Учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
________________ И.В. Семченко
____
Регистрационный № УД-_______/р.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа для специальности
1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)»

Факультет ___________математический___________________________
(название факультета)
Кафедра ________математического анализа______________________
(название кафедры)
Курс (курсы) _2 - 3_______________________________
Семестр (семестры) _4 - 5________________________

Лекции _50__________ часов.
(количество часов)
Практические (семинарские
занятия _______нет_______ часов
(количество часов)
Лабораторные
занятия _34__________ часа.
(количество часов)

Экзамен __5____–__________
(семестр)
Зачет _4______________
(семестр)
Курсовой проект,
работа ____нет___–__________
(семестр)

Самостоятельная управляемая работа студентов 18____ часов
Всего аудиторных часов
по дисциплине 84 часа.
(количество часов)
Всего часов
по дисциплине_________ часа.
(количество часов

Форма получения
высшего образования_дневная

Составили: А. П. Старовойтов, д.ф.-м. н., доцент; Ю.А. Лабыч, ассистент

2010

Учебная программа составлена на основе типовой учебной программы,

утвержденной « 05 »_________________07___________ 2006 г.,

регистрационный № ТД –G.098/тип.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению в качестве рабочего варианта на заседании кафедры дифференциальных уравнений и теории функций

________________2010г., протокол №_____
(дата, номер протокола)

Заведующий кафедрой
доцент ________________А.П.Старовойтов
(подпись) (И.О. Фамилия)

Одобрена и рекомендована к утверждению
методическим советом математического факультета

___________________2010г., протокол №____
(дата, номер протокола)

Председатель

доцент ______________В. М. Селькин
(подпись) (И.О. Фамилия)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Необходимость и актуальность дисциплины обязательного компонента «Функциональный анализ и интегральные уравнения» обусловлена как ее ролью в современном естествознании и математике в целом, так и тем, что на ней базируются другие дисциплины учебного плана.

Целью дисциплины является овладение студентами основными принципами функционального анализа и теории интегральных уравнений.

Задачами дисциплины являются:

− ознакомление студентов с математическим аппаратом функционального анализа;

– усвоение студентами основных понятий, теорем, методов и приложений функционального анализа и интегральных уравнений;

– формирование умений и навыков применения полученных знаний в практической деятельности;

− формирование умений и навыков использования методов функционального анализа при решении задач.

Материал дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» основывается на ранее полученных студентами знаниях по таким дисциплинам, как «Математический анализ» и «Геометрия и алгебра».

Общее количество часов: ???; из них: лекции – 50, лабораторные занятия – 34, контролируемая самостоятельная работа – 18.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Теория меры

Тема 1.1 Элементы теории множеств

Работы Фреше, Вольтерра, Гильберта, Ф. Рисса, Фредгольма, Банаха, приведшие к возникновению функционального анализа. Основные понятия теории множеств, операции над множествами. Отношения и функции. Равномощные множества. Счетные и несчетные множества. Теорема Кантора.

Тема 1.2 Общее понятие аддитивной меры

Системы множеств: алгебры, полуалгебры, сигма-алгебры. Алгебра, порожденная полуалгеброй. Конечно аддитивные и сигма-аддитивные меры. Важнейшие примеры мер. Свойства мер. Продолжение меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру.

Тема 1.3 Лебеговское продолжение меры, мера Лебега на прямой

Внешняя мера. Свойства внешней меры. Измеримые множества. Теорема о продолжении. Пространства с мерой. Меры Лебега-Стилтьеса и мера Лебега на прямой.

Раздел 2 Интеграл Лебега

Тема 2.1 Измеримые функции и их свойства

Равносильность различных определений измеримой функции. Устойчивость измеримости относительно арифметических операций. Устойчивость измеримости относительно предельного перехода. Простые функции. Аппроксимация измеримых функций простыми. Теоремы Егорова и Лузина.

Тема 2.2 Определение интеграла Лебега

Интеграл от простой функции и его свойства. Интеграл от неотрицательной функции и его свойства. Теорема Б. Леви для неотрицательных функций. Лемма Фату. Класс суммируемых функций. Свойства интеграла Лебега.

Тема 2.3 Предельный переход под знаком интеграла

Теоремы Б. Леви. Теорема Лебега. Следствия для рядов. Неравенство Чебышева. Абсолютная непрерывность интеграла. Замена переменной в интеграле Лебега. Сравнение интеграла Лебега по отрезку с интегралом Римана.

