Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, называется *равномерно-непрерывной* на множестве G, $G\in\mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любых двух точек $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ и $x''=(x_1'';x_2'';...;x_n'')$ множества G, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x',x''\in G\ \ \rho(x',x'')<\delta\quad \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве.

Построим отрицание: функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, *не является равномерно-непрерывной* на множестве G, если $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall\delta>0$ существуют элементы $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ и $x''=(x_1'';x_2'';...;x_n'')$ множества G такие, что $\rho(x',x'')<\delta$, но $\left|f(x')-f(x'')\right|\geq\varepsilon$.

3.4 Теорема Кантора

Теорема 2 (Кантора) Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, непрерывная на компакте G, $G\in\mathbb{R}^n$, равномерно-непрерывна на этом компакте.

Колебанием $\omega(f;G)$ функции $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in G$, называется верхняя грань всевозможных разностей значений функции f:

$$\omega(f;G)=\sup_{x;x'\in G}\left|f(x')-f(x)\right|,\ x'=(x_1';x_2';...;x_n')\in G.$$

Диаметром множества G называется верхняя грань расстояний между точками множества $G\in\mathbb{R}^n$.

Обозначается: $\operatorname{diam}G=\sup\limits_{x;x'\in G}\rho(x';x)$ или $\mathrm{d}(G)=\sup\limits_{x;x'\in G}\rho(x';x)$.

Равномерная непрерывность функции $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, на множестве $G\in\mathbb{R}^n$ означает, что колебание функции на любом множестве достаточного малого диаметра сколь угодно мало.

Содержание

функции $f(x)$.

В частности, для функции $f(x,y)$ точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва, а для функции $f(x,y,z)$ точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства непрерывных функций одной переменной.

Тема 3 Функции многих переменных, непрерывные на множествах

3.1 Непрерывность функции на компактах
3.2 Теорема Вейерштрасса
3.3 Равномерная непрерывность функций
3.4 Теорема Кантора

3.1 Непрерывность функции на компактах

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, определена на множестве $G\subset\mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве G, если в каждой точке этого множества она непрерывна:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\quad \forall\, x_0\in G.$$

3.2 Теорема Вейерштрасса

Теорема 1 (Вейерштрасса) Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, *непрерывная на компакте* $G\in\mathbb{R}^n$ *ограничена и принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения:*

$$M=\sup_{x\in G} f(x),\ m=\inf_{x\in G} f(x).$$

Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними. Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.

3.3 Равномерная непрерывность функций

2.3 Повторные пределы

Пусть функция $f(x,y)$ задана в окрестности точки (x_0,y_0) за исключением, быть может, самой точки (x_0,y_0). И пусть для каждого фиксированного y из этой окрестности при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$, а при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует *повторный предел* b для функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=b.$$

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1 Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и имеет в этой точке двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b$. И пусть для любого фиксированного x из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x_{\text{фик}}}} f(x;y)=h(x)$ и для любого фиксированного y из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$. Тогда повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ существуют и равны:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y).$$

2.4 Непрерывность функции многих переменных

Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, определенная в окрестности $U(\delta,x_0)$ точки $x_0=(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва*

Введение

Данное издание является второй частью учебно-методического комплекса «Математический анализ» для физических специальностей. Здесь излагается материал по темам: непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных, криволинейные, кратные и поверхностные интегралы; векторный анализ; интегралы, зависящие от параметра, которые являются составляющими учебной программы излагаемой дисциплины второго семестра.

Структура учебно-методического комплекса аналогична первой части:

– примерный тематический план;

– краткий лекционный курс;

– вопросы для самоконтроля;

– примерные задания к практическим занятиям с решениями типовых примеров;

– примерные задания контрольных работ и тестовые задания для рубежного контроля,

– примерный перечень вопросов и задач к экзамену;

– учебно-методический материал для проведения деловых игр.

Учебно-методический комплекс предназначен для организации учебного процесса по курсу «Математический анализ» на физическом факультете университета. Изложенные вопросы разделов математического анализа могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки по данному предмету.

Учебная программа курса «Математический анализ»

Раздел 1 Теория рядов (продолжение)

Тема 4 Функциональные ряды

Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Геометрический смысл поточечной сходимости функциональных последовательностей. Геометрический смысл равномерной сходимости функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей. Функциональные ряды. Поточечная сходимость функциональных рядов. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Признаки Дирихле и Абеля. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Тема 5 Степенные ряды

Определение степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара. Интервал сходимости. Область сходимости. Свойства сходящихся степенных рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость степенных рядов.

