Практическое занятие 4 **Теоремы о среднем. Правило Лопиталя**

4.1 Теорема Ролля
4.2 Теоремы Лагранжа и Коши
4.3 Правило Лопиталя

4.1 Теорема Ролля

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y = f(x)$ обладает тем или иным свойством.

Теорема 1 (Ролля) Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$: $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$; $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$; $f(a)=f(b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.

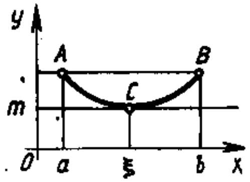

Рисунок 4.1 – Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x=\xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (рисунок 4.1).

Физический смысл теоремы Ролля. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В начальный момент $x=a$ точка имеет координату $f(a)$, далее движется определенным образом со скоростью $f'(x)$. В момент времени $x=b$ она возвращается в точку с координатой $f(a)$ (так как $f(a)=f(b)$). Ясно, что для возвращения в точку $f(a)$, она должна остановится в некоторый момент времени (прежде чем повернуть назад), т. е. в некоторый момент $x=\xi$ скорость $f'(\xi)=0$.

4.2 Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 2 (Лагранжа) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Теорема Лагранжа называется также *теоремой о конечных приращениях*, а приведенная формула – *формулой Лагранжа*. Часто используется следующая запись формулы Лагранжа:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi \in (a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$$

представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рисунок 4.2).

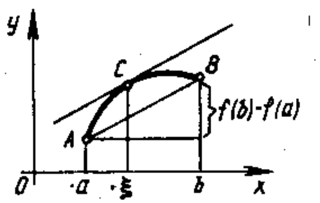

Рисунок 4.2 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Физический смысл теоремы Лагранжа. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В выражении

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

величина в левой части равенства является средней скоростью движения точки по прямой за промежуток времени от a до b. Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени $x=\xi$, в котором мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a;b]$.

Если в формуле Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, получим теорему Ролля, т. е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Положим в формуле Лагранжа $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$. Тогда она примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому ее называют *формулой конечных приращений*. Данная формула дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y\approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi=x_0+\theta\Delta x\in(a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема 3 (Коши) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям: непрерывны на отрезке $[a;b]$; дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$, такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если положить в формуле Коши $g(x)=x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ «перейдет» в формулу Лагранжа $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

4.3 Правило Лопиталя

Теорема 4 (Лопиталя) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, за исключением, быть может, точки x_0, причем $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (либо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$));

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Тогда существует также предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Смысл правила Лопиталя заключается в том, что оно позволяет свести вычисление предела отношения функций в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ к пределу отношения производных, который очень часто вычисляется проще. Правило Лопиталя справедливо также и в случае $x_0=\infty$.

Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ существует, применив дважды правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

Правило Лопиталя применяется к вычислению пределов в случаях неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а также для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$.

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Для этого необходимо представить выражение $u(x)^{v(x)}$, стоящее под знаком предела как $e^{\ln u(x)^{v(x)}}$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Ролля. В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Ролля.

2 Сформулируйте теорему Лагранжа. Почему формула Лагранжа называется формулой конечных приращений?

3 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Лагранжа?

4 Сформулируйте теорему Коши.

5 При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?

6 Справедливо ли правило Лопиталя в случае $x_0=\infty$?

7 Можно ли применять правило Лопиталя несколько раз?

Решение типовых примеров

1 Проверить, удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля функция:

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6\ ?$$

Решение. Преобразуем данную функцию к виду

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Отсюда $f(1)=f(2)=f(3)=0$. Поэтому теорема Ролля применима на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$. Поскольку данная функция представляет собой многочлен, то она определена и непрерывна на каждом из отрезков. Найдем производную:

$$f'(x)=3x^2-12x+11.$$

Очевидно, что для любых x функция $f'(x)$ дифференцируема на соответствующих интервалах. Таким образом, теорема Ролля справедлива на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$.

2 Доказать, что уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на интервале $(0;1)$.

Решение. Предположим, что уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 на данном интервале.

Рассмотрим функцию $f(x)=16x^4-64x+31$.

Тогда $f(x_1)=f(x_2)=0$. При этом данная функция определена, непрерывна (как элементарная) на $[x_1;x_2]$ и дифференцируема на $(x_1;x_2)$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $\xi\in(x_1;x_2)\subset(0;1)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

С другой стороны, $f'(x)=64x^3-64$. Отсюда уравнение $f'(\xi)=0$ имеет единственный корень в точке $\xi=1$, которая не принадлежит интервалу $(x_1;x_2)$. Получили противоречие. Значит, уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на $(0;1)$.

