новой опоры

$$\overline{T}_{on} = \{\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_m\}$$

найдем по номерам $i^0_1, \ldots, i^0_m$ новых опорных отрезков — возьмем, например, их середины:

$$\overline{t}_1 = \frac{\tau_{i^0_1} + \tau_{i^0_1+1}}{2} = \frac{i^0_1 h + (i^0_1+1)h}{2} = i^0_1 h + \frac{h}{2} = \tau_{i^0_1} + \frac{h}{2}, \ \ldots\ , \ \overline{t}_m = \tau_{i^0_m} + \frac{h}{2}$$

(можно в качестве новых опорных моментов вместо середин опорных отрезков брать их левые или правые концы — учитывая принятое при постановке задачи (2.1)-(2.4) соглашение: $u(t) = \left[u(t-0) + u(t+0)\right]/2$, этот выбор практически не повлияет на дальнейшие вычисления).

По новому опорному управлению $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$ определим структуру оптимального управления (5.6) (при достаточно малом h это можно сделать) и вычислим приближенные значения его определяющих элементов (5.7). Для этого сначала по $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$ подсчитаем вектор потенциалов $\overline{y}$ (3.8). Затем, интегрируя сопряженную систему (3.6) справа-налево (и строя таким образом котраекторию $\overline{\psi}(t)$, $t \in T$), по поведению функции $\overline{\psi}'(t)b$, $t \in T$ (п. 5.1) найдем остальные определяющие элементы из (5.7) и определим структуру (5.6).

С этой информацией перейдем к процедуре доводки.

5.3 Процедура доводки

На доводку (в качестве начальной информации) передается структура S (5.6) и определяющие элементы (5.7), включающие в себя вектор потенциалов y, а также принадлежащие T концы $\underline{t}_i$, $i \in P_0 = \{s^0+1, \dots, p\}$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0 = \{1, \dots, s^*\}$, квазиособых отрезков T_i^0, $i \in K_0 = \{1, \dots, p\}$. По этой информации нетрудно построить (при необходимости) квазиуправление $\omega(t)$, $t \in T$:

$$\begin{gathered} \omega(t) = \psi'(t)b = y'H\mathcal{F}(t^*, t)b = y'h(t), \\ t \in T_i^0 = \left]\underline{t}_i, \overline{t}_i\right[\,,\ i \in K_0 = \{1, \dots, p\}; \\ \omega(t) \equiv k_i,\ t \in T_i^* = [\,\overline{t}_i, \underline{t}_{i+1}]\,,\ i \in K_* = \{s^0, \dots, s^*\} \\ (k_i = -1,\ i \in K_*^-;\ k_i = 1,\ i \in K_*^+). \end{gathered} \tag{5.11}$$

На квазиуправлении, очевидно, выполняются условия оптимальности (4.1) и геометрические ограничения (2.4), но не выполняется, возможно, терминальное ограничение (2.3). Задача (обязанность) доводки — так скорректировать квазиуправление, чтобы на новом квазиуправлении выполнялось также и терминальное ограничение.

Корректировку квазиуправления (элемента бесконечномерного функционального пространства) произведем путем коррекции конечного набора чисел — определяющих элементов (5.7). Количество этих элементов равно $m + |P_0| + |P^0|$. Получим уравнения для вычисления определяющих элементов по их начальным приближениям:

1) m уравнений имеем из условия выполнения терминального ограничения

$$\begin{aligned} H\text{æ}(t^*) &= H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*, t)b\omega(t)\,dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \sum_{i=s^0}^{s^*} k_i \int\limits_{\overline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} h(t)\,dt + \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_i}^{\overline{t}_i} h(t)y'h(t)\,dt = g, \end{aligned}$$

где æ(t), $t \in T$ — траектория системы (2.2), соответствующая квазиуправлению (5.11);

$$\begin{gathered} \overline{t}_0 = 0,\ \text{если}\ s^0 = 0; \quad \underline{t}_1 = 0,\ \text{если}\ s^0 = 1; \\ \underline{t}_{p+1} = t^*,\ \text{если}\ s^* = p; \quad \overline{t}_p = t^*,\ \text{если}\ s^* = p-1; \end{gathered}$$

2) еще $|P_0| + |P^0|$ уравнений — из условий стыковки квазиуправления (непрерывной функции) в моменты $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0$:

$$\begin{gathered} \omega(\underline{t}_i) = y'h(\underline{t}_i) = k_{i-1}, \quad i \in P_0; \\ \omega(\overline{t}_i) = y'h(\overline{t}_i) = k_i, \quad i \in P^0. \end{gathered}$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
f\left(\underline{t}_i,\, i\in P_0;\ \overline{t}_i,\, i\in P^0;\ y\right) &= \sum_{i=s^0}^{s^*} k_i \int_{\overline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} h(t)\,dt + \sum_{i=1}^{p} \int_{\underline{t}_i}^{\overline{t}_i} h(t)h^{'}(t)y\,dt + \\
&\quad + H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 - g; \\
q_i\left(\underline{t}_i;\ y\right) &= y^{'}h(\underline{t}_i) - k_{i-1}, \quad i\in P_0; \\
r_i\left(\overline{t}_i;\ y\right) &= y^{'}h(\overline{t}_i) - k_i, \quad i\in P^0.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Тогда имеем $m+|P_0|+|P^0|$ уравнений доводки:

$$
\begin{gathered}
f\left(\underline{t}_i,\, i\in P_0;\ \overline{t}_i,\, i\in P^0;\ y\right) = 0; \\
q_i\left(\underline{t}_i;\ y\right) = 0, \quad i\in P_0; \\
r_i\left(\overline{t}_i;\ y\right) = 0, \quad i\in P^0.
\end{gathered}
\tag{5.13}
$$

Определящие элементы (5.7), составляющие начальную информацию для процедуры доводки, в общем случае не являются решением системы (5.13).

Подсчитаем для системы (5.13) матрицу Якоби:

$$
G = G(\,\underline{t}_i,\, i\in P_0;\ \overline{t}_i,\, i\in P^0;\ y\,) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix};
$$

$$
G_{11} = \begin{pmatrix} \partial q_j/\partial \underline{t}_i,\ i\in P_0 \\ j\in P_0 \end{pmatrix}; \quad G_{13} = \begin{pmatrix} \partial q_j/\partial y_i,\ i=\overline{1,m} \\ j\in P_0 \end{pmatrix};
$$

$$
G_{22} = \begin{pmatrix} \partial r_j/\partial \overline{t}_i,\ i\in P^0 \\ j\in P^0 \end{pmatrix}; \quad G_{23} = \begin{pmatrix} \partial r_j/\partial y_i,\ i=\overline{1,m} \\ j\in P^0 \end{pmatrix};
$$

$$
G_{33} = \left(\partial f/\partial y_i,\ i=\overline{1,m}\right).
$$

Подсчитаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_i}{\partial \underline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(y^{'}h(\underline{t}_i) - k_{i-1}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(y^{'}H\mathcal{F}(t^*,\underline{t}_i)b\right) = y^{'}H\frac{\partial \mathcal{F}(t^*,\underline{t}_i)}{\partial \underline{t}_i}b = \\
&= -y^{'}H\mathcal{F}(t^*,\underline{t}_i)Ab = -y^{'}Hm(\underline{t}_i), \quad i\in P_0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r_i}{\partial \overline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \overline{t}_i}\left(y^{'}h(\overline{t}_i) - k_i\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{t}_i}\left(y^{'}H\mathcal{F}(t^*,\overline{t}_i)b\right) = y^{'}H\frac{\partial \mathcal{F}(t^*,\overline{t}_i)}{\partial \overline{t}_i}b = \\
&= -y^{'}H\mathcal{F}(t^*,\overline{t}_i)Ab = -y^{'}Hm(\overline{t}_i), \quad i\in P^0;
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial q_j}{\partial \underline{t}_i} = 0 \quad \text{при} \quad j\neq i, \quad i,j\in P_0; \qquad \frac{\partial r_j}{\partial \overline{t}_i} = 0 \quad \text{при} \quad j\neq i, \quad i,j\in P^0;
$$

$$
\frac{\partial q_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(y^{'}h(\underline{t}_j) - k_{j-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(h^{'}(\underline{t}_j)y\right) = h_i(\underline{t}_j),\ \ i=\overline{1,m},\ \ j\in P_0;
$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(y' h(\bar{t}_j) - k_j\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(h'(\bar{t}_j) y\right) = h_i(\bar{t}_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j \in P^0$$

$$\left(\text{т.е.} \left(\frac{\partial q_j}{\partial y_i},\ i = \overline{1, m}\right) = h'(\underline{t}_j),\ j \in P_0; \quad \left(\frac{\partial r_j}{\partial y_i},\ i = \overline{1, m}\right) = h'(\bar{t}_j),\ j \in P^0\right);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} h(t) h'(t) y \, dt\right) = \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(h(t) h'(t) y\right) dt = \\
&= \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} h(t) h'(t) e_i \, dt, \quad i = \overline{1, m}
\end{aligned}$$

$$\left(\text{т.е.} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i},\ i = \overline{1, m}\right) = \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} h(t) h'(t) \, dt\right),$$

