$$y(-0{,}02)\approx y(0)+y'(0)\cdot(-0{,}02)=1-0{,}01=0{,}99\,.$$

**5** Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\cos x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

*Решение*. Имеем:

$$x_0=\frac{\pi}{6},\qquad y(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad y'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\,.$$

Поэтому искомое уравнение касательной запишется так

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

а уравнение нормали примет вид:

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

**6** Вычислить и сравнить на промежутке $0\le t\le 1$ мгновенные скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями $S_1=t^2$, $S_2=2t^4$ $(t\ge 0)$.

*Решение*. Находим мгновенные скорости точек в момент времени $t$:

$$V_1(t)=S_1{}'(t)=2t\,,$$
$$V_2(t)=S_2{}'(t)=8t^3\,.$$

Отсюда получаем: $V_1(0)=V_2(0)=0$.

Видно, что $\forall t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ выполняется неравенство $V_1(t)>V_2(t)$, и $\forall t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ – неравенство $V_1(t)<V_2(t)$.

Следовательно, в точке $t=\dfrac{1}{2}$ имеем $V_1\!\left(\dfrac{1}{2}\right)=V_2\!\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**7** Используя правила дифференцирования и таблицу производных, вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, б) $y=\dfrac{3x-2}{4x+5}$, в) $y=x\cos x-x^2\sin x$.

*Решение*. а) перепишем функцию в виде:

$$y=3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{2}{3}}\,.$$



Пример оформления решения

**1** Найдите пересечение, объединение, разность множеств $A=\left\{\dfrac{1}{5^n}\middle|\ n\in\square\right\}$ и $B=\left\{\dfrac{1}{25^n},\middle|\ n\in\square\right\}$.

*Решение*. Поскольку

$$A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\dots\right\}\text{ и }B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};\frac{1}{15625};\dots\right\},$$

то

$$A\cap B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};\dots\right\}=B\,,\ A\cup B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\dots\right\}=A\,,$$

$$A\setminus B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{125};\dots\right\}=\left\{\frac{1}{5^{2k-1}}\middle|\ k\in\mathbf{N}\right\},\ B\setminus A=\varnothing.$$

**2** Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

*Решение***.** Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\dfrac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число $m^2$ есть четное число. Отсюда и $m$ есть четное число. Если $m$ – четное, то оно представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, $n^2$ есть четное число, тогда и $n$ – четное. Таким образом, числа $m$ и $n$ являются четными. Поэтому дробь $\dfrac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\dots$.

**3** Доказать, что $0{,}4(9)=0{,}5(0)$.

*Решение*. Пусть $x=0{,}4(9)$.

Тогда $100x-10x=49,(9)-4(9)=45$.

Откуда $x=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}=0{,}5=0{,}5(0)$

***Тема 2 Грани числовых множеств***

**1** Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**2** Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**3** Доказать, что для любых положительных чисел $y_1, y_2, \ldots y_n$, удовлетворяющих условию $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, имеет место неравенство: $y_1 + y_2 + \ldots y_n \geq n$.

**4** Доказать неравенство для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

**5** Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $n$ – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

**6** Пусть $A$ – множество чисел, противоположных по знаку чисел из множества $B$. Докажите, что

$$\sup A = -\inf B, \ \inf A = -\sup B.$$

Пример оформления решения

**1** Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $n \leq 2^{n-1}$.

*Решение*. При $n = 1$ неравенство верно т.к. $1 \leq 1$. Предположим, что неравенство верно для $k \in \mathbb{N} : k \leq 2^{k-1}$. Неравенство верно для $(k+1)$, так как

$$2^k = 2^{k-1} \cdot 2 \geq 2 \cdot k \geq k + 1.$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства: $(k-1)^2 \geq 0$.

Следовательно, неравенство $n \leq 2^{n-1}$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

**2** Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

**2** Доказать, что функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

*Решение*. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. Вычислим производную функции справа в точке $x_0 = 0$.

При $x \geq 0$ имеем $y = |x| = x$, $\Delta y = \Delta x$.

Поэтому

$$f_+'(0) = f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично при $x < 0$ получим $y = |x| = -x$, $\Delta y = -\Delta x$.

Следовательно, производная слева равна

$$f_-'(0) = f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку $f_-'(0) \neq f_+'(0)$, то функция $y = |x|$ в данной точке производной не имеет.

Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

**3** Найти дифференциал функции $y = x^2 - x + 3$ в точке $x = 2$.

*Решение*. Используя определение дифференциала, находим:

$$\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = (2+\Delta x)^2 - (2+\Delta x) + 3 - \left(2^2 - 2 + 3\right) =$$
$$= 3\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Откуда $dy = 3\Delta x = 3dx$.

**4** Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt{0{,}98}$.

*Решение*. Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{1+x}$.

Так как $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$, и

$$y(0) = 1, \qquad y'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad y'(0) = \frac{1}{2},$$

то получаем:

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \le x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности $(y_n)$ получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом $-1$, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

**2** Доказать по определению, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{6};...\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

*Решение*. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений $n$, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$.

Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$.

Тогда неравенство $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров $n$, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности



*Решение*. При $n = 1$ равенство очевидно.

Предположим, что оно верно для натурального числа $k$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим верность утверждения для следующего натурального числа $(k+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Следовательно, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

**3** Найти точную верхнюю грань интервала $(0{,}1)$.

*Решение*. Так как для любого $x \in (0;1) \Rightarrow x < 1$, то число 1 является верхней гранью. Покажем, что это точная верхняя грань, т.е. для любого $\bar{x} < 1 \ \exists \ a \in (0{,}1): a > \bar{x}$.

Действительно, если $\bar{x} \le 0$, то $\forall a \in (0;1): a > x$. Если $\bar{x} > 0$, то на интеграле $(\bar{x};1)$ существует действительное число $a$: $\bar{x} < a < 1$, т.е. $a > \bar{x}$.

Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной грани $\sup(0;1) = 1 \ \left(\sup(0;1) \notin (0;1)\right)$.

**4** Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\dfrac{m}{n}$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

*Решение*. *Шаг 1.* Пусть $X = \left\{ \dfrac{m}{n} \middle| \ m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$. Так как $\dfrac{m}{n} > 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, то $0$ – нижняя грань множества $X$. Более того, $\forall \bar{x} > 0$, так как, если $\bar{x} \ge 1$, то $a = \dfrac{1}{2}$ удовлетворяет условию $a < \bar{x}$. Если $0 < \bar{x} < 1$, то число $\bar{x}$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: $\bar{x} = 0, x_1, x_2 \ldots x_k \ldots$, причем $\exists x_n : x_n \ne 0$.

Рациональное число $a = 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}(x_n - 1)$ удовлетворяет условию $0 < a < \bar{x} < 1$, т.е. является правильной рациональной дробью и $0 < \bar{x}$. Следовательно, для числа $0$ выполнено определение точной, нижней грани: $\inf X = 0$. При этом $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, 0 – не натуральное число и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

*Шаг 2.* Так как $X$ содержит только правильные дроби, то $\frac{m}{n} < 1$, то число 1 – верхняя грань множества $X$. Более того, $\forall \bar{x} < 1 \quad \exists \frac{m}{n} \in X : \frac{m}{n} > \bar{x}$. Действительно, $\exists$ рациональное число $x_1 = \frac{m}{n} : \bar{x} < x_1 < 1$. Значит, $x_1 \in X$ и для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup X = 1$. Но $\sup X \notin X$, т.к. $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество $X$ не имеет наибольшего элемента.

### *Тема 3 Множество комплексных чисел*

**1** Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, $z_1 / z_2$ для $z_1$ и $z_2$:

а) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 5i$; в) $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 1 - 2i$;

б) $z_1 = 5 - 2i$; $z_2 = 2 + 3i$; г) $z_1 = \dfrac{-1+i}{-1-i}$; $z_2 = 2i$.

**2** Вычислить:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{1-i}{1+i}$; в) $\dfrac{2}{1-3i}$; г) $\dfrac{-2-i}{1+2i}$.

**3** Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить числа на плоскости $\mathbb{C}$ комплексные числа:

а) $z = 3i$; г) $z = -3 - 3i$;

б) $z = -2$; д) $z = -1 + 2i$;

в) $z = 1 - i$; е) $z = 1$.

**4** Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующие множества:

а) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \right\}$; г) $\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z - 1 - i| \le 4 \right\}$;

б) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$; д) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \dfrac{z-1}{z+1} \right| \le 1 \right\}$;



*Решение*. Данная функция не определена в точке $x = 1$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{2}{x-1}} = +\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x = 1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

## ***Раздел 3*** **Дифференциальное исчисление функции действительной переменной**

### *Тема 1 Определение производной*

**1** Пользуясь определением производной, получить формулы для производных для данных функций в точке $x_0$:

а) $y = 3x^2$; в) $y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x \cdot \ln x$; г) $y = \operatorname{tg} \pi x - x$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0 = 1$.