Тема 6 Ряд Тейлора

Определения ряда Тейлора. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Приложения степенных рядов. Использование ряда Тейлора для вычисления пределов, для вычисления приближенных значений функции, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Тема 1 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение n-мерного пространства. n-мерное арифметическое точечное пространство. Метрика. Свойства метрики. Метрическое пространство. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве. Полнота пространства. Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые шары. Открытые и замкнутые параллелепипеды. Окрестности Замкнутые множества. Открытое множество. Предельная точка. Изолированная точка. Ограниченное множество пространства $\mathbb{R}^n$. Связное множество. Компакт. Теорема Больцано- Вейерштрасса.

где $M\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ точки пространства $\mathbb{R}^n$.

Аналогично функции одной переменной, определение предела по Гейне функции многих переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела по Коши.

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $f(x)$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любой точки $x\in \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$ выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Если функция двух переменных $f(x;y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon;(x_0,y_0))$ и число A является пределом при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, то предел

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$$

называется *двойным пределом*.

<u>Геометрически</u> неравенство $\left|f(x;y)-A\right|<\varepsilon$ означает, что точки графика функции $f(x,y)$ для $(x;y)\in \overset{\circ}{U}\left(\delta,(x_0;y_0)\right)$ находятся между двумя плоскостями $z=A-\varepsilon$ и $z=A+\varepsilon$, т. е. предел функции $f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $(x_0;y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций одной переменной (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Бесконечные пределы для функций многих переменных $f(x)$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной.

Например,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)\quad f(x)>\varepsilon .$$

которое есть некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции многих переменных задаются:

– явно уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной:

$$z = f(x, y),\ u = f(x, y, z),\ u = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

– неявно уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной:

$$F(x; y) = 0),\ F(x; y; z) = 0,\ F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0.$$

Множество точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, называется *множеством уровня* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим данному значению c.

При $n = 2$ множество уровня называется *линией уровня*; при $n = 3$ множество уровня называется *поверхностью уровня*; при $n > 3$ множество уровня называется *гиперповерхностью уровня*.

2.2 Определение предела функции многих переменных

Число A называется *пределом* (по Гейне) функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любой последовательности точек (x_m), $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, $m = \overline{1, \infty}$, $x_m \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_m))$ значений функции сходится к A:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_m)_{m=1}^{\infty},\ x_m \in U(\varepsilon, x_0),\ \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \lim_{k\to\infty} f(x_m) = f(x_0).$$

Предел функции также обозначается:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } A = \lim_{M \to M_0} f(M),$$

Тема 2 Предел функции многих переменных

Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня. Определение предела функции многих переменных. Свойства предела. Двойной предел. Повторные пределы. Теорема о существовании повторных пределов. Непрерывность функции многих переменных. Непрерывность сложной функции. Свойства непрерывных функций многих переменных.

Тема 3 Функции многих переменных, непрерывные на множествах

Непрерывность функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Функции, непрерывные на линейно связных множествах. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора. Колебание функции. Диаметр множества.

Тема 4 Частные производные

Частные и полные приращения функции многих переменных. Частные производные. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

Тема 5 Дифференцирование сложной функции

Полный дифференциал функции многих переменных. Частные дифференциалы. Геометрический смысл полного дифференциала. Дифференцирование сложной функции. Полная производная. Инвариантность формы первого дифференциала функции многих переменных.

Тема 6 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных. Символические формулы для вычисления дифференциалов высших порядков для функции двух переменных. Полный дифференциал функции многих переменных.

Тема 7 Формула Тейлора для функции многих переменных

Формула Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в виде Лагранжа. Формула Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в виде Пеано. Формула Маклорена для функции двух переменных. Примеры разложения функции двух переменных по формуле Тейлора и Маклорена.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

Понятие экстремума функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Некоторые сведения о квадратичных формах. Положительно определенная и отрицательно определенная квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Достаточные условия локального экстремума функции многих переменных. Исследование на локальный экстремум функций.

Тема 9 Дифференцирование неявной функции

Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением. Неявные функции, задаваемые системой уравнений. Матрица Якоби и якобиан системы функций. Зависимость функций. Достаточное условие независимости.