где $m(t) = \mathcal{F}(t^*, t) A b$; e_i — единичный m-вектор. Таким образом,

$$G_{11} = \operatorname{diag}\left(-y' H m(\underline{t}_i),\ i \in P_0\right); \quad G_{22} = \operatorname{diag}\left(-y' H m(\bar{t}_i),\ i \in P^0\right);$$

$$G_{13} = \begin{bmatrix} h'(\underline{t}_i) \\ i \in P_0 \end{bmatrix}; \qquad G_{23} = \begin{bmatrix} h'(\bar{t}_i) \\ i \in P^0 \end{bmatrix}; \qquad G_{33} = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} h(t) h'(t) \, dt.$$

Остальные блоки матрицы Якоби нулевые:

$$G_{12} = \begin{pmatrix} \partial q_j / \partial \bar{t}_i,\ i \in P^0 \\ j \in P_0 \end{pmatrix} = 0; \quad G_{21} = \begin{pmatrix} \partial r_j / \partial \underline{t}_i,\ i \in P_0 \\ j \in P^0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$G_{31} = \left(\partial f / \partial \underline{t}_i,\ i \in P_0\right) = 0; \qquad G_{32} = \left(\partial f / \partial \bar{t}_i,\ i \in P^0\right) = 0,$$

т. к.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_j}{\partial \bar{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}\left(y' h(\underline{t}_j) - k_{j-1}\right) = 0, \quad i \in P^0 \quad j \in P_0; \\
\frac{\partial r_j}{\partial \underline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(y' h(\bar{t}_j) - k_j\right) = 0, \quad i \in P_0 \quad j \in P^0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \underline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(\sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \int\limits_{\bar{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t) \, dt + \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} h(t) y' h(t) \, dt\right) = \\
&= k_{i-1} h(\underline{t}_i) - h(\underline{t}_i) y' h(\underline{t}_i) = h(\underline{t}_i)\left(k_{i-1} - y' h(\underline{t}_i)\right) = 0, \quad i \in P_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}\left(\sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \int\limits_{\bar{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t) \, dt + \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} h(t) y' h(t) \, dt\right) = \\
&= -k_i h(\bar{t}_i) + h(\bar{t}_i) y' h(\bar{t}_i) = h(\bar{t}_i)\left(y' h(\bar{t}_i) - k_i\right) = 0, \quad i \in P^0.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица Якоби G равна

$$G=\left[\begin{array}{ccccc}\operatorname{diag}(-y'Hm(\underline{t}_i),\, i\in P_0) & \vdots & 0 & \vdots & \begin{array}{c}h'(\underline{t}_i)\\ i\in P_0\end{array}\\ \hdashline 0 & \vdots & \operatorname{diag}(-y'Hm(\overline{t}_i),\, i\in P^0) & \vdots & \begin{array}{c}h'(\overline{t}_i)\\ i\in P^0\end{array}\\ \hdashline 0 & \vdots & 0 & \vdots & \sum\limits_{i=1}^{p}\int\limits_{\underline{t}_i}^{\overline{t}_i} h(t)h'(t)\,dt\end{array}\right].$$

Пусть выполняются условия:

$$\operatorname{rank}\big(h(t),\ t\in T^0\big)=m, \tag{5.14}$$

где $T^0=\big\{t\in T\colon\ \big|\psi'(t)b\big|<1\big\}=\bigcup\limits_{i\in K_0}T_i^0=\bigcup\limits_{i\in K_0}\,]\underline{t}_i,\,\overline{t}_i[\,,$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\psi'(t)b\big)\Big|_{t=\underline{t}_i}=\frac{\partial}{\partial t}\big(y'h(t)\big)\Big|_{t=\underline{t}_i}\neq 0,\quad i\in P_0;$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\psi'(t)b\big)\Big|_{t=\overline{t}_i}=\frac{\partial}{\partial t}\big(y'h(t)\big)\Big|_{t=\overline{t}_i}\neq 0,\quad i\in P^0 \tag{5.15}$$

(очевидно, условие (5.14) тесно связано с управляемостью динамической системы; невыполнение условий (5.15) может произойти при очень редком сочетании параметров задачи). Тогда $\det G\neq 0$, и система (5.13) имеет единственное решение.

Решать систему (5.13) можно любыми методами, например, методом Ньютона следующим образом.

Пусть известно начальное приближение к определяющим элементам (5.7): $z^0=\big(\underline{t}_i^0,\ i\in P_0;\ \ \overline{t}_i^0,\ i\in P^0;\ \ y^0\big)$, которое поставляет опорная задача. Следующее приближение найдем по формуле

$$z^k=z^{k-1}-G^{-1}(z^{k-1})\left[\begin{array}{c}q_i\big(\underline{t}_i^{k-1};\ y^{k-1}\big),\ \ i\in P_0\\ r_i\big(\overline{t}_i^{k-1};\ y^{k-1}\big),\ \ i\in P^0\\ f\Big(\underline{t}_i^{k-1}, i\in P_0;\ \overline{t}_i^{k-1}, i\in P^0;\ y^{k-1}\Big)\end{array}\right],\ k=1,2,\ldots \tag{5.16}$$

Вычисления по формуле (5.16) (в случае сходимости метода Ньютона) продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$\Big|q_i\big(\underline{t}_i^{k_0};\ y^{k_0}\big)\Big|\le\varepsilon,\quad i\in P_0;$$
$$\Big|r_i\big(\overline{t}_i^{k_0};\ y^{k_0}\big)\Big|\le\varepsilon,\quad i\in P^0; \tag{5.17}$$
$$\Big\|f\Big(\underline{t}_i^{k_0},\, i\in P_0;\ \overline{t}_i^{k_0},\, i\in P^0;\ y^{k_0}\Big)\Big\|\le\varepsilon.$$

Тогда для квазиуправления

$$\omega^{(k_0)}(t),\quad t\in T,$$

которое полностью определяется с помощью элементов

$$z^{k_0} = \left(\underline{t}_i^{k_0},\ i \in P_0;\ \overline{t}_i^{k_0},\ i \in P^0;\ y^{k_0}\right),$$

с заданной точностью выполняется терминальное ограничение

$$H æ^{(k_0)}(t^*) = g,$$

а также с заданной точностью (по значению коуправления) найдены точки переключения (здесь $æ^{(k_0)}(t)$, $t \in T$ — траектория системы (2.2), соответствующая квазиуправлению $\omega^{(k_0)}(t)$, $t \in T$). Поэтому это квазиуправление можно принять в качестве оптимального управления задачи.

В противном случае, если через 3–5 итераций метода Ньютона не установился квадратичный закон уменьшения величин (5.17) или произошло изменение (нарушение) структуры (5.6), найденной в результате решения опорной задачи, уменьшив параметр h (например, положив $h = h/2$), приступаем к формированию и решению новой опорной задачи. Начальный опорный план новой опорной задачи построим, используя новое опорное управление $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$, полученное в результате решения предыдущей опорной задачи.

Тема 6 Сходимость метода

В описанном выше методе решения задачи (2.1)-(2.4) процедура доводки состоит в решении системы (5.13) методом Ньютона. Из методов вычислений известно, что существует такая окрестность решения $\overline{z}$ системы (5.13), что, исходя из любой точки z^0 этой окрестности, метод Ньютона строит сходящуюся последовательность z^k, $k = 1, 2, \ldots$, приближений решения системы (5.13).

Необходимые приближения для процедуры доводки строит опорная задача (5.10) за конечное число итераций. При этом достаточно конечное число раз обращаться к прямой и сопряженной системам для формирования элементов опорной задачи.

Таким образом, справедлива

Теорема 6.1 (о сходимости метода) *Описанный метод решения задачи (2.1)-(2.4) после конечного числа интегрирований прямой и сопряженной систем на отрезках, длина которых не превышает t^*, строит последовательность функций $\omega\left(t \,|\, z^k\right)$, $t \in T$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к оптимальному управлению $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (2.1)-(2.4). Для осуществления одной итерации $z^k \to z^{k+1}$ достаточно проинтегрировать* *прямую и сопряженную системы на отрезках, длина которых не превосходит t^*.*

Замечание 6.1 *Все проделываемые в процессе работы метода вычисления можно организовать так, что можно доказать не только сходимость метода, но и его конечность (как это делается в разделе 2 для линейно-негладкой задачи).*

Для этого достаточно вычисления в процедуре доводки организовать не для прямой системы (2.2), а для так называемой π-системы — системы порядка $2n$, состоящей из прямой (2.2) и сопряженной (3.6) систем:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \qquad\qquad + bu\,, & x(0) = x_0; \\ \dot{\psi} = \qquad -A'\psi \qquad\quad , & \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \tag{6.1}$$

При этом начальное значение ψ_0 для сопряженной системы нетрудно вычислить, проинтегрировав (после решения опорной задачи) сопряженную систему (3.6) справа-налево.