3 Доказать, что $|\cos x_1-\cos x_2|\le|x_1-x_2|$ $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$ на отрезке $[x_1;x_2]$.

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому по формуле Лагранжа

$$\cos x_1-\cos x_2=\sin\xi\cdot(x_1-x_2),$$

где $\xi\in(x_1;x_2)$.

Поскольку $|\sin\xi|\le1$, то $|\cos x_1-\cos x_2|\le|x_1-x_2|$.

4 Записав формулу Коши для функций $f(x)=2x^3+5x+1$ и $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$, найти значение ξ.

Решение. Данные функции определены и непрерывны на отрезке $[0;2]$, а также дифференцируемы на интервале $(0;2)$:

$$f'(x)=6x^2+5,\ g'(x)=2x$$

при этом $g'(x)\ne0$ $\forall x\in(0;2)$.

Тогда по теореме Коши существует такая точка $\xi\in(0;2)$, что имеет место формула Коши

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Подставляя, получим $\dfrac{13}{2}=\dfrac{6\xi^2+5}{2\xi}$.

Решая данное уравнение относительно ξ, находим

$$\xi_1=\frac{1}{2},\ \xi_2=\frac{5}{3}.$$

5 Используя правило Лопиталя, вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln5x}{\operatorname{ctg}x}$; ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin2x-2x}{3x^2-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; к) $\lim\limits_{x\to0+0}x^x$.

Решение. а) имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

б) имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin2x-2x}{3x^2-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin2x+2e^x\cos2x-2}{6x-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4e^x\cos2x-3e^x\sin2x}{6-6x}=\frac{e}{3}.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0+0}\sin x=-1\cdot 0=0.$$

д) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^0=1.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{заменим знаменатель дроби}\\ \text{эквивалентной бесконечно}\\ \text{малой функцией}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin 2x}{x^4}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{e^x}=0.$$

и) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+0}x=0.$$

к) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0+0}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}=e^0=1.$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_k\in\mathbf{R}\quad(k=0,1,\ldots,n),$$

вещественны, то производные $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, …, $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь действительные корни.

2 Найти точку ξ в формуле конечных приращений для функции

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(3-x^2\right) & \text{при } 0\le x\le 1,\\ \frac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

на отрезке $[0;2]$.

3 Используя формулу Лагранжа, доказать справедливость неравенств:

а) $|\operatorname{arctg}x_1-\operatorname{arctg}x_2|\le|x_1-x_2|$, $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$;

б) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ при $x > 0$.

4 Справедлива ли формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на $[-1;1]$.

5 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$;

б) $\lim\limits_{x\to} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{3}}{1-\cos 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 6}{x-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

л) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x - e^a\right)}$.

Задания для домашней работы

1 Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1;1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

2 Доказать, что уравнение $e^{x-1} + x - 2 = 0$, имеющее корень $x = 1$, не имеет других действительных корней.

3 Используя формулу Лагранжа, доказать справедливость неравенств:

а) $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;

б) $\ln(1+x) < x$ при $x > 0$.

4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin 2x - 2x}{3x^2 - x^3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \ln(1-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{6 + 7\ln\sin x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\sin x}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{e^{2x} - 1}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{ctg} x}}$;

л) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Практическое занятие 5 **Формула Тейлора**

5.1 Формула Тейлора
5.2 Формула Маклорена

5.1 Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ и n раз дифференцируема в точке x_0. Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$.

Теорема (формула Тейлора) Если функция $y=f(x)$ *определена и* $n+1$ *раз дифференцируема в окрестности* $U(\delta;x_0)$*, то при* $x\to x_0$ *имеет место формула Тейлора*

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *– остаточный член в форме Лагранжа,* $\xi\in U(\delta;x_0)$.

Если записать $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, то получим

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в формуле Тейлора также записывается в *форме Пеано*

$$R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right).$$

5.2 Формула Маклорена

Если в формуле Тейлора положить $x_0=0$, то получается *формула Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

Основные разложения элементарных функций по формуле Маклорена с остаточным членом в виде Лагранжа.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{k(k-1)\ldots(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{k-n-1}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

Формула Тейлора широко используется при вычислении пределов, в приближенных вычислениях, при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0? Каким свойством он обладает?