Тема 10 Условный экстремум

Понятие условного экстремума. Уравнения связи. Методы отыскания условного экстремума. Метод исключения части переменных. Метод множителей Лагранжа. Правило нахождения точек условного экстремума. Глобальный экстремум функции многих переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 1 Криволинейные интегралы 1-го рода

Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода. Задача о массе материальной линии. Задача о площади цилиндрической поверхности. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

Тема 2 Криволинейные интегралы 2-го рода

Задача о работе переменной силы. Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру. Вычисление криволинейного интеграла 2-го ро. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода.

Тема 3 Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$

Клетки и клеточные множества в $\mathbb{R}^n$. Определение клетки Мера клетки Свойства клеток. Клеточное множество. Свойства клеточных множеств. Множества измеримые по Жордану. Жорданова

$x_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Множество G называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству. Открытое связное множество называется *областью*, объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*.

Тема 2 Предел функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных
2.2 Определение предела функции многих переменных
2.3 Повторные пределы
2.4 Непрерывность функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных

Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$. Если правило f каждой точке $x=(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, то говорят, что на множестве G задана *числовая функция* (или *отображение*) f *от* n *переменных*:

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$$

Множество G называется *областью определения* и обозначается $D(f)=G$; множество $E=\left\{\, u\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, u=f(x),\ x\in G \,\right\}$ – *множеством значений функции* f.

В частном случае при $n=2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\mathbb{R}^2$. Частное значение функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначается $f(x_0,y_0)$, $f(M_0)$, $f\big|_{(x_0;y_0)}$ и $f\big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z=f(x,y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma=\left\{\ (x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \ \middle|\ z=f(x,y)\right\},$$

$$U(\varepsilon, x_0) = \{\ x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon\ \}.$$

Данное множество называется n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

Проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ с радиусом ε называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$:

$$\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid\ 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Пусть G – некоторое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Точка называется *внутренней точкой* множества G, если существует ее окрестность, целиком принадлежащая этому множеству. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние. Любое открытое множество, содержащее точку $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, является ее окрестностью. Точка называется *граничной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется *границей* множества G и обозначается ∂G. Граничная точка может, как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему. Точка называется *предельной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества G. Точка, не являющаяся предельной точкой множества G, называется *изолированной*.

1.4 Компакт

Множество G называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G и обозначается $\overline{G}$. Множество G называется *ограниченным*, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G. Множество G называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Множество

$$\Gamma = \{\ (x_1; x_2; \ldots; x_n) \mid x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t); \alpha \le t \le \beta\ \},$$

называется *непрерывной кривой*, соединяющей точки $P_1(x_1(\alpha); x_2(\alpha); \ldots; x_n(\alpha))$ и $P_2(x_1(\beta); x_2(\beta); \ldots; x_n(\beta))$. Здесь

мера нуль Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$. Разбиение измеримых множеств. Свойства разбиений.

Тема 4 Определение и свойства двойного интеграла

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Задача о массе неоднородной пластины. Задача об объеме цилиндроида. Интегральная сумма Римана. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. Определение двойного интеграла. Необходимое условие интегрируемости. Достаточное условие интегрируемости. Критерий интегрируемости Дарбу. Основные свойства двойного интеграла.

Тема 5 Сведение двойного интеграла к повторному

Формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику. Доказательство формулы сведения двойного интеграла к повторному интегралу по прямоугольнику. Примеры вычисления двойных интегралов по прямоугольнику. Сведение повторного интеграла по элементарной области. Доказательство формулы сведения повторного интеграла по элементарной области. Примеры вычисления двойных интегралов по элементарной области.

Тема 6 Замена переменных в двойном интеграле

Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Якобиан отображения. Геометрический смысл знака якобиана. Криволинейные координаты. Переход к полярным координатам. Примеры вычисления двойных интегралов посредством замены переменных.

Тема 7 Формула Грина

Связь двойных и криволинейных интегралов 2-го рода по замкнутому контуру. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Примеры вычисления криволинейных интегралов 2-го рода с помощью формулы Грина.

Тема 8 Приложения двойного интеграла

Геометрические приложения двойного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление площади поверхности. Вычисление объема тела. Физические приложения двойного интеграла. Вычисление массы материальной фигуры. Вычисление статистических моментов. Вычисление координат центра масс. Вычисление моментов инерции.