Как показано в п.п. 5.1–5.3, оптимальное управление задачи (2.1)-(2.4) на критических и квазиособых отрезках соответственно определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv k_i, & t \in T_i^*, \quad & i \in K_*; \\ u(t) &\equiv \psi'(t)b, & t \in T_i^0, \quad & i \in K_0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

С учетом (6.2) уравнения из системы (6.1) на критических и квазиособых отрезках можно записать в виде следующих систем:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \qquad\qquad + bk_i\,, \\ \dot{\psi} = \qquad -A'\psi\,, \end{cases} \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*; \tag{6.3}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bb'\psi\,, \\ \dot{\psi} = \qquad -A'\psi\,, \end{cases} \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0. \tag{6.4}$$

Введем обозначения:

$$z(t) = (x(t), \psi(t)) \in R^{2n}; \quad \overline{b} = (b, 0) \in R^{2n}; \quad \tilde{b} = (0, b) \in R^{2n};$$

$$\overline{A}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \end{bmatrix} = A_* \in R^{2n\times 2n}, \quad v(t) = k_i, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*;$$

$$\overline{A}(t) = \begin{bmatrix} A & bb' \\ 0 & -A' \end{bmatrix} = A_0 \in R^{2n\times 2n}, \quad v(t) = 0, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0.$$

Тогда, объединяя системы (6.3) и (6.4), π-систему (6.1) можно записать с помощью следующей системы с кусочно-постоянной матрицей $\overline{A}(t)$:

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t) + \overline{b}v(t), \quad z(0) = z_0 = (x_0, \psi_0). \tag{6.5}$$

Управление исходной задачи (2.1)-(2.4) на квазиособых отрезках выражается через траекторию системы (6.5) следующим образом:

$$u(t) = z^{'}(t)\tilde{b}, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0.$$

Исходя из организации вычислений в процедуре доводки для системы (6.5), добавим к определяющим элементам (5.7) n-вектор ψ_0, а к уравнениям доводки (5.13) — требование выполнения начального условия на правый конец котраектории из (3.6):

$$\psi(t^*) - H^{'}y = 0.$$

Уравнения доводки нетрудно переформулировать в терминах системы (6.5), используя фундаментальную матрицу решений

$$\Phi(t,\tau), \quad t,\tau \in T, \quad \tau \le t,$$

системы

$$\dot{z} = \overline{A}(t)z,$$

которая на стыке критических и квазиособых отрезков «склеивается» из фундаментальных матриц

$$\mathcal{F}_*(t,\tau) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_0(t,\tau)$$

систем

$$\dot{z} = A_* z \quad \text{и} \quad \dot{z} = A_0 z$$

соответственно.

В преобразованных уравнениях доводки будут отсутствовать, очевидно, интегралы по квазиособым отрезкам, и, следовательно, для организации их решения методом Ньютона необходимо интегрировать системы по сужающимся от итерации к итерации отрезкам (как и в разделе 2 для линейно-негладкой задачи).

Провести дальнейшие рассуждения о конечности таким образом организованного алгоритма (аналогично тому, как это проделано в теме 10 для линейно-негладкой задачи) предлагается самостоятельно.

2 Минимизация средней интенсивности управления для линейных систем

В силу того, что задача оптимального управления, исследуемая в данном разделе, имеет много общих элементов с задачей из раздела 1, изложение материала раздела 2 приведем в более коротком виде.

Тема 7 Линейно-негладкая задача оптимального управления с ограничениями: постановка задачи, основные понятия

На фиксированном промежутке времени $T = [0, t^*]$ в классе кусочно-непрерывных[3] управлений

$$u(t), \quad t \in T; \quad u(t) = \left[u(t-0) + u(t+0)\right]/2,$$

рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^{t^*} |u(t)|\, dt \to \min_{u(\cdot)}, \tag{7.1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{7.2}$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{7.3}$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \tag{7.4}$$

которая отличается от задачи (2.1)-(2.4), рассмотренной в разделе 1, только негладким критерием качества (7.1).

Поскольку остальные элементы (7.2)-(7.4) данной линейно-негладкой задачи совпадают с элементами линейно-квадратичной задачи, то все пояснения к задаче (7.1)-(7.4), понятия доступного, допустимого, оптимального управлений, опорного управления (а также связанные с этими общими элементами формулы и теоремы) дословно переносятся из п.п. 2.1-2.4.

Исключение составляет понятие невырожденного опорного управления. Предлагается самостоятельно проанализировать необходимость введения этого понятия в следующей формулировке.

Опорное управление $\{u, T_{on}\}$ будем называть невырожденным в задаче (7.1)-(7.4), если

$$|u(t)| < 1, \quad u(t) \neq 0, \quad t \in T_{on}. \tag{7.5}$$

[3]Класс кусочно-непрерывных функций является чрезмерно широким и для рассматриваемой в данной главе линейно-негладкой задачи. Известно, что предельным для нее является класс кусочно-постоянных функций (это показывается в п.п. 8.2, 8.3). Именно на этот класс и ориентирован метод решения, описываемый в п.п. 9.1-9.3.

Тема 8 Критерий оптимальности

8.1 Формула приращения критерия качества
8.2 Критерий оптимальности
8.3 Класс оптимального управления

8.1 Формула приращения критерия качества

На допустимых управлениях

$$u(t), \quad \overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \quad t \in T,$$

и соответствующих им траекториях

$$x(t), \quad \overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), \quad t \in T,$$

подсчитаем приращение критерия качества (7.1):

$$\Delta J(u) = J(\overline{u}) - J(u) = \int\limits_T (\,|u(t) + \Delta u(t)| - |u(t)|\,)\, dt \tag{8.1}$$

для таких вариаций $\Delta u(t)$, $t \in T$, для которых

$$\operatorname{sign} \overline{u}(t) = \operatorname{sign} u(t), \quad t \in T_{on}. \tag{8.2}$$

Поскольку допустимая вариация траектории $\Delta x(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению (3.2), то (как и в п. 3.1) приходим к равенству (3.3). Из (8.1) и (3.3) получаем

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T y' H \mathcal{F}(t^*, t) b \Delta u(t)\, dt + \int\limits_T (\,|u(t) + \Delta u(t)| - |u(t)|\,)\, dt, \tag{8.3}$$

где y — произвольный m-вектор.

Вводя обозначение

$$\psi'(t) = y' H \mathcal{F}(t^*, t),$$

убеждаемся, что функция $\psi(t)$, $t \in T$, является решением уравнения (3.6).

Введем обозначение

$$\varphi(t) = \psi'(t) b, \quad t \in T. \tag{8.4}$$

Тогда формула приращения (8.3) принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned}\Delta J(u) \;&=\; -\int\limits_T \varphi(t) \Delta u(t)\, dt + \int\limits_T (\,|u(t) + \Delta u(t)| - |u(t)|\,)\, dt = \\ &=\; -\int\limits_T \varphi(t) \Delta u(t)\, dt +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{T:\,u(t)<0}\left\{\begin{array}{ll}-u(t)-\Delta u(t)+u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)\le -u(t)\\ \ \ u(t)+\Delta u(t)+u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)>-u(t)\end{array}\right\}dt+\\
&+\int\limits_{T:\,u(t)>0}\left\{\begin{array}{ll}\ \ u(t)+\Delta u(t)-u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)\ge -u(t)\\ -u(t)-\Delta u(t)-u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)<-u(t)\end{array}\right\}dt+\\
&+\int\limits_{T:\,u(t)=0}\left\{\begin{array}{ll}-\Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)<0\\ \ \ \Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)>0\end{array}\right\}dt=\\
=\ &-\int\limits_{T:\,u(t)<0}\left\{\begin{array}{ll}(\varphi(t)+1)\Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)\le -u(t)\\ (\varphi(t)-1)\Delta u(t)-2u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)>-u(t)\end{array}\right\}dt-\\
&-\int\limits_{T:\,u(t)>0}\left\{\begin{array}{ll}(\varphi(t)-1)\Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)\ge -u(t)\\ (\varphi(t)+1)\Delta u(t)+2u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)<-u(t)\end{array}\right\}dt-\\
&-\int\limits_{T:\,u(t)=0}\left\{\begin{array}{ll}(\varphi(t)+1)\Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)<0\\ (\varphi(t)-1)\Delta u(t), & \text{если}\ \ \Delta u(t)>0\end{array}\right\}dt. \qquad (8.5)
\end{aligned}
$$

Вектор y выберем так, чтобы в формуле приращения (8.5) коэффициенты при $\Delta u(t)$ в опорные моменты $t_j \in T_{on}$, $j=\overline{1,m}$, были равны нулю (учтем при этом, что в опорные моменты должны выполняться условия (8.2)):

$$
\begin{aligned}
\varphi(t_j)-\operatorname{sign} u(t_j) \ &= \ \psi'(t_j)b-\operatorname{sign} u(t_j)=y'H\mathcal{F}(t^*,t_j)b-\operatorname{sign} u(t_j)=\\
&= \ y'h(t_j)-\operatorname{sign} u(t_j)=0, \quad t_j\in T_{on}, \quad j=\overline{1,m}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
y'(h(t_j),\, t_j\in T_{on})-(\operatorname{sign} u(t_j),\, t_j\in T_{on})'=y'P-(\operatorname{sign} u(t_j),\, t_j\in T_{on})'=0.
$$

Таким образом,

$$
y'=(\operatorname{sign} u(t_j),\ t_j\in T_{on})'\,Q, \quad Q=P^{-1}. \qquad (8.6)
$$

Вектор y (8.6) назовем вектором потенциалов, решение $\psi(t)$, $t\in T$, системы (3.6), (8.6) (т. е. решение сопряженной системы (3.6), соответствующее вектору потенциалов (8.6)) — котраекторией в задаче (7.1)-(7.4).

8.2 Критерий оптимальности

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление. Подсчитаем по нему вектор потенциалов y (8.6), котраекторию $\psi(t)$, $t\in T$ (3.6), (8.6) и функцию $\varphi(t)$, $t\in T$ (8.4).