Тема 2.4 Интеграл Стилтьеса

Функции ограниченной вариации и их свойства. Интеграл Лебега-Стилтьеса и его вычисление. Интеграл Римана-Стилтьеса, его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной. Дифференцирование интеграла Лебега с переменным верхним пределом.

Тема 2.5 Прямое произведение мер и теорема Фубини

Прямое произведение полуалгебр. Определение прямого произведения мер. Теорема Фубини. Пространства L_p, $1 \le p \le \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Полнота пространств L_p. Теорема Радона-Никодима. Различные виды сходимости измеримых функций и связь между ними.

Раздел 3 Метрические пространства

Тема 3.1 Полные метрические пространства

Определения и примеры метрических пространств. Топология метрических пространств. Сходящиеся последовательности. Непрерывные отображения. Полные метрические пространства. Свойства полных подмножеств. Теорема о пополнении. Теорема Бэра. Теорема о продолжении непрерывной функции. Принцип сжимающих отображений и его обобщение. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма. Применение обобщенного принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтерра.

Тема 3.2 Компактные метрические пространства

Определения и примеры компактных метрических пространств. Свойство Больцано-Вейерштрасса. Ограниченные и вполне ограниченные множества и их свойства. Критерий Хаусдорфа. Непрерывные отображения компактных метрических пространств. Теорема Арцела-Асколи. Критерий компактности в пространствах l_p.

Раздел 4 Банаховы пространства и операторы в них

Тема 4.1 Нормированные пространства

Основные понятия теории векторных пространств. Полунормы и нормы. Важнейшие примеры нормированных пространств. Эквивалентные нормы. Подпространство и факторпространство. Прямое произведение нормированных пространств. Банаховы пространства. Полнота факторпространства. Ряды в нормированных пространствах. Абсолютная и условная сходимость. Критерий полноты нормированного пространства. Критерий конечномерности банахова пространства (теорема Рисса).

Тема 4.2 Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы, примеры. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора и ее свойства. Формулы для нормы. Полнота пространства LB(X,Y). Обратный оператор и односторонняя обратимость. Существование обратного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Различные виды сходимости операторов и связь между ними. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана-Банаха в вектоных пространствах. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах и ее следствия. Спектр оператора, тонкая структура спектра. Компактность спектра. Непустота спектра. Компактные операторы и их свойства.

Раздел 5 Гильбертовы пространства и операторы в них

Тема 5.1 Гильбертовы пространства

Предгильбертовы и гильбертовы пространства. Важнейшие примеры гильбертовых пространств. Элементарные свойства гильбертовых пространств. Ортонормированные системы. Ряды Фурье по ортонормированным системам. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Существование ортонормированных базисов. Гильбертова размерность. Теоремы об изоморфизме гильбертовых пространств. Общий вид линейного функционала в гильбертовых пространствах. Проекция на подпространство. Теорема о проекции. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертовых пространств.

Тема 5.2 Линейные операторы в гильбертовых пространствах

Сопряженный оператор и его существование. Свойства операции сопряжения. Фредгольмовы (нетеровы) операторы. Понятие об индексе. Теория

Рисса-Шаудера. Важнейшие типы операторов в гильбертовых пространствах. Самосопряженные операторы и их свойства. Теорема о спектре самосопряженного оператора. Квадратичная форма. Теорема о норме самосопряженного оператора. Теорема Гильберта. Понятие о спектральной теореме. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Применение основных принципов функционального анализа к интегральным уравнениям. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения второго рода с симметричным ядром. Уравнения первого рода. Корректные и некорректные задачи.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов						
		лекции	практичес-кие занятия	лабораторные занятия	Контролируемая самостоятельная работа студентов	материальное обеспечение занятия	литература	формы контроля знаний
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Теория меры**	**6**	**-**	**6**	**2**			
1.1	***Элементы теории множеств*** 1 Основные понятия теории множеств, операции над множествами. 2 Отношения и функции. 3 Равномощные множества. 4 Счетные и несчетные множества	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
1.2	***Общее понятие аддитивной меры*** 1 Системы множеств: алгебры, полуалгебры, сигма-алгебры. 2 Конечно аддитивные и сигма-аддитивные меры. 3 Свойства мер. 4 Продолжение меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру.	2	-	2	1	Методическое пособие	[1], [2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе

1.3	***Лебеговское продолжение меры, мера Лебега на прямой*** 1 Внешняя мера. 2 Свойства внешней меры. 3 Измеримые множества. 4 Меры Лебега-Стилтьеса и мера Лебега на прямой	2	-	2	-	Методическое пособие	[1], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
	Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 1				1			Письменное тестирование
2	**Интеграл Лебега**	**8**	**-**	**12**	**2**			
2.1	***Измеримые функции и их свойства*** 1 Равносильность различных определений измеримой функции. 2 Устойчивость измеримости относительно арифметических операций. 3 Простые функции. 4 Аппроксимация измеримых функций простыми.	-	-	2		Методическое пособие	[1], [2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
2.2	***Определение интеграла Лебега*** 1 Интеграл от простой функции и его свойства. 2 Интеграл от неотрицательной функции и его свойства. 3 Теорема Б. Леви для неотрицательных функций. 4 Класс суммируемых функций.	2	-	4	1	Методическое пособие	[1], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
2.3	***Предельный переход под знаком интеграла*** 1 Теоремы Б. Леви и лемма Фату. 2 Теорема Лебега. 3 Следствия для рядов. 4 Замена переменной в интеграле Лебега.	2	-	2		Методическое пособие	[1], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе

2.4	***Интеграл Стилтьеса*** 1 Функции ограниченной вариации и их свойства. 2 Интеграл Лебега-Стилтьеса и его вычисление. 3 Интеграл Римана-Стилтьеса, его связь с етргралом Лебега-Стилтьеса. 4 Абсолютно непрерывные функции.	2	-	2		Методическое пособие	[2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
2.5	***Прямое произведение мер и теорема Фубини*** 1 Определение прямого произведения мер. 2 Теорема Фубини. 3. Пространства L_p $1 \le p \le \infty$. 4 Различные виды сходимости измеримых функций и связь между ними.	2	-	2		Методическое пособие	[1], [2], [3]	Защита отчетов по лабораторной работе
	Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 2				1			Письменное тестирование
								зачет
	Всего часов за 4 семестр	**14**	**-**	**18**	**4**			
3	**Метрические пространства**	**10**	**-**	**6**	**4**			
3.1	***Полные метрические пространства***	**6**	**-**	**4**	**2**			
3.1.1	1 Определения и примеры метрических пространств. 2 Топология метрических пространств. 3 Сходящиеся последовательности. 4 Непрерывные отображения.	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе
3.1.2	1 Полные метрические пространства. 2 Свойства полных подмножеств. 3 Теорема о пополнении. 4 Теорема Бэра.	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе

3.1.3	1 Теорема о продолжении непрерывной функции. 2 Принцип сжимающих отображений и его обобщение. 3 Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма. 4 Применение обобщенного принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтерра.	2	-	2	2	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе
3.2	***Компактные метрические пространства***	**4**	**-**	**2**	**2**			
3.2.1	1 Определения и примеры компактных метрических пространств. 2 Свойство Больцано-Вейерштрасса. 3 Ограниченные и вполне ограниченные множества и их свойства. 3 Критерий Хаусдорфа.	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе
3.2.2	1 Непрерывные отображения компактных метрических пространств. 2 Теорема Арцела-Асколи. 3 Критерий компактности в пространствах l_p.	2	-	-	1	Методическое пособие	[2], [3], [4]	
	Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 3				1			Письменное тестирование
4	**Банаховы пространства и операторы в них**	**12**	**-**	**6**	**4**			
4.1	***Нормированные пространства***	**6**	**-**	**2**	**2**			
4.1.1	1 Основные понятия теории векторных пространств. 2 Полунормы и нормы. 3 Важнейшие примеры нормированных пространств. 3 Эквивалентные нормы.	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3], [4]	Защита отчетов по лабораторной работе

4.1.2	1 Подпространство и факторпространство. 2 Прямое произведение нормированных пространств. 3 Банаховы пространства. 4 Полнота факторпространства.	2	-	-	2	Методическое пособие	[2], [3], [4]	
4.1.3	1 Ряды в нормированных пространствах. 2 Абсолютная и условная сходимость. 3 Критерий полноты нормированного пространства. 4 Критерий конечномерности банахова пространства (теорема Рисса).	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3], [4]	
4.2	***Линейные операторы в нормированных пространствах***	**6**	**-**	**4**	**2**			
4.2.1	1 Линейные операторы, примеры. 2 Непрерывность и ограниченность. 3 Норма оператора и ее свойства. 4 Формулы для нормы.	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	
4.2.2	1 Полнота пространства LB(X,Y). 2 Обратный оператор и односторонняя обратимость. 3 Существование обратного оператора. 4 Теорема Банаха об обратном операторе.	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе
4.2.3	1 Различные виды сходимости операторов и связь между ними. 2 Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия. 3 Линейные непрерывные функционалы. 4 Теорема Хана-Банаха в векторных пространствах.	2	-	2	1	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе
	Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 4				1			Письменное тестирование

