Раздел 3 **Интегральное исчисление функции многих переменных**

Тема 1-2 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int\limits_{\Gamma} y dl$, где Г – отрезок прямой $y = x$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x^3}{y^2} dl$, где Г – дуга линии $xy = 1$ между точками $A(1;1)$ и $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl$, где Г – дуга линии $x = \ln y$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

г) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl$, где Г – дуга линии $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} \sin^4 x \cos x \, dl$, где Г – дуга линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где Г – верхняя половина кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$;

ж) $\int\limits_{\Gamma} x^2 y dl$, где Г – дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по данной линии в указанном направлении:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sin^3 x \, dx + \frac{dy}{y^2}$, где Г – дуга линии $y = \operatorname{ctg} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^3 - y^2\right) dx + xydy$, где Г – дуга линии $y = 2^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

7 Докажите непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

8 Докажите интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

9 Докажите дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

10 Сформулируйте и докажите свойства линейности и сдвига преобразования Фурье.

11 Сформулируйте и докажите преобразования Фурье от производной.

12 Сформулируйте и докажите дифференцирование преобразования Фурье.

13 Сформулируйте и докажите преобразование Фурье от свертки.

Вопросы и задачи на понимание

1 Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $\mathbb{R}$ и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ сходится. Являются ли равномерно сходящимися на любом конечном отрезке несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x-t) dt$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x-t) dt$?

2 Верно ли равенство $v.p.\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$, если $0 \in (a;b)$?

3 Для каких функций существует преобразование Фурье?

4 В чем особенность преобразования Фурье для четных и нечетных функций?

5 Верно ли равенство $x\delta' = -\delta$

Задания к практическим занятиям

Раздел 1 Теория рядов

Задания для практических занятий и примеры оформления решения по разделу приводятся в первой части комплекса.

Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Темы 2-3 Предел и непрерывность функции многих переменных

1 Являются ли окрестностями точки $A(1;1)$ множества:

а) $\left\{(x;y)\,\middle|\,0<x<1,\ 0<y\le 1\right\}$;

б) $\left\{(x;y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$;

в) $\left\{(x;y)\,\middle|\,0<x<2,\ -1<y<2\right\}$;

г) $\left\{(x;y)\,\middle|\,0<x<1,\ 0<y<1\right\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\left\{(x;y)\,\middle|\,|x|<1,\ |y|\le 1\right\}$;

б) $\left\{(x;y;z)\,\middle|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z<2\right\}$;

в) $\left\{(x;y;z)\,\middle|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$;

г) $\left\{(x;y)\,\middle|\,x+y<0\right\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbb{R}^2$, где

$$x_n=\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right);\frac{1}{n}\sin n\right).$$

4 Найти области определения следующих функций:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

б) $z=y\sqrt{\cos x}$;

д) $z=\sqrt{9-\left(x^2+y\right)^2}$;

е) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$;

$$L''_{xz}=y-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

$$L''_{yz}=x-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

то дифференциал второго порядка в точке $P\left(\sqrt{S/6},\sqrt{S/6},\sqrt{S/6}\right)$ имеет вид

$$d^2L=2\left(\sqrt{\frac{S}{6}}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\right)\left(dxdy+dxdz+dydz\right).$$

Главные миноры соответствующей матрицы квадратичной формы неотрицательны при $S>3$. Поэтому можно считать, что в найденных значениях x, y, z объем будет наибольшим.