Теорема 8.1 (критерий оптимальности) *Для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (7.1)-(7.4) достаточно существования такой опоры T_{on}, что для опорного управления $\{u, T_{on}\}$ выполняются соотношения:*

$$\begin{gathered}\varphi(t) \leq -1 \ \text{ при } \ u(t) = -1; \quad \varphi(t) \geq 1 \ \text{ при } \ u(t) = 1; \\ \varphi(t) = \operatorname{sign} u(t) \ \text{ при } \ |u(t)| < 1, \ \ u(t) \neq 0; \\ |\varphi(t)| \leq 1 \ \text{ при } \ u(t) = 0, \ \ t \in T.\end{gathered} \tag{8.7}$$

В случае невырожденности опорного управления соотношения (8.7) являются необходимыми для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$.

Доказательство. Достаточность. Пусть для опорного управления $\{u, T_{on}\}$ соотношения (8.7) выполняются. Тогда (это нетрудно показать) для любой допустимой вариации управления $\Delta u(t)$, $t \in T$, из (8.5) получаем:

$$\Delta J(u) = J(u + \Delta u) - J(u) \geq 0,$$

что и доказывает достаточную часть критерия оптимальности.

Необходимость (доказательство от противного). Пусть $u(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление, а $\{u, T_{on}\}$ — невырожденное опорное управление (7.5) задачи (7.1)-(7.4). Предположим, что, вопреки утверждению, соотношения (8.7) не выполняются, т. е. существует такая точка $t_0 \in T$, в которой эти соотношения нарушаются (очевидно, $t_0 \in T \setminus T_{on}$).

Для определенности предположим, что для момента t_0 соотношения (8.7) нарушаются следующим образом:

$$\varphi(t_0) > -1, \quad u(t_0) < 0.$$

Из непрерывности функции $\varphi(t)$, $t \in T$, и кусочной непрерывности управления $u(t)$, $t \in T$, следует существование такого числа $\xi_1 > 0$, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_1$, выполняются соотношения:

$$\varphi(t) > -1, \quad u(t) < 0, \quad t \in T(t_0) \subset T, \tag{8.8}$$

где

$$T(t_0) = [t_0 - \xi, \, t_0 + \xi] \, ,$$

если t_0 не является граничной точкой отрезка T и не является точкой разрыва управления $u(t)$, $t \in T$; в противном случае заменим здесь и в последующих рассуждениях отрезок $[t_0 - \xi, \, t_0 + \xi]$ на один из отрезков $[t_0 - \xi, \, t_0]$ или $[t_0, \, t_0 + \xi]$.

В силу невырожденности опорного управления $\{u, T_{on}\}$ найдутся такие числа $\xi_2 > 0$, $\zeta_0 > 0$, u_j^ξ, $j = \overline{1,m}$, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_2$, выполняются соотношения:

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^\xi \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)\,dt = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_j-\xi}^{t_j+\xi} h(t)u(t)\,dt;$$

$$\left|u_j^\xi\right| \le 1 - \zeta_0; \qquad \min_{t\in[t_j-\xi,\, t_j+\xi]} \left|u_j^\xi\right| \ge \zeta_0, \tag{8.9}$$

$$t_j \in T_{on}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Пусть число $\xi_0 > 0$ выбрано так, что для всех ξ, $0 < \xi < \xi_0$, выполняются и соотношения (8.8), и соотношения (8.9), причем $\bigcap\limits_{j=0}^{m} [t_j - \xi,\, t_j + \xi] = \oslash$.

Для каждого ξ, $0 < \xi < \xi_0$, построим вариацию управления $\Delta u_\xi(t)$, $t \in T$, следующим образом. Положим

$$\Delta u_\xi(t) \equiv v_0 > 0, \qquad t \in [t_0 - \xi,\, t_0 + \xi]\,;$$

$$\Delta u_\xi(t) \equiv 0, \quad t \in T \setminus \bigcup_{j=0}^{m} [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,.$$

Вариацию управления на отрезках $[t_j - \xi,\, t_j + \xi]$, $t_j \in T_{on}$, $j = \overline{1,m}$, построим в виде постоянных функций

$$\Delta u_\xi(t) \equiv v_j, \quad t \in T_j = [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,, \quad j = \overline{1,m}.$$

В силу равенства (4.4), справедливого для каждой допустимой вариации управления, получаем (4.5), откуда (как и в разделе 1)

$$v_j = -e_j^{'} \tilde{P}^{-1} h(t_0) v_0 = k_j v_0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{8.10}$$

где

$$\tilde{P} = P + o(\xi), \quad P = (h(t_j),\ t_j \in T_{on}) \quad (\det P \neq 0,\ \det \tilde{P} \neq 0).$$

В силу линейной зависимости (8.10) и невырожденности (8.9) опорного управления для достаточно малых v_0 и ξ, $0 < \xi < \xi_0$, выполняются соотношения:

$$\left|u_j^\xi + v_j\right| \le 1; \quad \operatorname{sign}\left(u_j^\xi + v_j\right) = \operatorname{sign} u_j^\xi, \quad j = \overline{1,m}.$$

Тогда управление вида

$$\overline{u}(t) \equiv u_j^\xi + v_j, \qquad t \in T_j = [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,, \qquad j = \overline{1,m};$$

$$\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u_\xi(t), \quad t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} T_j = T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} [t_j - \xi,\, t_j + \xi]\,,$$

по определению невырожденности и построению вариации $\Delta u_\xi(t)$, $t \in T$, является допустимым.

Из невырожденности (8.9) опорного управления для достаточно малых ξ, $0 < \xi < \xi_0$, получаем (4.8).

Подсчитаем приращение критерия качества на управлениях $\overline{u}(t)$, $u(t)$, $t \in T$. Для достаточно малых v_0 и ξ, $0 < \xi < \xi_0$, имеем:

$$\Delta J(u) = -\sum_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{T_j^+} (\varphi(t) - 1) \left(u_j^\xi + v_j - u(t) \right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{T_j^-} (\varphi(t) + 1) \left(u_j^\xi + v_j - u(t) \right) dt \right) - v_0 \int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} (\varphi(t) + 1)\, dt =$$

$$= o(\xi) - v_0 \int\limits_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} (\varphi(t) + 1)\, dt < 0,$$

где

$$T_j^+ = \left\{ t \in T_j \colon u_j^\xi > 0 \right\} \subseteq T_j, \quad T_j^- = \left\{ t \in T_j \colon u_j^\xi < 0 \right\} \subseteq T_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Полученное противоречие доказывает необходимую часть критерия оптимальности (остальные случаи нарушения соотношений (8.7) исследуются аналогично).

Теорема 8.1 доказана.

8.3 Класс оптимального управления

Из соотношений (8.7) становится очевидной структура оптимального управления.

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление, для которого выполняются соотношения (8.7). По (оптимальному) опорному управлению $\{u, T_{on}\}$ однозначно строятся (оптимальный) вектор потенциалов y (8.6), (оптимальная) котраектория $\psi(t)$, $t \in T$ — решение сопряженной системы (3.6), (8.6) и (оптимальная) функция $\varphi(t)$, $t \in T$ (8.4).

Согласно соотношениям (8.7), оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, полностью определяется с помощью (оптимальной) непрерывной функции $\varphi(t)$, $t \in T$: на тех участках $T_i^* \subset T$, $i \in K_*$ (критических), на которых $|\varphi(t)| > 1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*$, управление принимает критические значения 1 или -1 ($u(t) \equiv 1$ или $u(t) \equiv -1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*$); между критическими участками оптимального управления находятся участки $T_i^0 \subset T$, $i \in K_0$, на которых выполняется неравенство $|\varphi(t)| < 1$, $t \in T_i^0$, $i \in K_0$ (на них управление тождественно равно нулю: $u(t) \equiv 0$, $t \in T_i^0$, $i \in K_0$).

Таким образом, предельным для задачи (7.1)-(7.4) является класс кусочно-постоянных функций.

Тема 9 Метод первого порядка

9.1 Идея метода

9.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи

9.3 Процедура доводки

Задачу (7.1)-(7.4) также будем решать методом первого порядка, т. е. методом, который не использует опору критерия качества.

9.1 Идея метода

Метод решения задачи (7.1)-(7.4) (как и изложенный в п.п. 5.1-5.3 метод решения задачи (2.1)-(2.4)) состоит в выполнении двух процедур: процедуры формирования, решения и анализа результатов опорной задачи и процедуры доводки.

Целью выполнения первой процедуры является построение грубого решения задачи оптимального управления (в суженном классе допустимых управлений) и выявление на основе этого грубого решения структуры оптимального управления, а также вычисление приближенных значений точек переключения с одного участка оптимального управления на другой и компонент вектора потенциалов (8.6).

Процедура доводки завершает работу алгоритма построением оптимального управления (в предельном классе допустимых управлений) путем уточнения значений точек переключения и компонент вектора потенциалов с любой наперед заданной точностью.

Как показано в п.п. 8.2, 8.3, предельным для задачи (7.1)-(7.4) является класс кусочно-постоянных функций. Оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, задачи (7.1)-(7.4) состоит из участков двух типов (пример на рисунке 9.1). На одних участках

$$T_i^* = \,]\,\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}[\,, \quad i \in K_* = K_*^+ \bigcup K_*^-$$

(критических), управление принимает критические значения:

$$u(t) \equiv k_i = 1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*^+$$

(на таких участках $\varphi(t) > 1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^+$) или

$$u(t) \equiv k_i = -1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*^-$$

(на таких участках $\varphi(t) < -1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^-$). Эти критические участки управления отделены друг от друга участками второго типа

$$T_i^0 =]\underline{t}_i, \overline{t}_i[\,, \quad i \in K_0,$$

на которых для непрерывной функции $\varphi(t)$, $t \in T$, выполняется неравенство $|\varphi(t)| < 1$, $t \in T_i^0$, $i \in K_0$, и поэтому

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0$$

(участки второго типа назовем 0-отрезками). Упомянутые множества индексов строго определяются ниже.

