11. Критерий χ^2 - Пирсона

Для выборки X из задания 8, используя критерий согласия χ^2-Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что распределение наблюдаемой случайной величины ξ не противоречит равномерному закону с параметрами, найденными по выборке.

Решение

Выдвигаем основную гипотезу

$$H_0 : F(x) = F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Равномерный закон распределения имеет два параметра a и b. В качестве оценок параметров возьмем оценки, полученные в задании 9,

$$\hat{a} = -1{,}89\,,\ \hat{b} = 1{,}99\,.$$

Интервальный вариационный ряд выборки X (задание 8) имеет вид:

Интервал	$[-2{,}16; -1{,}36)$	$[-1{,}36; -0{,}56)$	$[-0{,}56; 0{,}24)$	$[0{,}24; 1{,}04)$	$[1{,}04; 1{,}84)$	$[1{,}84; 2{,}65]$
Частота	3	6	10	3	7	1

Пользуясь построенным рядом, разобьем числовую ось $k = 6$ непересекающихся интервалов:

$$(z_1; z_2) = (-\infty; -1{,}36)\,,\ [z_2; z_3) = [-1{,}36; -0{,}56)\,,\ [z_3; z_4) = [-0{,}56; 0{,}24)\,,$$
$$[z_4; z_5) = [0{,}24; 1{,}04)\,,\ [z_5; z_6) = [1{,}04; 1{,}84)\,,\ [z_6; z_7) = [1{,}84; +\infty)\,.$$

Статистика критерия $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mu_i - np_i)^2}{np_i}$ имеет χ^2-распределение с $(k - r - 1)$ степенями свободы,

где $r = 2$ – количество параметров, оценки которых получены по выборке,

$$p_i = P\{z_i \le \xi < z_{i+1}\} = F(z_{i+1}) - F(z_i)\,,$$

μ_i – число значений выборки, попавших в i-й интервал, $i = \overline{1,k}$.

Для вычисления статистики χ^2 составим таблицу 1.

Таблица 1

Интервал	Эмпирические частоты μ_i	Теоретические вероятности попадания в интервал $p_i^0 = F_0(z_{i+1}) - F_0(z_i)$	Теоретические частоты np_i^0	$\dfrac{(\mu_i - np_i^0)^2}{np_i^0}$
$(-\infty; -1{,}36)$	3	0,16667	5	0,8
$[-1{,}36; -0{,}56)$	6	0,16667	5	0,2
$[-0{,}56; 0{,}24)$	10	0,16667	5	5
$[0{,}24; 1{,}04)$	3	0,16667	5	0,8
$[1{,}04; 1{,}84)$	7	0,16667	5	0,8
$[1{,}84; +\infty)$	1	0,16667	5	3,2
	30	1,00		10,8

Наблюдаемое значение критерия

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(\mu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \approx 10{,}8.$$

По таблице процентных точек распределения χ^2 найдем значение $\chi^2_{0{,}05;3} = 7{,}815$, соответствующее $k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ степеням свободы и уровню значимости $\alpha = 0{,}05$.

Поскольку $\chi_0^2 > \chi^2_{0{,}05;\,3}$, то гипотеза H_0 не согласуется с эмпирическими данными.