2 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом; а) в виде Лагранжа; б) в виде Пеано.

3 Какой вид имеет формула Маклорена?

4 Запишите основные разложения по формуле Маклорена элементарных функций.

Решение типовых примеров

1 Многочлен $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x+1)$.

Решение. Введем новую переменную $t = x+1$. Тогда
$$P(t) = 1 + 3(t-1) + 5(t-1)^2 - 2(t-1)^3 = 5 - 13t + 11t^2 - 2t^3.$$
Возвращаясь к переменной x, получим
$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3.$$

2 Представить функцию $y = \ln x$ многочленом n-й степени в окрестности точки $x_0 = 1$ и оценить погрешность.

Решение. <u>1 способ</u>. Находим последовательно $n+1$ производную для данной функции:

$f(x) = \ln x$, $\quad f(1) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad f'(1) = 1$,

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\quad f''(1) = -1$,

$f^{(3)}(x) = \dfrac{1\cdot 2}{x^3}$, $\quad f^{(3)}(x) = \dfrac{1\cdot 2}{1^3} = 2!$,

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\quad f^{(4)}(x) = -3!$,

……………………………………………,

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $\quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Тогда формула Тейлора для функции $y = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 1$ примет вид
$$\ln x = 0 + 1\cdot(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3!}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n + R_{n+1}(x),$$
где $R_{n+1}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, $\xi \in U(\delta;1)$.

Преобразуя полученное выражение, имеем
$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1^2)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x).$$
Многочлен Тейлора функции $y = \ln x$ имеет вид
$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1^2)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$
Погрешность вычислений составит
$$R_{n+1}(x) = (-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$
где $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $0 < \theta < 1$.

<u>2 способ</u>. Воспользуемся основным разложением в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln x$. Заменим в разложении x на $(x-1)$:
$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x),$$
где $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x-1))^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$.

3 Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = e^{-x^3}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся основным разложением в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$. Заменим в разложении x на $(-x^3)$
$$e^{-x^3} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!} + \frac{(-x^3)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^3},$$
где $0 < \theta < 1$.

4 Разложить по формуле Маклорена функцию
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$
Решение. Поскольку

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

В разложение 5 с остаточным членом в форме Пеано при $m=-1$ имеем

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

При замене переменной x на $(-x)$, получаем

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o((-x)^n),$$

а при замене x на $\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$$

Тогда

$$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(1+x+x^2+\ldots+x^n+o((-x)^n)\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+\ldots+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)-\frac{1}{3}o((-x)^n)-\frac{1}{6}o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)=$$

$=\left[\begin{array}{l}\text{по свойствам бесконечно}\\ \text{малых функций}\end{array}\right]=$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+\ldots+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)+o(x^n).$$

5 Вычислить число e с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Разложение функции $y=e^x$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Заменив функцию $y=e^x$ многочленом Тейлора степени n, получим приближенное равенство

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1\le x\le 1$, то

$$|R_{n+1}(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\le\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Полагая $x=1$, получаем приближенное значение числа e

$$e^1\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этой формулы для получения заданной точности, оценим величину остаточного члена

$$|R_{n+1}(x)|\le\varepsilon.$$

Имеем $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$. Отсюда $(n+1)!>3000$ или $n>6$.

Следовательно, при $n=6$ получим вычисленное значение числа e с заданной точностью

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2{,}718$$

Задания для аудиторной работы

1 Многочлен $P(x)=x^3-4x^2+5x-1$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x-2)$.

2 Представить многочленом 5-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность следующие функции

а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=\cos(2x-1)$.

3 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

а) $\sin 6^\circ$; б) $\ln 11$; в) $\sqrt[3]{9}$.

4 Разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$;

б) $f(x)=\sin^2 x$;

в) $f(x)=\ln(x^2-3x-4)$.

Задания для домашней работы

1 Многочлен $P(x)=x^2-3x+4$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x-1)$.

2 Представить многочленом 5-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность следующие функции

а) $f(x)=e^{x^2}$; б) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

3. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

а) $\cos 18^\circ$; б) $e^{0,2}$; в) $\sqrt[4]{90}$.

4 Разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

б) $f(x)=\cos^2 x$;

в) $f(x)=\ln\dfrac{x-4}{x+5}$.