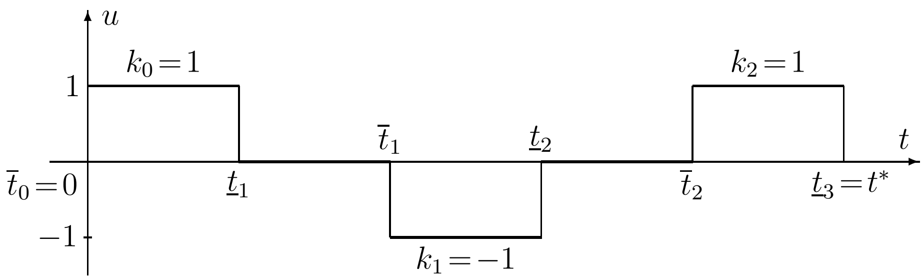

Рисунок 9.1 – Оптимальное управление в линейно-негладкой задаче

Первая процедура строит более грубое решение задачи (7.1)-(7.4), основанное на рассмотрении задачи оптимального управления в классе импульсных управлений, т. е. кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования $h > 0$. Тогда задача оптимального управления будет эквивалентна выпуклой сепарабельной задаче кусочно-линейного программирования, рассмотренной в спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16], а решение задачи (7.1)-(7.4) будет иметь «ступенчатый» вид (рисунок 9.2). Если грубое решение, полученное в результате выполнения (при выбранном $h > 0$) первой процедуры, достаточно на практике, то на этом процесс решения задачи (7.1)-(7.4) можно завершить.

Построить точное решение задачи (7.1)-(7.4) (если в этом возникает необходимость) можно на основе полученного грубого решения. Если параметр $h > 0$ выбран достаточно малым, то грубое решение вполне определяет структуру оптимального управления, а также приближенные значения точек переключения между участками двух типов (критическими участками и 0-отрезками) оптимального управления и компонент вектора потенциалов (именно такая ситуация демонстрируется на рисунках 9.1, 9.2).

Очевидно, структура оптимального управления задачи (7.1)-(7.4) очень похожа на структуру оптимального управления задачи (2.1)-(2.4) — только вместо квазиособых участков управления здесь (в линейно-негладкой задаче) присутствуют 0-отрезки.

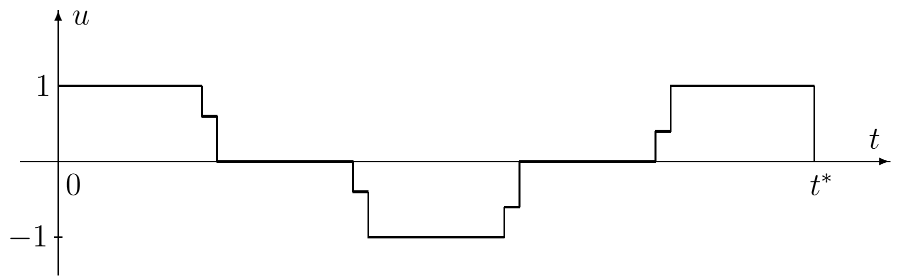

Рисунок 9.2 – Оптимальное управление в классе импульсных управлений

Определим более строго понятие структуры оптимального управления задачи (7.1)-(7.4). Подсчитаем следующие числа и построим множества:

1) количество p принадлежащих отрезку T 0-отрезков

$$T_i^0 =]\underline{t}_i, \overline{t}_i[\subset T, \quad i \in K_0 = \{1, \ldots, p\},$$

на которых выполняется неравенство:

$$|\varphi(t)| < 1, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0, \tag{9.1}$$

и, следовательно,

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in T_i^0, \quad i \in K_0$$

(здесь $|\varphi(\underline{t}_i)| = 1$; $|\varphi(\overline{t}_i)| = 1$, $i \in K_0$, кроме, возможно, точек $\underline{t}_1$ и $\overline{t}_p$);

2) число (признак) s^0, определяемое соотношениями:

$$s^0 = 0, \text{ если } \underline{t}_1 > 0; \quad s^0 = 1, \text{ если } \underline{t}_1 \le 0 < \overline{t}_1, \tag{9.2}$$

где через $\underline{t}_1$ обозначена точка, в которой $|\varphi(\underline{t}_1)| = 1$, и тогда при $s^0 = 0$ точка $\underline{t}_1 \in \operatorname{int} T$ (первый участок управления критический); при $s^0 = 1$ точка $\underline{t}_1 \notin \operatorname{int} T$ и далее под отрезком $T_1^0 =]\underline{t}_1, \overline{t}_1[$ будем понимать отрезок $T_1^0 =]\underline{t}_1, \overline{t}_1[=]0, \overline{t}_1[\subset T$ (первый участок управления — 0-отрезок);

3) число (признак) s^*, определяемое соотношениями:

$$s^* = p, \text{ если } \overline{t}_p < t^*; \quad s^* = p - 1, \text{ если } \underline{t}_p < t^* \le \overline{t}_p, \tag{9.3}$$

где через $\overline{t}_p$ обозначена точка, в которой $|\varphi(\overline{t}_p)| = 1$, и тогда при $s^* = p$ точка $\overline{t}_p \in \operatorname{int} T$ (последний участок управления критический); при $s^* = p - 1$

точка $\overline{t}_p \notin \operatorname{int} T$ и далее под отрезком $T_p^0 = \left]\underline{t}_p, \overline{t}_p\right[$ будем понимать отрезок $T_p^0 = \left]\underline{t}_p, \overline{t}_p\right[= \left]\underline{t}_p, t^*\right[\subset T$ (последний участок управления — 0-отрезок);

4) множество индексов (номеров)

$$K_* = \{s^0, \ldots, s^*\}$$

принадлежащих T критических участков

$$T_i^* = \left]\,\overline{t}_i, \underline{t}_{i+1}\right[\subset T, \quad i \in K_*,$$

управления:

$$|\varphi(t)| > 1, \quad t \in T_i^*, \quad i \in K_*, \tag{9.4}$$

согласованное с множеством индексов

$$K_0 = \{1, \ldots, p\}$$

0-отрезков (критический участок, следующий за очередным 0-отрезком, имеет тот же номер), которое разобъем на два подмножества
$K_* = K_*^+ \cup K_*^-$, $K_*^+ \cap K_*^- = \oslash$:

$$\begin{gathered} K_*^- = \{i \in K_*\colon\ \varphi(t) < -1,\ \ t \in T_i^*\}\,; \\ K_*^+ = K_* \setminus K_*^- = \{i \in K_*\colon\ \varphi(t) > 1,\ \ t \in T_i^*\} \end{gathered} \tag{9.5}$$

(очевидно, $u(t) \equiv k_i = -1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^-$; $u(t) \equiv k_i = 1$, $t \in T_i^*$, $i \in K_*^+$).

Совокупность

$$S = \left\{\, p,\ s^0,\ s^*,\ K_*^-,\ K_*^+ \,\right\} \tag{9.6}$$

назовем структурой оптимального управления задачи (7.1)-(7.4).

Кроме структуры (9.6) оптимального управления рассмотрим множество его определяющих элементов:

$$\left\{\, \underline{t}_i,\ \ i \in P_0 = \{s^0 + 1, \ldots, p\};\ \ \ \overline{t}_i,\ \ i \in P^0 = \{1, \ldots, s^*\};\ \ \ y \,\right\}, \tag{9.7}$$

состоящее из оптимальных вектора потенциалов y (8.6) и принадлежащих T левых $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и правых $\overline{t}_i$, $i \in P^0$, концов 0-отрезков T_i^0, $i \in K_0$ (9.1) (здесь $|\varphi(\underline{t}_i)| = 1$, $i \in P_0$; $|\varphi(\overline{t}_i)| = 1$, $i \in P^0$). Зная определяющие элементы (9.7), можно легко построить оптимальное управление.

Пусть после выполнения первой процедуры определены структура оптимального управления (9.6) и приближенные значения определяющих элементов (9.7) (подробнее об этом говорится в п. 9.2). Задача процедуры доводки — используя эти данные, построить оптимальное управление (кусочно-постоянную функцию, удовлетворяющую с любой наперед заданной точностью всем ограничениям задачи (7.1)-(7.4) и условиям оптимальности (8.7)). Процедура доводки строит оптимальное управление путем уточнения определяющих элементов (9.7) с помощью решения специальных конечных уравнений доводки.

9.2 Процедура формирования, решения и анализа результатов опорной задачи

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление, для которого не выполняются условия оптимальности (8.7). Приступаем к формированию опорной задачи.