Тема 9 Определение и свойства тройного интеграла

Задача о массе пространственного тела. Интегральная сумма Римана. Определение тройного интеграла. Свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному интегралу. Примеры вычисления тройных интегралов по параллелепипеду и по элементарной области.

Тема 10 Замена переменных в тройном интеграле

Формула замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические координаты. Примеры вычисления тройных путем перехода к цилиндрическим координатам. Сферические координаты. Примеры вычисления тройных интегралов путем перехода к сферическим координатам. Приложения тройного интеграла.

Тема 11 Элементы теории поверхностей

Понятие поверхности. Способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Длина кривых на поверхности. Площадь поверхности. Вторая квадратичная форма. Ориентация поверхности.

Тема 12 Поверхностный интеграл 1-го рода

Задача о массе изогнутой пластины. Определение поверхностного интеграла 1-го рода. Свойства поверхностного интеграла 1-го рода. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода. Примеры вычисления поверхностных интегралов 1-го рода. Приложения поверхностного интеграла 1-го рода.

Тема 13 Поверхностный интеграл 2-го рода

Задача о потоке жидкости. Определение поверхностного интеграла 2-го рода. Свойства поверхностного интеграла 2-го рода. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода. Примеры вычисления поверхностных интегралов 2-го рода. Связь поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода.

Тема 14 Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса

Связь между поверхностными и тройными интегралами. Формула Остроградского Гаусса. Примеры вычисления поверхностных интегралов сведением к тройным интегралам. Связь между поверхностными и криволинейными интегралами. Формула Стокса. Примеры вычисления криволинейных интегралов сведением к поверхностным.

Тема 15 Скалярные поля

Понятие о задачах векторного анализа и теории поля. Определение скалярного поля. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Производная по направлению Градиент скалярного поля.

Тема 16 Векторные поля

Определение векторного поля. Векторные линии. Поток векторного поля. Физический смысл потока. Дивергенция векторного поля. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса.

при $n=3$ имеем пространство $\mathbb{R}^3$ с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{\left(x_1-x_1^{'}\right)^2+\left(x_2-x_2^{'}\right)^2+\left(x_3-x_3^{'}\right)^2}\ .$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называется *метрическим (евклидовым) пространством* $\mathbb{R}^n$.

1.2 Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве

Пусть (x_m), $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$, – последовательность точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что последовательность точек (x_m) *сходится* к точке a, $a=(a_1;a_2;...;a_n)$ (имеет *предел* a), если $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m;a)=0$:

$$\lim_{m\to\infty}x_m=a\,.$$

Для того чтобы последовательность точек (x_m), $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$, сходилась к пределу $a=(a_1;a_2;...;a_n)\in\ \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\lim_{m\to\infty}x_1^m=a_1,\ \lim_{m\to\infty}x_2^m=a_2\ ,\ ...,\ \lim_{m\to\infty}x_n^m=a_n\,.$$

Для последовательностей пространства $\mathbb{R}^n$ имеют место аналогичные определения и свойства как и для последовательностей пространства $\mathbb{R}^1$.

Если последовательность точек (x_m) метрического пространства $\mathbb{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

1.3 Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$

Множество точек $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in\ \mathbb{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n'^0\right)$ меньше положительного числа r, называется *ε-окрестностью* точки $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$:

Краткий лекционный курс

Раздел 1 Теория рядов

Материал лекций изложен в части 1 учебно-методического комплекса «Функции действительной переменной. Ряды»

***Раздел 2* Дифференциальное исчисление функции многих переменных**

***Тема 1 Пространство* $\mathbb{R}^n$**

1.1 Определение n-мерного пространства

1.2 Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве

1.3 Основные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$

1.4 Компакт

1.1 Определение n-мерного пространства

n*-мерным арифметическим точечным пространством* называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1;x_2;...;x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\mathbb{R}^n$; его элементы – *точками* пространства $\mathbb{R}^n$; числа x_1, x_2, ..., x_n – *координатами* точки ($x_1;x_2;...;x_n$).

Точки пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаются $M(x_1;x_2;...;x_n)$ или $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется *началом координат*.

Расстоянием (*метрикой*) $\rho(x,x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ называется число

$$\rho(x;x')=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2}\ .$$

При $n=1$ имеем пространство $\mathbb{R}^1$ (прямая) с расстоянием:

$$\rho(x,x')=\left|x_1-x_1'\right|;$$

при $n=2$ имеем пространство $\mathbb{R}^2$ (плоскость) с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}\ ;$$

Тема 17 Специальные виды векторных полей

Потенциальное векторное поле. Свойства потенциальных полей. Соленоидальное векторное поле. Свойства соленоидальных полей Гармоническое поле. Операторы Гамильтона и его свойства. Оператор Лапласа и его свойства.