Следовательно, прямоугольный параллелепипед с заданной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем

$$V_{\max}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}},$$

является кубом со стороной $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Откуда $\max\limits_D z = z(A) = 12$, $\min\limits_D z = z(M) = -1$.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой площадью поверхности найти тот, который имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда через x, y, z. И пусть V – объем параллелепипеда, S – его площадь. Тогда

$$V = xyz,$$
$$S = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z) = xyz$ при условии $2xy + 2yz + 2xz = S$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;z;\lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = yz + \lambda(2y + 2z),$$
$$L'_y = xz + \lambda(2x + 2z),$$
$$L'_z = xy + \lambda(2x + 2y),$$
$$L'_\lambda = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + 2xz = S \\ yz + \lambda(2y + 2z) = 0, \\ xz + \lambda(2x + 2z) = 0, \\ xy + \lambda(2x + 2y) = 0, \end{cases}$$

получаем $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $y = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $z = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $\lambda = -\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$, т. е. при $\lambda = -\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$ имеем единственную точку $P\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$ возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0,$$
$$L''_{xy} = z - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

в) $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$;

г) $z = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$;

ж) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 25}$;

и) $z = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}$.

5 Найти для функции $f(x;y) = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}$ значения $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

6 Выяснить, имеет ли предел при $x \to 0$, $y \to 0$ функция

$$f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\ ?$$

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}} \frac{(x-2)^2 - (y+3)^2}{(x-2)^2 + (y+3)^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$.

8 Показать, что для функции

$$f(x;y) = (2x + 3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = 0$.

9 Показать, что для функции

$$f(x;y) = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{x + y}$$

существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

10 Имеет ли предел при $x \to \infty$, $y \to \infty$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\ ?$$

11 Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$; г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sin xyz}$;

б) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$; д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$;

в) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$; е) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

Примеры оформления решения

1 Найти область определения функции:

а) $z=x^2+y^2$, в) $z=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}$,

б) $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$. г) $z=\ln\left(5-x^2-y^2-z^2\right)$.

Решение. а) область определения этой функции $D(f)=\mathbb{R}^2$, множество значений $E(f)=[0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\mathbb{R}^3$ является круговой параболоид (рисунок 1. 1);

б) областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4-x^2-2y^2}$, т. е. $4-x^2-2y^2\ge 0$.

Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$ (рисунок 1. 2):

$$D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\le 1\right\}.$$

Множество значений $E(f)=[0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида;

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix}12 & -6\\ -6 & 6\end{vmatrix}=36,\ z''_{xx}\big|_M=12>0,$$

то точка $M(1;1)$ является точкой локального минимума, $z_{\min}=-1$.

Исследуем функцию на границе области.

Уравнение прямой OA есть $x=0$ и, следовательно,

$$z=3y^2\ (0\le y\le 2).$$

Функция $z=3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает в точке $O(0;0)$ и $A(0;2)$.

Уравнение прямой AB есть $y=2$, и поэтому здесь функция

$$z=2x^2-12x+12\ (0\le x\le 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x. Так как $z'_x=6x^2-12$, то из уравнения $z'_x=0$ получим $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ находится только точка $x_1=\sqrt{2}$, которой соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$. Глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ имеем:

$$z=\frac{3}{4}x^4-x^3,\ (0\le x\le 2).$$

Так как $z'_x=3x^3-3x^2$, то из уравнения $x^2(x-1)=0$ находим точки возможного экстремума $x_1=0$, $x_2=1$, которым соответствуют точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т. е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $z(P)=z(1;1/2)=-\dfrac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $z(M)=z(1;1)=-1$.

Видно, что $d^2L\big|_{P_1} > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 2 > 0$, то функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_1 минимум. Следовательно, функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_1(4;3)$ имеет условный минимум, $z_{\min} = z(4;3) = -41$.

Аналогично, $d^2L\big|_{P_2} < 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2 < 0$; функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_2 максимум; функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_2(-4;-3)$ имеет условный максимум, $z_{\max} = z(-4;-3) = 59$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ на компакте D, ограниченном осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рисунок 1. 3).

Решение. Определим локальные экстремумы функции.
Для этого вычислим частные производные:

$$z'_x = 6x^2 - 6y,\ z'_y = -6x + 6y.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

получаем две точки возможного экстремума $O(0;0)$ и $M(1;1)$.