Задачу (7.1)-(7.4) (как и задачу (2.1)-(2.4) в п. 5.2) рассмотрим в классе импульсных управлений, т. е. кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования $h > 0$. Для этого выберем целое число $N > 1$ и разобъем отрезок $T = [0, t^*]$ на N равных частей ((5.8) и рисунок 5.3). Задачу (7.1)-(7.4) рассмотрим в классе функций (5.9). Тогда для элементов задачи (7.1)-(7.4) получим:

1) для критерия качества (7.1):

$$J(u) = \int\limits_0^{t^*} |u(t)|\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(t)|\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} |u_i| \int\limits_{ih}^{(i+1)h} dt = h\sum_{i=0}^{N-1} |u_i|;$$

2) для геометрических ограничений (7.4):

$$|u_i| \le 1, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

И, наконец, используя формулу Коши (2.6) (для системы (7.2)),

3) для терминального ограничения (7.3) получим:

$$\begin{aligned} Hx(t^*) &= H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*,t)bu(t)\,dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(t)u(t)\,dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} u_i \int\limits_{ih}^{(i+1)h} h(t)\,dt = g. \end{aligned}$$

Введем обозначения для векторов и матрицы:

$$\tilde{u} = \left(u_i,\ i = \overline{0, N-1}\right); \quad \tilde{b} = \left(\tilde{b}_i,\ i = \overline{1, m}\right) = g - H\mathcal{F}(t^*,0)x_0;$$

$$\tilde{A} = \left(\tilde{a}_i,\ i = \overline{0, N-1}\right) = \left(\int\limits_{ih}^{(i+1)h} h(t)\,dt,\ i = \overline{0, N-1}\right).$$

Тогда в классе импульсных управлений (5.9) задача (7.1)-(7.4) будет эквивалентна следующей выпуклой сепарабельной кусочно-линейной задаче (постоянный множитель h на минимум целевой функции не влияет):

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u_i| \to \min, \quad \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b}, \quad |u_i| \le 1, \quad i = \overline{0, N-1}. \qquad (9.8)$$

Задачу (9.8) будем называть опорной задачей (для задачи (7.1)-(7.4)). Ее можно решать любыми известными методами, например, прямыми опорными методами (первого или второго порядка), рассмотренными в спецкурсе «Оптимизация выпуклых статических моделей» [16], или двойственными опорными методами (кусочно-линейного или линейного программирования).

Проблема построения начального плана $\tilde{u} = \left(u_i,\ i = \overline{0, N-1}\right)$ и начальной опоры $J_{on} = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{0, 1, \ldots, N-1\}$ задачи (9.8) решается так же, как это сделано в п. 5.2 для задачи(5.10).

Пусть $\{\tilde{u}^0, J^0_{on}\}$, $\tilde{u}^0 = \left(u^0_i,\ i = \overline{0, N-1}\right)$, $J^0_{on} = \{i^0_1, \ldots, i^0_m\}$ — оптимальный опорный план задачи (9.8). По этой информации построим новое допустимое управление $\overline{u}(t)$, $t \in T$, и новую опору $\overline{T}_{on} = \{\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_m\}$ задачи (7.1)-(7.4) (так же, как это сделано в п. 5.2 для задачи (2.1)-(2.4)).

По новому опорному управлению $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$ определим структуру оптимального управления (9.6) (при достаточно малом h это можно сделать) и вычислим приближенные значения его определяющих элементов (9.7). Для этого сначала по опорному управлению $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$ подсчитаем вектор потенциалов $\overline{y}$ (8.6). Затем, интегрируя сопряженную систему (3.6), (8.6) справа-налево (и строя таким образом котраекторию $\overline{\psi}(t)$, $t \in T$), по поведению функции $\overline{\varphi}(t) = \overline{\psi}'(t)b$, $t \in T$ (п. 9.1) найдем остальные определяющие элементы из (9.7) и определим структуру (9.6).

С этой информацией перейдем к процедуре доводки.

9.3 Процедура доводки

На доводку (в качестве начальной информации) передается структура S (9.6) и определяющие элементы (9.7), включающие в себя вектор потенциалов y, а также принадлежащие T концы $\underline{t}_i$, $i \in P_0 = \{s^0+1, \ldots, p\}$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0 = \{1, \ldots, s^*\}$, 0-отрезков T^0_i, $i \in K_0 = \{1, \ldots, p\}$. По этой информации нетрудно построить (при необходимости) квазиуправление $\omega(t)$, $t \in T$:

$$
\begin{gathered}
\omega(t) \equiv 0,\ \ t \in T^0_i =]\,\underline{t}_i, \overline{t}_i\,[\,,\quad i \in K_0 = \{1, \ldots, p\};\\
\omega(t) \equiv k_i,\ t \in T^*_i =]\,\overline{t}_i, \underline{t}_{i+1}[\,,\ i \in K_* = \{s^0, \ldots, s^*\}\\
(k_i = -1,\ i \in K^-_*;\ k_i = 1,\ i \in K^+_*);
\end{gathered}
\tag{9.9}
$$

значения квазиуправления в точках разрыва $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0$, определим (согласно договоренности при постановке задачи) следующим образом:

$$\omega(t) = [\omega(t-0) + \omega(t+0)]\,/2.$$

На квазиуправлении, очевидно, выполняются условия оптимальности (8.7) и геометрические ограничения (7.4), но не выполняется, возможно, терминальное ограничение (7.3). Задача доводки — так скорректировать квазиуправление, чтобы на новом квазиуправлении выполнялось также и терминальное ограничение.

Корректировку квазиуправления (кусочно-постоянной функции — элемента бесконечномерного функционального пространства) произведем путем коррекции конечного набора чисел — определяющих элементов (9.7). Количество этих элементов равно $|P_0| + |P^0| + m$.

Получим уравнения для вычисления определяющих элементов по их начальным приближениям:

1) m уравнений имеем из условия выполнения терминального ограничения

$$\begin{aligned} H\text{æ}(t^*) &= H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*,t)b\omega(t)\,dt = \\ &= H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \sum_{i=s^0}^{s^*} k_i \int\limits_{\overline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} h(t)\,dt = g, \end{aligned}$$

где $\text{æ}(t)$, $t \in T$ — траектория системы (7.2), соответствующая квазиуправлению (9.9);

$$\overline{t}_0 = 0, \text{ если } s^0 = 0; \quad \underline{t}_{p+1} = t^*, \text{ если } s^* = p;$$

2) еще $|P_0| + |P^0|$ уравнений — из условий выполнения соотношений (8.7) критерия оптимальности в точках разрыва $\underline{t}_i$, $i \in P_0$, и $\overline{t}_i$, $i \in P^0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{t}_i) = y^{'}h(\underline{t}_i) = k_{i-1}, \quad i \in P_0; \\ \varphi(\overline{t}_i) = y^{'}h(\overline{t}_i) = k_i, \quad i \in P^0. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} q_i\left(\underline{t}_i; y\right) &= y^{'}h(\underline{t}_i) - k_{i-1}, \quad i \in P_0; \\ r_i\left(\overline{t}_i; y\right) &= y^{'}h(\overline{t}_i) - k_i, \quad i \in P^0; \\ f\left(\underline{t}_i, i \in P_0; \overline{t}_i, i \in P^0\right) &= \sum_{i=s^0}^{s^*} k_i \int\limits_{\overline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} h(t)\,dt + H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 - g. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Тогда имеем $|P_0| + |P^0| + m$ уравнений доводки:

$$\begin{gathered} q_i\left(\underline{t}_i; y\right) = 0, \quad i \in P_0; \\ r_i\left(\overline{t}_i; y\right) = 0, \quad i \in P^0; \\ f\left(\underline{t}_i, i \in P_0; \overline{t}_i, i \in P^0\right) = 0. \end{gathered} \tag{9.11}$$

Определящие элементы (9.7), составляющие начальную информацию для процедуры доводки, в общем случае не являются решением системы (9.11).

Подсчитаем для системы (9.11) матрицу Якоби:

$$G = G(\,\underline{t}_i, i \in P_0; \overline{t}_i, i \in P^0;\, y\,) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & 0 \end{bmatrix};$$

$$G_{11} = \begin{pmatrix} \partial q_j/\partial \underline{t}_i,\ i \in P_0 \\ j \in P_0 \end{pmatrix}; \quad G_{13} = \begin{pmatrix} \partial q_j/\partial y_i,\ i = \overline{1,m} \\ j \in P_0 \end{pmatrix};$$

$$G_{22} = \begin{pmatrix} \partial r_j/\partial \overline{t}_i,\ i \in P^0 \\ j \in P^0 \end{pmatrix}; \quad G_{23} = \begin{pmatrix} \partial r_j/\partial y_i,\ i = \overline{1,m} \\ j \in P^0 \end{pmatrix};$$

$$G_{31} = (\partial f/\partial \underline{t}_i,\ i \in P_0)\,; \quad G_{32} = \left(\partial f/\partial \overline{t}_i,\ i \in P^0\right).$$

Остальные блоки матрицы Якоби нулевые:

$$G_{12} = \begin{pmatrix} \partial q_j/\partial \overline{t}_i,\ i \in P^0 \\ j \in P_0 \end{pmatrix} = 0; \quad G_{21} = \begin{pmatrix} \partial r_j/\partial \underline{t}_i,\ i \in P_0 \\ j \in P^0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$G_{33} = (\partial f/\partial y_i,\ i = \overline{1,m}) = 0,$$