**2** Доказать, что функция Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ x < 0, \\ 1 \ \text{при}\ x \ge 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

**3** Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[3]{0{,}1002}$; в) $e^{-0{,}85}$;

б) $\sin 31^\circ$; г) $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

**4** Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ в точке $x_0 = 1$.

**5** Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = A \sin \omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{10}(0 - i) = -2^{10}\, i .$$

**4** Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ .

*Решение*. Для комплексного числа $z = \sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r = \sqrt{2}\,;\ \arg z = -\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right)\quad k = 0,1,2,3,4 .$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}\right)$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

при $k = 3$ имеем $z_3 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

при $k = 4$ имеем $z_4 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$.

Точки $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 1. 1). Полярный угол точки $z_0$ равен $\varphi_0 = -\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к $\varphi_0$, т.е. $\varphi_k = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{5}$ при $k = 1,2,3,4$ .



в) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg z = \frac{\pi}{4} \right\}$;  е) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \right\}$.

**5** Вычислить:

а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$; в) $(-1+i)^{10}$;  д) $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{25}$;

б) $(1-i)^{100}$;  г) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$;  е) $(3+4i)^3$.

**6** Найти все значения корня:

а) $\sqrt{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$;  б) $\sqrt[3]{-i}$;  в) $\sqrt[4]{16}$;  г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

**7** Решить уравнение:

$$(3x - i)(2+i) + (x - iy)(1+2i) = 5 + 6i .$$

**8** Решить уравнение: $\bar{z} = z^2$ .

Пример оформления решения

**1** Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

*Решение*. Используя правила суммы, разности, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z_1 + z_2 = (1-i) + (-2+3i) = (1-2) + i(3-1) = -1 + 2i ,$$

$$z_1 - z_2 = (1-i) - (-2+3i) = 1 - i + 2 - 3i = 3 - 4i ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)\cdot(-2+3i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 =$$

$$= -2 + 2i + 3i + 3 = 1 + 5i ,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1-i)\cdot(-2-3i)}{(-2+3i)\cdot(-2-3i)} = \frac{-2+2i-3i-3}{4+9} =$$

$$= \frac{-5-i}{13} = -\frac{5}{13} - i\frac{1}{13} .$$

**2** Представить комплексные числа $z = -1 + i$, $z = -4$, $z = i$ в тригонометрической и показательной формах.

*Решение*. При решении используем определения модуля и аргумента комплексного числа.

Для комплексного числа $z = -1 + i$ имеем $x = -1$; $y = 1$. Тогда модуль равен

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Так как

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

то аргумент $\mathrm{Arg}z=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ .

Отсюда главное значение аргумента $\arg z=\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, число $z=-1+i$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показательной – $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Аналогично для комплексного числа $z=-4$ имеем:
$x=-4$; $y=0$ $\Rightarrow$ $r=4$, $\arg z=\varphi=\pi$ ; $\Rightarrow$

$$z=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4\mathrm{e}^{i\pi}.$$

Для комплексного числа $z=i$ имеем $x=0$; $y=1$ и

$$r=1,\ \arg z=\varphi=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

**3** Вычислить $\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{10}$

*Решение*. Представим $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме. Так как $x=-\sqrt{2}$; $y=\sqrt{2}$, то

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \arg z=\varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Подставляя в формулу $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, получим:

$$z^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{3\cdot10}{4}\pi+i\sin\frac{3\cdot10}{4}\pi\right)=2^{10}\left(\cos\frac{15}{2}\pi+i\sin\frac{15}{2}\pi\right)=$$



$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{|a|}\ :\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow$$

$$|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta=|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon.$$

**2** Исследовать на непрерывность сложные функции

а) $y=e^{-\frac{1}{x}}$, б) $y=\sin x^4$.

*Решение*. а) функция $y=e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y=-\frac{1}{x}$ и $f=e^y$. Так как функция $y=-\frac{1}{x}$ не определена в точке $x=0$, то функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как композиция непрерывных функций.

б) функция $y=\sin x^4$ является композицией функций $y=\sin z$ и $z=x^4$. Так как функции $y$ и $z$ непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y=\sin x^4$ также непрерывна при всех $x$.