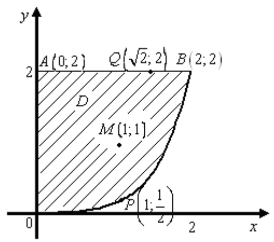

Рисунок 1. 3 – Область D типового примера 3

Внутренней точкой компакта D является только $M(1;1)$. Поскольку $z''_{xx} = 12x$, $z''_{yy} = 6$, $z''_{xy} = -6$ и

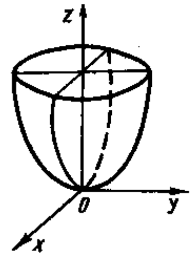

Рисунок 1. 1 – График функции $z = x^2 + y^2$

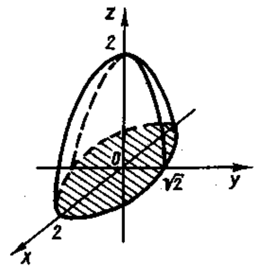

Рисунок 1. 2 – График функции $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$

в) функция определена, если $1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 \geq 0$ или $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$. Отсюда

$$D(f) = \left\{ (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1 \right\},$$

т. е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r = 1$ с центром в начале координат. Множество значений функции есть отрезок $[0;1]$:

$$E(f) = [0;1];$$

г) функция определена, если $5 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ или $x^2 - y^2 - z^2 < 5$. Отсюда областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$:

$$D(f) = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 < 5 \right\}.$$

Множество значений функции есть $E(f) = (-\infty; \ln 5]$.

2 Используя определение предела а) по Гейне; б) по Коши доказать $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = 0$.

Решение. а) область определения данной функции $D(f) = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \neq y \right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k) = ((x_k; y_k))$, таких, что $x_k \neq y_k$, $x_k \to 0$, $y_k \to 0$. Тогда

$$f\left(M_k\right)=\frac{x_k^3-y_k^3}{x_k-y_k}=x_k^2+x_k y_k+y_k^2 .$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=\lim_{k\to\infty}\left(x_k^2+x_k y_k+x_k^2\right)=0 ;$$

б) выберем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M\left(x;y\right)\in \overset{\circ}{U}\left(\delta;(0;0)\right)$ выполняется неравенство $\left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon$. Так как для любой точки $M(x;y)\in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2 ,$$

то

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|x^2+xy+y^2\right|\le x^2+y^2+\left|xy\right| .$$

Оценим $\left|x\cdot y\right|$:

$$\left(\left|x\right|-\left|y\right|\right)^2=x^2-2xy+y^2\le x^2+y^2\ge 0\;\Rightarrow\;\left|x\cdot y\right|\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Таким образом,

$$\left|f(x,y)-0\right|\le\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2(O,M)<\varepsilon .$$

Отсюда $\rho(O,M)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M\left(x;y\right)\in U\left(\delta,(0;0)\right)$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon .$$

По определению предела функции по Коши заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$$

3 Найти точки разрыва функций:

$$d^2L=2dx^2+2dy^2$$

является квадратичной формой от переменных dx, dy. В точке $P_0\left(0,5;0,5;-1\right)$ матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$ и $a_{11}=2>0$. Следовательно, в точке $P_0\left(0,5;0,5;-1\right)$ функция Лагранжа имеет локальный минимум. Тогда функция $z=x^2+y^2$ при условии $x+y-1=0$ имеет в точке $M_0\left(0,5;0,5\right)$ условный минимум.

2 Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$, если $x^2+y^2=25$.

Р е ш е н и е. Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;\lambda)=9-8x-6y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right).$$

Находим ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-8+2\lambda x ,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=-6+2\lambda y ,\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25 .$$

Решая систему

$$\begin{cases}-8+2\lambda x=0,\\ -6+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-25=0,\end{cases} .$$

получим

$$x_1=4 ,\ y_1=3 ,\ \lambda_1=1 ;$$
$$x_2=-4 ,\ y_2=-3 ,\ \lambda_2=-1 ,$$

т. е. точки $P_1\left(4;3;1\right)$. $P_2\left(-4;-3;-1\right)$ являются точками возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda ,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0 ,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda ,$$

то выражение для второго дифференциала есть

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right).$$

ясь принципом Ферма, вывести закон преломления светового луча (рисунок 6. 2). (Принцип Ферма: световой луч распространяется вдоль той линии, для прохождения которой требуется минимум времени.)