т. к. функции $q_j\left(\underline{t}_j; y\right)$, $j \in P_0$; $r_j\left(\overline{t}_j; y\right)$, $j \in P^0$; $f\left(\underline{t}_i, i \in P_0; \overline{t}_i, i \in P^0\right)$ не зависят явно от $\overline{t}_i$, $i \in P^0$; $\underline{t}_i$, $i \in P_0$; y соответственно. Подсчитаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial \underline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(y^{'}h(\underline{t}_i) - k_{i-1}\right) = \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(y^{'}H\mathcal{F}(t^*, \underline{t}_i)b\right) = y^{'}H\frac{\partial \mathcal{F}(t^*, \underline{t}_i)}{\partial \underline{t}_i}b = \\ &= -y^{'}H\mathcal{F}(t^*, \underline{t}_i)Ab = -y^{'}Hm(\underline{t}_i), \quad i \in P_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial \overline{t}_i} &= \frac{\partial}{\partial \overline{t}_i}\left(y^{'}h(\overline{t}_i) - k_i\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{t}_i}\left(y^{'}H\mathcal{F}(t^*, \overline{t}_i)b\right) = y^{'}H\frac{\partial \mathcal{F}(t^*, \overline{t}_i)}{\partial \overline{t}_i}b = \\ &= -y^{'}H\mathcal{F}(t^*, \overline{t}_i)Ab = -y^{'}Hm(\overline{t}_i), \quad i \in P^0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial \underline{t}_i} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i, \quad i, j \in P_0; \qquad \frac{\partial r_j}{\partial \overline{t}_i} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i, \quad i, j \in P^0;$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(y^{'}h(\underline{t}_j) - k_{j-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(h^{'}(\underline{t}_j)y\right) = h_i(\underline{t}_j),\ \ i = \overline{1,m},\ \ j \in P_0;$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(y^{'}h(\overline{t}_j) - k_j\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(h^{'}(\overline{t}_j)y\right) = h_i(\overline{t}_j),\ \ i = \overline{1,m},\ \ j \in P^0$$

$$\left(\text{т.е.} \left(\frac{\partial q_j}{\partial y_i},\ i = \overline{1,m}\right) = h^{'}(\underline{t}_j),\ j \in P_0; \quad \left(\frac{\partial r_j}{\partial y_i},\ i = \overline{1,m}\right) = h^{'}(\overline{t}_j),\ j \in P^0\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{t}_i} = \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(\sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \int\limits_{\overline{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t)\,dt\right) = \sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \frac{\partial}{\partial \underline{t}_i}\left(\int\limits_{\overline{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t)\,dt\right) = k_{i-1}h(\underline{t}_i), \quad i \in P_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}\left(\sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \int\limits_{\bar{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t)\,dt\right) = \sum_{j=s^0}^{s^*} k_j \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}\left(\int\limits_{\bar{t}_j}^{\underline{t}_{j+1}} h(t)\,dt\right) = -k_i h(\bar{t}_i), \quad i \in P^0,$$

где $m(t) = \mathcal{F}(t^*, t)Ab$. Таким образом,

$$G_{11} = \operatorname{diag}\left(-y^{'} Hm(\underline{t}_i),\ i \in P_0\right); \quad G_{13} = \begin{bmatrix} h^{'}(\underline{t}_i) \\ i \in P_0 \end{bmatrix};$$

$$G_{22} = \operatorname{diag}\left(-y^{'} Hm(\bar{t}_i),\ i \in P^0\right); \quad G_{23} = \begin{bmatrix} h^{'}(\bar{t}_i) \\ i \in P^0 \end{bmatrix};$$

$$G_{31} = \left[\, k_{i-1} h(\underline{t}_i),\ i \in P_0 \,\right]; \quad G_{32} = \left[-k_i h(\bar{t}_i),\ i \in P^0 \,\right]$$

и матрица Якоби G равна

$$G = \left[\begin{array}{ccccc} \operatorname{diag}(-y^{'}Hm(\underline{t}_i),\, i \in P_0) & \vdots & 0 & \vdots & \begin{array}{c} h^{'}(\underline{t}_i), \\ i \in P_0 \end{array} \\ \hdashline 0 & \vdots & \operatorname{diag}(-y^{'}Hm(\bar{t}_i),\, i \in P^0) & \vdots & \begin{array}{c} h^{'}(\bar{t}_i), \\ i \in P^0 \end{array} \\ \hdashline k_{i-1}h(\underline{t}_i),\, i \in P_0 & \vdots & -k_i h(\bar{t}_i),\, i \in P^0 & \vdots & 0 \end{array}\right].$$

Пусть выполняются условия:

$$\operatorname{rank}\left(h(t),\ t \in T^0\right) = m, \tag{9.12}$$

где $T^0 = \left\{\underline{t}_i,\, i \in P_0;\, \bar{t}_i,\, i \in P^0\right\}$ — совокупность точек разрыва функции $\omega(t)$, $t \in T$, и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t)\right)\Big|_{t=\underline{t}_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(y^{'} h(t)\right)\Big|_{t=\underline{t}_i} \neq 0, \quad i \in P_0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t)\right)\Big|_{t=\bar{t}_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(y^{'} h(t)\right)\Big|_{t=\bar{t}_i} \neq 0, \quad i \in P^0. \tag{9.13}$$

Тогда $\det G \neq 0$, и система (9.11) имеет единственное решение.

Решать систему (9.11) (как и систему (5.13)) можно методом Ньютона.

Используя начальное приближение к определяющим элементам (9.7):

$$z^0 = \left(\underline{t}_i^0,\ i \in P_0;\ \ \bar{t}_i^0,\ i \in P^0;\ \ y^0\right),$$

которое поставляет опорная задача, следующие приближения найдем по формуле

$$z^k = z^{k-1} - G^{-1}(z^{k-1}) \begin{bmatrix} q_i\left(\underline{t}_i^{k-1};\ y^{k-1}\right),\ i \in P_0 \\ r_i\left(\bar{t}_i^{k-1};\ y^{k-1}\right),\ i \in P^0 \\ f\left(\underline{t}_i^{k-1},\, i \in P_0;\ \bar{t}_i^{k-1},\, i \in P^0\right) \end{bmatrix},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{9.14}$$

Вычисления по формуле (9.14) (в случае сходимости метода Ньютона) продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \left|q_i\left(\underline{t}_i^{k_0};\ y^{k_0}\right)\right| \le \varepsilon, \quad i \in P_0; \\ \left|r_i\left(\overline{t}_i^{k_0};\ y^{k_0}\right)\right| \le \varepsilon, \quad i \in P^0; \\ \left\|f\left(\underline{t}_i^{k_0},\, i \in P_0;\ \overline{t}_i^{k_0},\, i \in P^0\right)\right\| \le \varepsilon. \end{gathered} \tag{9.15}$$

Тогда для квазиуправления $\omega^{(k_0)}(t)$, $t \in T$, которое полностью определяется с помощью элементов $z^{k_0} = \left(\underline{t}_i^{k_0},\, i \in P_0;\ \overline{t}_i^{k_0},\, i \in P^0;\ y^{k_0}\right)$, с заданной точностью выполняется терминальное ограничение $H æ^{(k_0)}(t^*) = g$, а также с заданной точностью (по значению функции $\varphi(t)$, $t \in T$) найдены точки переключения $\underline{t}_i = \underline{t}_i^{k_0}$, $i \in P_0$; $\overline{t}_i = \overline{t}_i^{k_0}$, $i \in P^0$ (здесь $æ^{(k_0)}(t)$, $t \in T$ — траектория системы (7.2), соответствующая квазиуправлению $\omega^{(k_0)}(t)$, $t \in T$). Поэтому это квазиуправление можно принять в качестве оптимального управления задачи.

В противном случае, если через 3–5 итераций метода Ньютона не установился квадратичный закон уменьшения величин (9.15) или произошло изменение (нарушение) структуры (9.6), найденной в результате решения опорной задачи, приступаем к формированию и решению новой опорной задачи.

Новую опорную задачу можно формировать разными способами.

Можно, например, уменьшить параметр h, как и для линейно-квадратичной задачи (например, $h = h/2$) — так поступают всегда, когда нет уверенности в том, что структура оптимального управления выявлена. Тогда существенно увеличивается размер опорной задачи, но действия по формированию задачи будут единообразными (как и для предыдущей опорной задачи).

Можно поступить и по-другому (если структура оптимального управления выявлена) — разбить на меньшие (на два или, лучше, на три) только те отрезки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, для которых соответствующие компоненты оптимального плана $\tilde{u}^0 = \left(u_i^0,\ i = \overline{0, N-1}\right)$ предыдущей опорной задачи удовлетворяют неравенствам $-1 < u_i^0 < 0$ или $0 < u_i^0 < 1$, т. е. отрезки, которым принадлежат точки переключения $\underline{t}_i$, $i \in P_0$; $\overline{t}_i$, $i \in P^0$, квазиуправления $\omega(t)$, $t \in T$. В этом случае за счет экономии размеров опорной задачи можно в большей степени уточнить расположение точек переключения.

Начальный опорный план новой опорной задачи построим, используя новое опорное управление $\{\overline{u}, \overline{T}_{on}\}$, полученное в результате решения предыдущей опорной задачи.

Тема 10 Конечность метода

Известно, что в случае относительной управляемости динамической системы (7.2) (т. е. в случае существования хотя бы одного допустимого управления) в задаче (7.1)-(7.4) существует и оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$.