**3** Доопределить функцию

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке $x_0$.

*Решение*. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{\sin x}{x}=1\neq0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

**4** Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x<0,\\ x+1, \text{ при } 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } x\ge 3?\end{cases}$$

**5** Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$;  б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

**6** Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1;2)$.

**7** Исследовать функцию $y=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

**8** Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$;  г) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$;

б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;  д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$;

в) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$;  е) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } x<1\\ 3x+2, \text{ если } x\ge 1.\end{cases}$.

Примеры оформления решения

**1** Доказать непрерывность функции $y=ax+b$.

*Решение*. Функция $y=ax+b$ определена при всех значениях $x$, т.е. $\forall x\in\mathbb{R}$. Фиксируем некоторое значение $x_0$ из этого множества.

Тогда

$\forall\varepsilon>0$ $|y(x)-y(x_0)|=|ax+b-ax_0-b|=|ax-ax_0|=|a|\cdot|x-x_0|$.

Как только $|x-x_0|<\delta$, то $|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta$.

Следовательно,



$$=2^{10}\left(\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2^{10}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2^{10}(0-i)=-2^{10}i.$$

**4** Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

*Решение*. Для комплексного числа $z=\sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r=\sqrt{2};\ \arg z=-\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z=\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}\right)\quad k=0,1,2,3,4.$$

При $k=0$ имеем $z_0=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{20}-i\sin\dfrac{\pi}{20}\right)$,

при $k=1$ имеем $z_1=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{20}+i\sin\dfrac{7\pi}{20}\right)$,

при $k=2$ имеем $z_2=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

при $k=3$ имеем $z_3=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{20}+i\sin\dfrac{23\pi}{20}\right)$,

при $k=4$ имеем $z_4=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\dfrac{31\pi}{20}+i\sin\dfrac{31\pi}{20}\right)$.

Точки $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2}\approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 1. 1). Полярный угол точки $z_0$ равен $\varphi_0=-\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к $\varphi_0$, т.е. $\varphi_k=\varphi_0+\dfrac{2\pi k}{5}$ при $k=1,2,3,4$.

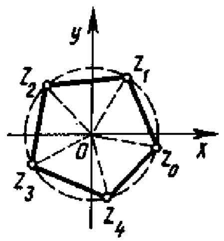


Рисунок 1. 1 – Корни комплексного числа $\sqrt[5]{1-i}$

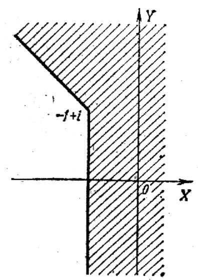


Рисунок 1. 2 – Множество $G$

**5** Изобразить на плоскости $\mathbb{C}$ множество

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ -\frac{\pi}{2}\le\arg\left(z+1-i\right)\le\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

*Решение*. Комплексное число $z_1=z+1-i=z-\left(-1+i\right)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка $z$. Угол между этим вектором и осью $Ox$ есть $\arg\left(z+1-i\right)$, и он меняется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью $Ox$ углы в $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Данное множество $G$ изображено на рисунке 1. 2.

## *Раздел 2* Теория пределов

### *Тема 1 Числовые последовательности*

**1** Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n=\frac{1}{2n+1}$;  г) $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+2$, при $n>1$;

б) $x_n=\frac{n+2}{n^3+1}$;  д) $a_1=1$, $a_n=\frac{a_{n-1}}{2}$, при $n>1$;

в) $x_n=\frac{n}{2^{n+1}}$;  е) $x_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n}$.



$$=3\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=3\cdot1=3.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to5}\frac{\sin\left(x-5\right)}{x^2-6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to5}\frac{\sin\left(x-5\right)}{\left(x-5\right)\left(x-1\right)}=\left[x-5=t\right]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t\left(t+4\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{1}{t+4}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y=2x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{2}{y}}=\left(\lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right)^2=e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}.$$

### *Тема 5 Непрерывность функции*

**1** Докажите непрерывность следующих функций:

а) $y=x^2$;  б) $y=\cos x$;  в) $y=\sqrt{x}$.

**2** Функция $f\left(x\right)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку $x_0$. Доопределите функцию $f\left(x\right)$ задав $f\left(x_0\right)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке $x_0$:

а) $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x-1}$;  б) $f\left(x\right)=\frac{\sin\left(1-x\right)}{x-1}$.