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение собственного интеграла, зависящего от параметра. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра. Предельный переход под знаком интеграла. Дифференцирование по параметру собственных интегралов, зависящих от параметра. Правило Лейбница. Интегрирование по параметру собственных интегралов, зависящих от параметра.

Тема 2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Несобственного интеграла, зависящего от параметра. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрируемость по параметру несобственного интеграла, зависящего от параметра. Дифференцируемость по параметру несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Тема 3 Интегралы Эйлера

Определение гамма функции. Свойства гамма функции. Формула понижения. Формула дополнения. Формулы Стирлинга. Определение бета функции. Свойства бета функции. Связь гамма и бета функций. Применение свойств интегралов, зависящих от параметра, к вычислению интегралов.

Тема 4 Интеграл Фурье

Представление функций интегралом Фурье. Главное значение интеграла. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Формула обращение. Синус и косинус преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье от производной. Дифференцирование преобразования Фурье. Свертка функций. Свойства свертки.

Тема 5 Обобщенные функции

Определение функции Дирака. Носитель функции. Финитные функции. Пространство основных функций. Обобщенные функции. Пространство обобщенных функций. Операции над обобщенными функциями. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Производная обобщенной функции. Операция сдвига аргумента для обобщенной функции.

Тематический план

Учебный процесс по курсу осуществляется в виде лекций, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, самостоятельной учебной работы студентов. Итоговой формой контроля знаний является зачет и экзамен. Распределение часов по разделам и темам во 2-ом семестре представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Примерное распределение часов по разделам и темам курса

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Всего часов	Количество аудиторных часов		
			лекции	практические (семинарские) занятия	лабораторные занятия
1	2	3	4	5	6
1	**Раздел 1 Теория рядов**	**14**			
1.4	Функциональные ряды	4	2	2	–
1.5	Степенные ряды	4	2	2	–
1.6	Ряд Тейлора	6	2	4	–
2	**Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных**	**38**			
2.1	Пространство $\mathbb{R}^n$	2	2	–	–
2.2	Предел функции многих переменных	4	2	2	–
2.3	Функции многих переменных, непрерывные на множествах	2	2	–	–
2.4	Частные производные	4	2	2	–
2.5	Дифференцирование сложной функции	4	2	2	–
2.6	Частные производные и дифференциалы высших порядков	4	2	2	–
2.7	Формула Тейлора для функции многих переменных	4	2	2	–
2.8	Экстремум функции многих переменных	4	2	2	–
2.9	Дифференцирование неявной функции	4	2	2	–
2.10	Условный экстремум	6	2	4	–
3	**Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных**	**86**			
3.1	Криволинейные интегралы 1-го рода	4	2	2	–
3.2	Криволинейные интегралы 2-го рода	4	2	2	–
3.3	Мера Жордана в пространстве $\mathbb{R}^n$	2	2	–	–
3.4	Определение и свойства двойного интеграла	4	2	2	–
3.5	Сведение двойного интеграла к повторному	4	2	2	–
3.6	Замена переменных в двойном интеграле	4	2	2	–
3.7	Формула Грина	4	2	2	–
3.8	Приложения двойного интеграла	4	2	2	–
3.9	Определение и свойства тройного интеграла	4	2	2	–
3.10	Замена переменных в тройном интеграле	4	2	2	–
3.11	Элементы теории поверхностей	4	2	2	–
3.12	Поверхностный интеграл 1-го рода	4	2	2	–
3.13	Поверхностный интеграл 2-го рода	4	2	2	–
3.14	Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса	4	2	2	–
3.15	Скалярные поля	4	2	2	–
3.16	Векторные поля	4	2	2	–
3.17	Специальные виды векторных полей	4	2	2	–
4	**Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра**	**20**			
4.1	Собственные интегралы, зависящие от параметра	4	2	2	–
4.2	Несобственные интегралы, зависящие от параметра	4	2	2	–
4.3	Интегралы Эйлера	4	2	2	–
4.4	Интеграл Фурье	4	2	2	–
4.5	Обобщенные функции	2	2	–	–
	Всего часов за 2-й семестр	**138**	**70**	**68**	