Примеры оформления решения

1 Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

Решение. <u>1 способ.</u> Для решения воспользуемся методом исключения переменных. Выражая из уравнения связи переменную y и подставляя ее в функцию, получим функцию одной переменной x:

$$z = 2x^2 - 2x + 1.$$

Исследуем ее на локальный экстремум:

$z' = 4x - 2$, $z'' = 4 > 0$,

$z' = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, точка $x = \dfrac{1}{2}$ есть точка локального минимума для функции $z = 2x^2 - 2x + 1$, а соответственно точка $P\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ есть точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

<u>2 способ.</u> Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x = 2x + \lambda,\; L'_y = 2y + \lambda,\; L'_\lambda = x + y - 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\lambda = -1$, т. е. точка $P_0(0{,}5; 0{,}5; -1)$ единственная точка возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как $L''_{xx} = 2$, $L''_{yy} = 2$, то дифференциал второго порядка

а) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$; б) $z = \dfrac{1}{x - y}$; в) $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

Решение. а) функция $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$ определена на $\mathbb{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции;

б) функция $z = \dfrac{1}{x - y}$ определена для любых x, y, таких, что $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции;

в) функция $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. Следовательно, сфера с центром в начале координат и радиусом $R = 3$ является поверхностью разрыва функции.

Тема 4 Частные производные

1 Найти частные производные функций:

а) $z = x^2 + y^3 - 3x^2y + 4x + 5y - 7$;

б) $z = 3^{x^2 y^4}$;

в) $z = \arccos\dfrac{x}{y}$;

г) $z = y\sin(3x - 4y)$;

д) $z = \dfrac{3x - y^5}{x^2 + 4y^3}$;

е) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x - y}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $M_0(3,2)$;

б) $u = \dfrac{y - z}{z - x}$, $M_0(2,1,3)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$;

б) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1{,}1;0{,}8)$.

5 Показать, что функция $z = y\sin\left(y e^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\mathrm{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; б) $1{,}98^{2{,}02}$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 = y^2$ в точке $M(1{,}1{,}3)$.

Примеры оформления решения

1 Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x$,

$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$.

Аналогично

$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$

$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2$,

$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84$.

Тогда

$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$

$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324$.

2 Найти частные производные функций

а) $z = x^2 + \sin\left(x + y^2\right)$;

б) $u = xy + \ln(x - y - z)$;

в) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение. а) частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$. Согласно критерию Сильвестра, $d^2 z$ является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_2 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = -1/4 < 0$, то $M_2(1, -1, 6)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = 6$.

Тема 10 Условный экстремум

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

г) $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$;

б) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$;

в) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

3 Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющей наибольший объем.

4 Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

5 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6 На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку наиболее удаленную от точки $P(0;0;3)$.

7 Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью $A_1 B_1$. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй – v_2. Пользу-

5 Найти локальные экстремумы функции $z = f(x,y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 .$$

Решение. Уравнение задает неявную функцию

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 ,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 2 практического занятия 3 и является дифференцируемой. Частные производные первого порядка имеют вид:

$$z'_x = \frac{x-1}{2-z}, \; z'_y = \frac{y+1}{2-z}$$

и дифференциал первого порядка –

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy .$$

Приравнивая к нулю частные производные первого порядка, получаем точки возможного экстремума $M_1(1,-1,-2)$, $M_2(1,-1,6)$.