**3** Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=x\sin\frac{1}{x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;   е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

*Решение.*

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=[2y=x]=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1+\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}bx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx}=$$

$$=1\cdot b=b.$$

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y}=[3y=x]=$$



Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

**2** Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены с четными номерами равны 1, а члены с нечетными равны -1;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\cos\pi x=0$.

**3** Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

**4** Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n=\dfrac{n}{n^2+1}$,   б) $x_n=\dfrac{\sin n}{n}$,   в) $x_n=2^{-n}$.

являются бесконечно малыми.

**5** Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n=\ln(n+1)$,   б) $x_n=2^{2n+1}$,   в) $x_n=(-1)^n n$.

являются бесконечно большими.

П р и м е р   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

**1** Напишите пять первых членов из следующих последовательностей:

а) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$;

б) числа Фибоначчи $x_1=1$, $x_2=1$, $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$;

в) $y_n=\begin{cases}-n, \text{ если } n-\text{простое число},\\ -n^2, \text{если } n-\text{составное число}.\end{cases}$

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

*Решение.* а) для последовательности $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{3}{4}$, $x_3=\dfrac{4}{9}$, $x_4=-\dfrac{5}{16}$, $x_5=\dfrac{6}{25}$.

Поскольку $|x_n|=\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right|=\dfrac{n+1}{n^2}\le 2$ для любого $n\in\mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной.

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \le x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности $(y_n)$ получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом $-1$, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

**2** Доказать по определению, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{6};...\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

*Решение*. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений $n$, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$.

Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$.

Тогда неравенство $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров $n$, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности



**2** С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^3 - 2x^5}{5x + 3x^3 + x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 2x} - 1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4 - 7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt[4]{16x^4 + x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{2\sin^2 x - \operatorname{arctg} 2x}$.

**3** Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4t} - 1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x} - 1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2 - 6x + 5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{e^{3t} - 1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}\right)$.

Примеры оформления решения

**1** Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y} - 1}{y}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$;

д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}} - 1}{y}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $(x_n)$, что последовательность $(\cos x_n)$ расходится. Положим $x_n = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и последовательность $\cos x_n = (1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

**9** Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

*Решение*. Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon$. Известно, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta;0)$ выполняется неравенство $|\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

**10** Докажите, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \ge 0, \\ 0, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x \to 0$.

*Решение*. Положим $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\forall \delta > 0$ существуют $x \ge 0$ и $x < 0$ такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Для $x < 0$ имеем

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta : \ \ |f(x) - 1| \ge \varepsilon_0 .$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 1$.

### *Тема 4 Бесконечно малые функции*

**1** Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x \to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x) = \sin(x-2)$ при $x \to 2$;

б) $\alpha(x) = x^2 - 3x + 2$ при $x \to 1$;

в) $\alpha(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to 0$.



$\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

**3** Доказать по определению, что последовательность $(n^2) = (1;4;9;\ldots)$ является бесконечно большой.

*Решение*. Возьмем произвольное число $c > 0$. Из неравенства $|x_n| > c$ найдем $N(c)$:

$$n^2 > c \ \Rightarrow\ n > \sqrt{c}.$$

Возьмем за $N(k)$ целую часть числа $\sqrt{c}$: $N(k) = 1 + \left[\sqrt{c}\right]$. Тогда для всех номеров $n$, больших чем $N(c)$, выполняется неравенство $n^2 > c$.

В частности, для $c = 0{,}16$ имеем $N(c) = 1 + \left[\sqrt{0{,}16}\right] = 1$. Значит, для всех членов последовательности, начиная со второго номера, выполняется неравенство $n^2 > c$. Если $c = 12$, то $N(c) = 1 + \left[\sqrt{12}\right] = 4$ и неравенство верно $\forall n > 4$.

**4** Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

*Решение*. Рассмотрим последовательность

$$(x_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots).$$

Данная последовательность является неограниченной, поскольку для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется элемент последовательности $(x_n)$, для которого $x_n > A$. Однако она не является бесконечно большой, так как это неравенство не выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

### *Тема 2 Предел последовательности*

**1** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа $\varepsilon$ такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \ge N(\varepsilon)$ элементы $x_n$ последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если $x_n$ равно:

а) $\dfrac{2n+1}{n} - 1$; в) $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

б) $1+\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$; г) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

**2** Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}8)^n=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot 6^n}{3^n+6^n}=5$.

