6. Абсолютно непрерывные случайные величины

Плотность распределения вероятностей абсолютно непрерывной случайной величины ξ

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0,1], \\ cx^2, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Найти:

а) константу c;

б) функцию распределения случайной величины;

в) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение

а) по свойству плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1.$$

В нашем случае

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} cx^2dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx=c\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=c\cdot\frac{1}{3}=1,\ c=3;$$

б) функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Возможны следующие случаи:

1) $x<0,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$

2) $0\le x\le 1,\ F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} 3t^2dt=3\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^x=x^3;$

3) $x>1,\ F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1} 3t^2dt+\int_{1}^{x} 0dt=1.$

Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x^3, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

в) математическое ожидание случайной величины ξ

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot 3x^2dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx=3\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Дисперсия случайной величины ξ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)dx - (M\xi)^2 = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx - (M\xi)^2 =$$

$$= 3 \cdot \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - (M\xi)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0{,}19.$$