Дифференцируя дважды исходное уравнение, получим:

$$dx^2 + dy^2 + z\,d^2z + dz^2 - 2d^2z = 0 .$$

Отсюда находим дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{1}{2-z}dx^2 + \frac{1}{2-z}dy^2 + \frac{1}{2-z}dz^2 ,$$

который представляет собой квадратичную форму от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 1/4 > 0$, то $M_1(1,-1,-2)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -2$.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_2 имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2);$$

б) частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x-y-z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x-y-z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x-y-z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x-y-z}, \; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x-y-z};$$

в) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x-1) - 2(y-1) - (z-3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0,$$

канонические уравнения нормали –

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1} \text{ или } \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

4 Доказать, что функция $z=xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y)\in\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=$$
$$=y^2\Delta x+2xy\Delta y+\left(2xy\Delta y+\Delta y^2\right)\Delta x+x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2=A$, $2xy=B$, $2xy\Delta y+\Delta y^2=\alpha$, $x\Delta y=\beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

5 Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

6 Найти полный дифференциал функции $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$$

$$=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz=$$

$$u''_{xx}=4,\ u''_{yy}=6y,\ u''_{zz}=2,\ u''_{xy}=-1,\ u''_{xz}=2,\ u''_{yz}=0.$$

Выражение для дифференциала второго порядка

$$d^2u=4dx^2+6ydy^2+2dz^2-2dxdy+2dxdz$$

есть квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1=4>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=15>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=14>0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11}=4>0$, то $M_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ является точкой локального минимума, $z_{\min}=-\dfrac{1}{27}$.

Матрица квадратичной формы d^2u в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1=4>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-13<0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=-14<0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u не является знакоопределенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке $M_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ функция не имеет локального экстремума.

Так как $\Delta(P_0)=AC-B^2=-\dfrac{2}{e^2}<0$, то по теореме 4 в точке $P_0(1;0)$ локального экстремума нет.

3 Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x=4x^3,\ z'_y=4y^3.$$

Решая систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x^3=0, \\ 4y^3=0, \end{array}\right\}$$

находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

Так как

$$A=z''_{xx}(P_0)=0,\ B=z''_{xy}(P_0)=0,\ C=z''_{yy}(P_0)=0,$$

то $\Delta(P_0)=AC-B^2=0$. Следовательно, по теореме 4 нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

Поскольку $\forall P(x,y)\in\dot{U}(\delta;P_0)$ имеет место

$$\Delta z(P)=z(x+\Delta x,y+\Delta y)-z(x,y)=$$

$$=(x+\Delta x)^4+(y+\Delta y)^4-(x^4+y^4)>0,$$

то точка возможного экстремума $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума. При этом $z_{\min}=z(0,0)=0$.

4 Найдите точки локального экстремума функции

$$u=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2.$$

Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные

$$u'_x=4x-y+2z,\ u'_y=-x-1+3y^2,\ u'_z=2x+2z.$$

Приравнивая их нулю и решая систему трех уравнений, получаем две точки возможного экстремума

$$M_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

Вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$=\frac{(x^2+y^2)dz-z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7 Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Решение. Пусть $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Тогда искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то получим:

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\approx$$

$$\approx\sqrt{4^2+3^2}+\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0{,}05+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0{,}07\approx 5+0{,}08=5{,}08.$$

Тема 5 Дифференцирование сложной и неявной функции

1 Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если

а) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

б) $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln(x^2-y^2)$, где $y=e^x$.

3 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln(u^2+v^2)$, где $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

4 Дана дифференцируемая функция $z=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2+y^2-2xy+4x-6y-3=0$, $M(-1;1)$;

б) $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, $M(3;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $xy-4x+6y-14=0$, $M(-1;2)$;

б) $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$, $M(1;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases}7x^2+y^2-3z^2+1=0,\\ 4x^2+2y^2-3z^2=0.\end{cases}$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$$

10 Найти dz, если $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=u\,v$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(x,y)=x\cdot\ln y$, где $x=3u-v$; $y=u^2+v^2$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=3,\ \frac{\partial y}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial x}{\partial v}=-1,\ \frac{\partial y}{\partial v}=2v,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\ln y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=3\ln y+2x\frac{x}{y}=3\ln\left(u^2+v^2\right)+2u\frac{3u-v}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=-\ln y+2v\frac{x}{y}=-\ln\left(u^2+v^2\right)+2y\frac{3u-v}{u^2+v^2}.$$