5	**Гильбертовы пространства и операторы в них**	**14**	**-**	**4**	**6**			
5.1	***Гильбертовы пространства***	**6**	**-**	**2**	**2**	Методическое пособие		
5.1.1	1 Предгильбертовы и гильбертовы пространства. 2 Важнейшие примеры гильбертовых пространств. 3 Элементарные свойства гильбертовых пространств. 4 Ортонормированные системы.	2	-	2	-	Методическое пособие	[2], [3]	Защита отчетов по лабораторной работе
5.1.2	1 Ряды Фурье по ортонормированным системам. 2 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. 3 Существование ортонормированных базисов. 4 Гильбертова размерность.	2	-	-	2	Методическое пособие	[2], [3]	
5.1.3	1 Теоремы об изоморфизме гильбертовых пространств. 2 Общий вид линейного функционала в гильбертовых пространствах. 3 Теорема о проекции. 4 Теорема о разложении гильбертовых пространств.	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3]	
5.2	***Линейные операторы в гильбертовых пространствах***	**8**	**-**	**2**	**4**			
5.2.1	1 Сопряженный оператор и его существование. 2 Свойства операции сопряжения. 3 Фредгольмовы (нетеровы) операторы. 4 Понятие об индексе.	2	-	2	1	Методическое пособие	[2], [3],[4]	Защита отчетов по лабораторной работе
5.2.2	1 Теория Рисса-Шаудера. 2 Важнейшие типы операторов в гильбертовых пространствах. 3 Самосопряженные операторы и их свойства. 4 Теорема о спектре самосопряженного оператора.	2	-	-	1	Методическое пособие	[2], [3],[4]	

5.2.3	1 Квадратичная форма. 2 Теорема о норме самосопряженного оператора. 3 Теорема Гильберта. 4 Понятие о спектральной теореме.	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	
5.2.4	1 Интегральные уравнения с вырожденным ядром. 2 Применение основных принципов функционального анализа к интегральным уравнениям. 3 Теоремы Фредгольма. 4 Интегральные уравнения второго рода с симметричным ядром.	2	-	-	-	Методическое пособие	[2], [3],[4]	
	Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 5				2			Письменное тестирование
								экзамен
	Всего часов за 5 семестр	**36**	-	**16**	**14**			
	Итого часов	**50**	-	**34**	**18**			

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень лабораторных работ

1. Элементы теории множеств.
2. Общее понятие аддитивной меры.
3. Интеграл Лебега.
4. Интеграл Стилтьеса.
5. Метрические пространства.
6. Непрерывные отображения.
7. Нормированные и гильбертовы пространства.
8. Линейные операторы в нормированных и гильбертовых пространствах.

Формы контроля знаний

1. Тестовые задания.

Темы тестовых заданий

1. Свойства мер.
2. Свойства интеграла Лебега.
3. Критерии компактности.
4. Линейные непрерывные функционалы.
5. Свойства сопряженного оператора.
6. Операторы в гильбертовых пространствах.

Рекомендуемая литература

Основная

1 Партасарати, К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати. − М. : Мир, 1983. − 343 с.

2 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. − Мн : БГУ, 2003. − 430 с.

3 Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. − М. : Наука, 1972. – 496 с.

4 Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум / А. Б. Антоневич [и др.] − Мн : БГУ, 2003. − 179 с.

Дополнительная

1 Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. − М. : Наука, 1979. – 381 с.

2 Толстов, Г.П. Мера и интеграл / Г.П. Толстов. − М. : Наука, 1976.–392 с.

3 Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах / П. Л. Ульянов [и др.] − М. : Физматлит, 2005. − 416 с.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу
Математический анализ	Математического анализа		Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленном варианте Протокол №____от ____.____2010
Дифференциальная геометрия и топология	Алгебры и геометрии		Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленном варианте Протокол №____от ____.____2010
Теория вероятностей и математическая статистика	ЭК и ТВ		Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленном варианте Протокол №____от ____.____2010

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
На 200___/200___учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры дифференциальных уравнений и теории функций
(протокол № ____ от________201___г.)

Заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений
и теории функций
д.ф.-м.наук, доцент А. П. Старовойтов

УТВЕРЖДАЮ
Декан математического факультета
к.ф.-м.наук, доцент С. П. Жогаль