Задачу (7.1)-(7.4) назовем невырожденной, если:

1) существует такая опора T^0_{on}, что $\{u^0, T^0_{on}\}$ — невырожденное опорное управление (и тогда для $\{u^0, T^0_{on}\}$ выполняются соотношения (8.7));

2) множество

$$T^0 = \left\{t \in T\colon\ \Delta\left(t \,|\, T^0_{on}\right) = 0\right\}, \tag{10.1}$$

где $\Delta\left(t \,|\, T^0_{on}\right) = y'\left(T^0_{on}\right) h\left(t \,|\, T^0_{on}\right) - \operatorname{sign} u^0(t) = \varphi\left(t \,|\, T^0_{on}\right) - \operatorname{sign} u^0(t)$, состоит из конечного числа изолированных точек:

$$T^0 = \{t_j \in T,\ j = \overline{1,s}\colon\ t_j < t_{j+1},\ j = \overline{1,s-1}\}$$

(очевидно, множество T^0 (10.1) совпадает с множеством точек разрыва $\underline{t}_i$, $i \in P_0$; $\overline{t}_i$, $i \in P^0$; $s = |P_0| + |P^0|$, оптимального управления $u^0(t)$, $t \in T$, для которых, согласно (9.10), выполняются равенства:

$$\varphi\left(\underline{t}_i \,|\, T^0_{on}\right) - \operatorname{sign} u^0(\underline{t}_i) = \varphi\left(\underline{t}_i \,|\, T^0_{on}\right) - k_{i-1} = 0, \quad i \in P_0;$$

$$\varphi\left(\overline{t}_i \,|\, T^0_{on}\right) - \operatorname{sign} u^0(\overline{t}_i) = \varphi\left(\overline{t}_i \,|\, T^0_{on}\right) - k_i = 0, \quad i \in P^0\ );$$

3) $\dot{\Delta}\left(t_j \,|\, T^0_{on}\right) \neq 0$, $j = \overline{1,s}$, т. е. выполняются условия (9.13) (очевидно, что $T^0_{on} \subseteq T^0$).

Предположим, что исходная задача невырожденная.

Рассмотрим систему уравнений доводки (9.11). Из методов вычислений известно, что существует такая δ-окрестность точки $\overline{z}$ ($\overline{z}$ — решение системы (9.11)), что исходя из любой точки z^0 этой окрестности, метод Ньютона строит сходящуюся последовательность z^k, $k = 1, 2, \ldots$, приближений решения уравнений (9.11), причем

$$\left\|\overline{z} - z^k\right\| \leq (2\nu)^{2^k - 1}\eta/2^{k-1}, \tag{10.2}$$

где $\delta > 0$, $0 < \nu < 1/2$, $\eta > 0$ — фиксированные числа, зависящие только от элементов задачи (7.1)-(7.4).

Наряду с векторами $\overline{z}$; z^k, $k = 1, 2, \ldots$, рассмотрим векторы

$$\overline{v} = \left(\underline{t}_i,\ i \in P_0;\ \overline{t}_i,\ i \in P^0\right); \quad v^k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

состоящие только из точек переключения. В силу выполнения неравенств (10.2), для векторов $\overline{v}$; v^k, $k = 1, 2, \ldots$, справедливы такие же неравенства:

$$\left\|\overline{v} - v^k\right\| \leq (2\nu)^{2^k - 1}\eta/2^{k-1}. \tag{10.3}$$

Необходимые приближения для процедуры доводки строит опорная задача (9.8) за конечное число итераций. При этом достаточно конечное число раз обращаться к прямой (7.2) и сопряженной (3.6), (8.6) системам (к π-системе) для формирования элементов опорной задачи.

Пусть $\tilde{z} = (\tilde{v}, \tilde{y})$ — вектор определяющих элементов (9.7) в задаче (7.1)-(7.4) после решения опорной задачи (9.8). При достаточно малом $h > 0$ в случае невырожденности задачи (7.1)-(7.4) справедливо утверждение: $\tilde{v}$ состоит из изолированных точек $\tilde{t}_j$, $j = \overline{1, s}$, и $\|\overline{v} - \tilde{v}\| \sim h$. По элементам исходной задачи (7.1)-(7.4) найдем такое $h > 0$, что $\|\overline{v} - \tilde{v}\| \leq \delta$ (в силу определения вектора потенциалов (8.6), $h > 0$ можно выбрать так, что будет выполняться также и неравенство $\|\overline{z} - \tilde{z}\| \leq \delta$).

Согласно описанному выше алгоритму, после решения задачи (9.8) переходим к процедуре доводки, состоящей в решении методом Ньютона системы (9.11), исходя из начального приближения $z^0 = \tilde{z}$, $\|\overline{z} - \tilde{z}\| \leq \delta$. Тогда, в силу свойств метода Ньютона, справедливы оценки (10.3).

Поскольку $0 < \nu < 1/2$, то

$$\left\|\overline{v} - v^k\right\| \leq (2\nu)^{k-1}\eta/2^{k-1} = \eta\nu^{k-1}.$$

Оценим

$$\left\|v^{k+1} - v^k\right\| \leq \left\|\overline{v} - v^{k+1}\right\| + \left\|\overline{v} - v^k\right\| \leq \eta\nu^k + \eta\nu^{k-1} \leq 2\eta\nu^{k-1}.$$

Для осуществления одной итерации $z^k \to z^{k+1}$ метода Ньютона надо проинтегрировать π-систему на отрезках длины $\left\|v^k - v^{k-1}\right\|$ (можно так организовать вычисления).

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k = 1/(1-\nu) \leq 2,$$

то для осуществления всех (бесконечного числа) итераций метода Ньютона достаточно проинтегрировать π-систему на отрезке, длина которого не превосходит 4η.

Выше отмечалось, что для построения начального приближения $\tilde{z}$ требуется проинтегрировать π-систему конечное число раз на отрезках, длины которых не превосходят t^*. Следовательно, для построения оптимального управления $u^0(t)$, $t \in T$, методом, описанным в п.п. 9.1-9.3, достаточно проинтегрировать π-систему на отрезке конечной длины.

Таким образом, доказана

Теорема 10.1 (о конечности метода) *Метод, описанный в п.п. 9.1-9.3, конечен, т. е. с его помощью решение задачи (7.1)-(7.4) любой точности можно построить за конечное число интегрирований прямой и сопряженной систем.*

Литература

1 Данциг, Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – М. : Прогресс, 1966. – 600 с.

2 Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. Ч. 1. Общие задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн. : БГУ, 1977. – 176 с.

3 Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. Ч. 2. Транспортные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн. : БГУ, 1978. – 240 с.

4 Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. Ч. 3. Специальные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн. : БГУ, 1980. – 368 с.

5 Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации : в 5 ч. Ч. 1. Линейные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, А. И. Тятюшкин. – Мн. : БГУ, 1983. – 214 с.

6 Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации : в 5 ч. Ч. 2. Задачи управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн. : Университетское, 1984. – 207 с.

7 Конструктивные методы оптимизации : в 5 ч. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов [и др.]. – Мн. : Университетское, 1987. – 223 с.

8 Лубочкин, А. В. Алгоритмы решения одного класса задач кусочно-линейного программирования и их приложение к поиску решений системы линейных уравнений на ограниченном множестве / А. В. Лубочкин; БГУ. – Мн., 1985. – 35 с. – Деп. в ВИНИТИ 7.08.1985, № 5891-85Деп // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1986. – № 6. – С. 115.

9 Лубочкин, А. В. Метод первого порядка решения выпуклой квадратичной сепарабельной задачи / А. В. Лубочкин; БГУ. – Мн., 1986. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.10.1986, № 7258-В86 // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1987. – № 6. – С. 109.

10 Лубочкин, А. В. Метод первого порядка решения выпуклой кусочно-линейной сепарабельной задачи / А. В. Лубочкин // Вестник Белорусского ун-та. Серия 1. – 1987. – № 3. – С. 76–77.

11 Лубочкин, А. В. Алгоритм построения допустимого управления минимальной интенсивности / А. В. Лубочкин; БГУ. – Мн., 1987. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.09.1987, № 6598-В87 // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1988. – № 5. – С. 116.

12 Лубочкин, А. В. Методы решения выпуклых задач оптимального управления : дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. / А. В. Лубочкин; БГУ. – Мн., 1987. – 132 с.

13 Лубочкин, А. В. Оптимизация переходного процесса по минимуму энергии управления / А. В. Лубочкин // Вестник Белорусского ун-та. Серия 1. – 1988. – № 3. – С. 67–68.

14 Численные методы оптимизации : в 2 ч. Ч. 1. Линейные статические задачи : практикум / [М-во образ. РБ; Гомельск. гос. ун-т им. Ф.Скорины; авторы-составители А. В. Лубочкин, Е. А. Ружицкая]. – Гомель : ГГУ им. Ф.Скорины, 2001. – 50 с.

15 Численные методы оптимизации : в 2 ч. Ч. 2. Линейные задачи оптимального управления : практикум / [М-во образ. РБ; Гомельск. гос. ун-т им. Ф.Скорины; авторы-составители А. В. Лубочкин, Е. А. Ружицкая]. – Гомель : ГГУ им. Ф.Скорины, 2001. – 54 с.

16 Лубочкин, А. В. Оптимизация выпуклых статических моделей : тексты лекций по спецкурсу для студ. матем. и экономич. спец. вузов / А. В. Лубочкин; М-во образ. РБ; Гомельск. гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф.Скорины, 2005. – 74 с.

Учебное издание

ЛУБОЧКИН Александр Васильевич

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Тексты лекций по спецкурсу

для студентов специальности 1 – 31 03 03 02
«Прикладная математика»
(научно-педагогическая деятельность)
специализации 1 – 31 03 03 02 06
«Оптимизация и оптимальное управление»

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать 12.11.08. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс». Усл.печ.л. 3.25
Уч.-изд.л. 3.5. Тираж 100 экз. Заказ № 19

Отпечатано с оригинал-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г.Гомель, ул. Советская, 104.