2 Найти полную производную сложной функции $f(x,y,z)=x\sin y\cos z$, где $y=\ln\left(x^2+1\right)$; $z=-\sqrt{1-x^2}$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A=z''_{xx}(P_0)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+4\right)\Big|_{(-2;1)}=\frac{1}{2e},$$

$$B=z''_{xy}(P_0)=ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)}=0,$$

$$C=z''_{yy}(P_0)=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)}=\frac{2}{e}.$$

Так как определитель

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\frac{1}{e^2}>0$$

и $A>0$, то согласно теореме 4 точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min}=z(-2,0)=-\dfrac{2}{e}$.

2 Исследовать на экстремум функцию $z=e^{-x}\left(x+y^2\right)$.

Р е ш е н и е. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x=e^{-x}\left(1-x-y^2\right),\ z'_y=2ye^{-x}.$$

Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}z'_x=0,\\ z'_y=0,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}1-x-y^2=0,\\ y=0.\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=1$ и $y_0=0$. Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

Частные производные второго порядка функции z в точке P_0 равны:

$$A=z''_{xx}(P_0)=e^{-x}\left(x+y^2-2\right)\Big|_{(1;0)}=-\frac{1}{e},$$

$$B=z''_{xy}(P_0)=-2ye^{-x}\Big|_{(1;0)}=0,$$

$$C=z''_{yy}(P_0)=2e^{-x}\Big|_{(1;0)}=\frac{2}{e}.$$

$$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$$
$$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2)\Big|_{P_0}=$$
$$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2.$$

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o\left(\rho^2\right),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z=x^2+xy+y^2-x-6y$; г) $z=x^3+3xy^2-51x-24y$;

б) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$; д) $z=e^{-x^2-y^2}\left(3x^2+y^2\right)$;

в) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$; $x>0$; $y>0$; е) $z=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u=x^2+y^2+z^2-12x+8y-6z+40$;

б) $u=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-8z+9=0.$$

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Исследовать на экстремум функцию $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

Р е ш е н и е. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+2\right),\quad z'_y=2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}z'_x&=0,\\ z'_y&=0,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x+y^2+2&=0,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=-2$, $y_0=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y\cos z,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y\cos z,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-x\sin y\sin z,$$
$$\frac{dx}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

получим:

$$\frac{df}{dx}=\sin y\cos z+x\cos y\cos z\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin y\sin z\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\sin\ln\left(x^2+1\right)\left(\cos\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2\sin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\frac{2x^2\cos\ln\left(x^2+1\right)\cos\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}.$$

3 Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую условию $f(1)=1$.

Р е ш е н и е. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Проверим выполнение условий теоремы существования неявной функции:

– $F(1,1)=0$;

– $F'_y(1,1)=\left(3y^2+2x\right)\Big|_{(1;1)}=5\neq 0$;

– частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, являющаяся решением уравнения $y^3+2xy+x^4-4=0$ и удовлетворяющая условию $f(1)=1$.

4 Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Р е ш е н и е. Обозначим через $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$. Имеем:

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

5 Найти частные производные неявной функции $z=f\left(x,y\right)$, заданной уравнением $e^{-xy}-2z+e^{z}=0$.

Решение. Обозначим $F\left(x,y,z\right)=e^{-xy}-2z+e^{z}$. Частные производные этой функции равны:

$$F'_x=-ye^{-xy},\ F'_y=-xe^{-xy},\ F'_z=-2+e^{z}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}.$$

6 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0\left(0,1,1\right)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или

$$2y+3z-5=0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-0}{0}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{6}$ или

$$\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7 Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases}u+v-x=0,\\ u-yv=0.\end{cases}$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=u+v-x,\\ F_1(x,y,u,v)=u-yv.\end{cases}$$

$$z'_y=\frac{-1}{x-y}+\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y},$$

то

$$dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда дифференциал второго порядка равен:

$$d^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy-$$
$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

4 Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=2^{xy}$.