**3** Докажите, что последовательность $x_n=n^{(-1)^n}$ расходится.

**4** Докажите, что число $a=-1$ не является пределом последовательности $x_n=\cos\pi n$.

**5** Докажите по определению, что последовательность $x_n=2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n\to\infty$.

**6** Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n+3}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n^2+4n-1}$; л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$; н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n-5}\right)^{3n+1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2}\right)$; о) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$; п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$.

Примеры оформления решения

**1** Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

*Решение*. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$.



**6** Построить график функции $y=\begin{cases}2-x, & \text{если } x<3,\\ 0{,}1x^2, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$

*Решение*. При $x<3$ функция представляется лучом прямой $y=2-x$, при $x\ge 3$ – параболой $y=0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 2. 2.

**7** Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

*Решение*. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (рисунок 2. 3) не определена в точке $x_0=1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$. Пусть $(x_n)$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n\ne 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Образуем последовательность $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-1}{x_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Так как $x_n\ne 1$, то $f(x_n)=x_n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.

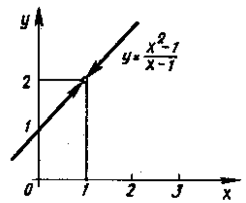


Рисунок 2. 3 – График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

**8** Доказать, что функция $y(x)=\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

*Решение*. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x\to+\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \iff \forall(x_n),\ x_n>0,\ x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\ \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}} = e^{-4}.$$

**7** Доказать, что последовательность $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M \quad \forall k = \overline{1,n}$, $|q| < 1$, сходится.

*Решение*. Для доказательства используется критерий Коши.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$|x_n - x_{n+p}| = |a_{n+p}q^{n+p} + a_{n+p-1}q^{n+p-1} + \ldots + a_{n+1}q^{n+1}| \le$$

$$\le M|q^{n+p}| + \ldots + M|q^{n+1}| \le Mp|q^{n+1}| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{M}\right] + 1$, такое, что $\forall n < \mathbb{N}$ и $\forall p > 0$ выполняется неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(x_n)$ является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

**8** Доказать, что $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ расходится.

*Решение*. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n \ge N \;\; \exists p \ge N: \; |x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0.$$

Для этого рассмотрим разность

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right| \ge p\cdot\frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $|x_{2n} - x_n| \ge \frac{1}{2}$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, такое, что $\forall N \;\; \exists n = p \ge N$, $|x_{2n} - x_n| \ge \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

**9** Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

*Решение*. Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2) = a$. Тогда



Из неравенства $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ получим $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Если взять $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ (так как при $\varepsilon \ge 1$ получим $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] = 0 \notin \mathbb{N}$ ), то для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами $100$, $101$, ..., а при $\varepsilon = 2$ неравенство верно $\forall \; n \in \mathbb{N}$.

**2** Доказать, что ограниченная последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

*Решение*. Предположим, что она имеет предел, равный $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon = \frac{1}{2} \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |(-1)^n - a| < \frac{1}{2}.$$

При $n = 2k$ получим $|1 - a| < \frac{1}{2}$, при $n = 2k - 1$ получим

$$|-1-a| < \frac{1}{2} \text{ или } |1+a| < \frac{1}{2}.$$

С учетом этого $\forall n \ge N(\varepsilon)$

$$2 = |1 - a + a + 1| \le |1-a| + |1+a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

т. е. $2 < 1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

**3** Доказать, что последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ сходится к нулю, но она не является монотонной.

*Решение*.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon) \quad \left|\frac{(-1)^n}{2n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется это неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{2\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 .$$

Следовательно, последовательность сходится.

Так как $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{6}$, …, то последовательность не является монотонной.

**4** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

*Решение*. Покажем, что $x_n = \frac{2^n}{n!}$ монотонна.

Рассмотрим $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n \quad \forall n > 2$, т. е. $x_n$– убывающая и ограничена снизу числом $0$. По свойству сходимости монотонной ограниченой последовательности существует предел последовательности $x_n = \frac{2^n}{n!}$, равный $b$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$ при $n \to \infty$, получим $b = b \cdot 0$. Отсюда $b = 0$.

**5** Доказать, что $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ – сходится.

*Решение*. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 ,$$

то $x_n$ – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$



ции $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

*Решение*. Функция $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ определена, если $4 - x^2 > 0$, т.е. если $|x| < 2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| < 2 \right\} = (-2;2) .$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \frac{1}{2}$ для всех $x$ из области определения, то множество значений есть

$$E(f) = \left\{ y \;\middle|\; y \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) .$$

**2** Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

*Решение*. По определению:

$f(x)$ *ограничена сверху на* $(0;1)$ $\Leftrightarrow$

$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in (0;1) \Rightarrow f(x) \leq M$.

Построим отрицание для этого определения:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $(0;1)$ $\Leftrightarrow$

$\forall M \in \mathbb{R} : \exists x \in (0;1) \Rightarrow f(x) > M$.

Возьмем $x = \frac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\frac{1}{1+|M|}\right) = 1 + |M| > M$ для любого $M$.

Следовательно, существует такое число $x \in (0;1)$, что $f(x) > M$. Поэтому функция неограничена.

**3** Определить, какая из данных функций четная, нечетная

а) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$, б) $f(x) = x^2 + 5x$, в) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$?

*Решение*.

а) изменим знак аргумента, тогда получим:

$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2\sin x = -f(x)$.

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2^{10}(0-i)=-2^{10}i.$$

**4** Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости □ .

*Решение*. Для комплексного числа $z=\sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r=\sqrt{2};\ \arg z=-\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z=\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}\right)\quad k=0,1,2,3,4.$$

При $k=0$ имеем $z_0=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}-i\sin\frac{\pi}{20}\right)$,

при $k=1$ имеем $z_1=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

при $k=2$ имеем $z_2=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

при $k=3$ имеем $z_3=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20}+i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

при $k=4$ имеем $z_4=\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20}+i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$.

Точки $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2}\approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 1. 1). Полярный угол точки $z_0$ равен $\varphi_0=-\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к $\varphi_0$, т.е. $\varphi_k=\varphi_0+\frac{2\pi k}{5}$ при $k=1,2,3,4$.



$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

т .е. $\ln x_n<1$. Откуда $x_n<e$.

Значит, $x_n$ – монотонна и ограничена. Тогда по свойству о сходимости монотонной и ограниченной последовательности $x_n$ сходится.

**6** Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right)$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

*Решение*. а) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=$$

$$=\left[\text{по свойствам пределов}\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\left[\text{по свойствам пределов}\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4.$$

б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

в) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}} = e^{-4}.$$

**7** Доказать, что последовательность $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M \quad \forall k = \overline{1,n}$, $|q| < 1$, сходится.

*Р е ш е н и е*. Для доказательства используется критерий Коши.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|a_{n+p}q^{n+p} + a_{n+p-1}q^{n+p-1} + \ldots + a_{n+1}q^{n+1}\right| \le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right| + \ldots + M\left|q^{n+1}\right| \le Mp\left|q^{n+1}\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{M}\right] + 1$, такое, что $\forall n < \mathbb{N}$ и $\forall p > 0$ выполняется неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(x_n)$ является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

**8** Доказать, что $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ расходится.

*Р е ш е н и е*. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \ge N \ \ \exists p \ge N : \left|x_{n+p} - x_n\right| \ge \varepsilon_0.$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right| \ge p \cdot \frac{1}{n+p}.$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $|x_{2n} - x_n| \ge \frac{1}{2}$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, такое, что $\forall N \ \exists n = p \ge N$, $|x_{2n} - x_n| \ge \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

**9** Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

*Р е ш е н и е*. Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2) = a$. Тогда



$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin(n+2) - \sin n\right) = 0.$$

С другой стороны

$$\sin(n+2) = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sin 1 \cdot \cos(n+1) - \sin n\right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1) = 0$.

С учетом того, что $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \sin n \sin 1$, имеем

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1}\left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1)\right).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sin n = \frac{1}{\sin 1}\lim_{n\to\infty}\left(\cos n\cos 1 - \cos(n+1)\right) = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = \lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

Следовательно, $\sin n$ расходится.

### *Тема 3 Предел функции*

**1** Найти область определения следующих функций:

а) $y = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$; б) $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; в) $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-9}} - \sqrt{\sin x}$.

**2** Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y = \frac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, б) $y = \frac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbb{R}$.

**3** Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y = |x| - 5\ln\left(x^2+1\right)$;

б) $y = x^3 + 3\sin x$;

в) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

**4** Найти период следующих функций:

а) $y = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$, б) $y = \sin|x|$.

**5** Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$;