ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Разложение по собственным векторам компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве

Необходимые понятия и теоремы: *компактный оператор, самосопряжённый оператор, собственные значения оператора, собственные векторы, теорема Гильберта-Шмидта, теорема Гильберта, интегральные уравнения с симметричным ядром.*

Литература: [] стр. 269-277, [] стр. 264-185, [] стр. 224-250, [] стр. 247-258, [] стр. 247-254, []стр. 11-120.

1. В пространстве $L_2[0,2\pi$ найти решение интегрального уравнения $x(t)-\int_0^{2\pi}K(t-s)x(s)ds=y(t)$, если *K(t)*- чётная непрерывная, 2π - периодическая функция.

	K(t) при $|t|\le$:	*y(t)*
1.1	$a|t|$	*t+sint*
1.2	$a(|t|+ \ )$	*t+2*
1.3	at^2	*tsin2t - cos3t*
1.4	$a(t^2+ \ )$	e^t
1.5	$a\cos t$	*t+1- sint*
1.6	$a|\sin t|$	sin^2t+1
1.7	$ae^{|t|}$	$cos^2t+ t$
1.8	$a|sht|$	*t+2 - cos4t*
1.9	$a|cht|$	$sintcos^2t + t$
1.10	$at\sin t$	*t + sint*
1.11	$|t|$	*sgnt*
1.12	$\pi \ - \ ^2$	e^t
1.13	*tsint*	*0*
1.14	$|sint|$	*t*
1.15	$|cost|$	*-t*
1.16	$sin2|t|$	e^{2it}
1.17	$e^{2|t|}$	*sint*
1.18	$e^{-|t|}$	*cos2t*

1.19	$e^{i\|t\|}$	$sin2t$
1.21	$\|t\|$	$e^{2\pi}$
1.22	$tcost$	π
1.23	t^2	cht

2. Для заданной функции $K(t,s)$ проверить, что интегральный оператор $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ является компактным и самосопряжённым в пространстве $L_2[a,b]$, построить полную ортонормированную систему из собственных функций и для заданного y найти решение интегрального уравнения $x(t) - Ax(t) = y(t)$ с помощью разложения по собственным функциям.

	a	b	K[t,s]	y(t)
2.1	0	π	$\begin{cases} \cos t \sin s, t \le s, \\ \cos s \sin t, s < t \end{cases}$	$cos2t$
2.2	0	1	$\begin{cases} t(s-1), t \le s, \\ s(t-1), s < t \end{cases}$	$t+1$
2.3	0	1	$\begin{cases} s(t+1), t \le s, \\ t(s+1), s < t \end{cases}$	$t-3$
2.4	0	$\pi/2$	$\begin{cases} \cos s \sin t, t \le s, \\ \cos t \sin s, s < t \end{cases}$	t
2.5	0	2π	$\begin{cases} (sht sh(s-1)/sh1, t \le s, \\ (shs sh(t-1)/sh1, s < t \end{cases}$	e^t
2.6	0	1	$\begin{cases} t(2-s)/2, t \le s, \\ -s(t-2)/2, s < t \end{cases}$	$t/2$
2.7	0	π	$\begin{cases} \cos(s-1) \sin t, t \le s, \\ \sin s \cos(t-1), s < t \end{cases}$	$cos3t$
2.8	0	π	$\begin{cases} \sin(t+\frac{\tau}{4}) \sin(s-\frac{\tau}{4}), t \le s, \\ \sin(s+\frac{\tau}{4}) \sin(t-\frac{\tau}{4}), s < t \end{cases}$	$sint$
2.9	0	1	$e^{-\|t-s\|}$	te^t
2.10	0	1	$\begin{cases} (t+1)(s-2), t \le s, \\ (s+1)(t-2), s < t \end{cases}$	$sin2t$
2.11	$-\tau$	π	$\begin{cases} \sin t \sin(s-1), t \le s, \\ \sin s \sin(t-1), s < t \end{cases}$	$t-1$

3. С помощью разложения по собственным функциям найти норму интегрального оператора $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ в гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$.

	a	b	A
3.1	*-1*	*1*	$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(t^2 - ts)x(s)ds$
3.2	*-1*	*1*	$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(t^4 + t^3 s)x(s)ds$
3.3	*0*	2π	$(Ax)(t) = \int_{0}^{2\pi}\cos(t+s)x(s)ds$
3.4	*0*	π	$(Ax)(t) = \int_{0}^{\pi}(\sin t \sin s + \sin 4t \sin 2s)x(s)ds$
3.5	*0*	π	$(Ax)(t) = \int_{0}^{\pi}(\cos 2t \cos s + \sin 4t \sin 2s)x(s)ds$
3.6	*-2*	*2*	$(Ax)(t) = \int_{-2}^{2}(1 + ts)x(s)ds$
3.7	*-1*	*2*	$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{s}{\sqrt[3]{t}} - 2ts^2\right)x(s)ds$
3.8	$-\tau$	π	$(Ax)(t) = \int_{0}^{\pi}\sin(2t+s)x(s)ds$
3.9	*-3*	*1*	$(Ax)(t) = \int_{-2}^{1}(ts^2 + t^2 s)x(s)ds$
3.10	*-2*	*3*	$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(\lvert t \rvert s + \frac{1}{\sqrt[3]{ts}})x(s)ds$