*Решение***.** Для любой точки $P\left(x,y\right)\in U\left(\varepsilon;P_0\right)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+o(\rho^2).$$

С учетом $dx=x-1$, $dy=y-1$ имеем:

$f(P_0)=2$,

$$df\left(P_0\right)=f'_x\left(P_0\right)dx+f'_y\left(P_0\right)dy=$$
$$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot\left(x-1\right)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot\left(y-1\right)\right)\Big|_{P_0}=$$
$$=2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1),$$

$$d^2f\left(P_0\right)=f''_{xx}\left(P_0\right)dx^2+2f''_{xy}\left(P_0\right)dxdy+f''_{yy}\left(P_0\right)dy^2=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\mathbb{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Видно, что $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x\sin\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

2 Найти частные производные второго порядка функции
$$u = xyz - e^{x+y}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3 Найти dz и $d^2 z$, если $z = \ln(x - y) + \sqrt{xy}$.

Решение. Так как
$$z'_x = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

Якобиан системы имеет вид
$$J = \frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1,$$
при этом $J \neq 0$ при $y \neq -1$.

Дифференцированием равенств данной системы находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных:
$$\begin{cases} du + dv = dx, \\ u - ydv - vdy = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y \neq -1$, получим
$$du = \frac{ydx + vdy}{1+y},$$
$$dv = \frac{dx - vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем:
$$d^2 u = \frac{(dydx + dvdy)(1+y) - (ydx + vdy)dy}{(1+y)^2} =$$
$$= \frac{\left(dydx + \frac{dx - vdy}{1+y}dy\right)(1+y) - (ydx + vdy)dy}{(1+y)^2} =$$
$$= \frac{(1+y)dxdy + dxdy - vdy^2 - ydxdy - vdy^2}{(1+y)^2} = \frac{2\left(dxdy - vdy^2\right)}{(1+y)^2},$$
$$d^2 v = \frac{-dvdy(1+y) - (dx - vdy)dy}{(1+y)^2} =$$
$$= \frac{-\frac{dx - vdy}{1+y}dy(1+y) - (dx - vdy)dy}{(1+y)^2} = \frac{-dxdy + vdy^2 - dxdy + vdy^2}{(1+y)^2} =$$
$$= -\frac{2\left(dxdy - vdy^2\right)}{(1+y)^2} = -d^2 u.$$

8 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$.

Решение. Имеем

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\neq 0$$

при $u\neq 0$.

Дифференцированием равенств $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=cv$ находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv,$$
$$dy=\sin v\,du+u\cos v\,dv,$$
$$dz=c\,dv.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv=\frac{\cos v\,dy-\sin v\,dx}{u}.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{c}{u}(\cos v\,dy-\sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}.$$

9 Доказать, что функции $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J=\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_2.$$

В точке $(0,0)$ якобиан равен нулю $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(0;0)}=0$. Для любой точки (x_1,x_2), где $x_1\neq x_2$, из окрестности точки $(0,0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(x_1,x_2)}\neq 0$. Следовательно, функции

y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $(0,0)$.

Тема 6-7 Частные производные и дифференциалы высших порядков, формула Тейлора

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z=xy+\frac{x}{y}$;

б) $z=y^x$;

в) $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$;

г) $z=xe^{-xy}$;

д) $z=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

е) $u=\ln(x+y+z)$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=x^3y+xy^2-2x+3y-1$ в точке $M(3;2)$.

3 Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\cos\frac{y}{x}\arccos\frac{x}{y}$.

4 Найти дифференциал второго порядка функции:

а) $z=x^3y^3$; б) $z=e^{xy}$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z=x^4-y^4+x^2y^2$; б) $z=\sin(x+\cos y)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y-4.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y)=\frac{x}{y}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x,y)=\sin(x^2+y^2).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка: