Гильбертово пространство

А. Основные понятия и теоремы.

Определение 1. Будем говорить, что на векторном пространстве H (над полем K = **R** или **C**) задано **скалярное произведение**, если задано отображение $\omega : H \times H \to$ **K** (далее вместо $\omega(x,y)$ пишем просто *(x,y)*), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(x,x) \geq 0,\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y);\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$

3) $(x,y) = \overline{(y,x)}.$

Определение 2. Векторное пространство со скалярным произведением называется **предгильбертовым** пространством. **Нормой** элемента *x* предгильбертова пространства называется число $||x|| = \sqrt{(x,x)}$.

Из **неравенства Коши-Буняковского**

$$|(x, y)| \leq ||x||\ ||y||$$

следует, что функция $x \mapsto ||x||$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Определение 3. Предгильбертово пространство, полное относительно указанной нормы, называется **гильбертовым.**

В дальнейшем E – предгильбертово пространство.

Определение 4. Вектор $x \in E$ называется **ортогональным** множеству $M \subset E$, если $(x,y) = 0$ при всех $y \in M$.. Множество векторов, ортогональных M, называется его **ортогональным дополнением** и обозначается $M^{\perp}$.

ЛЕММА 1. *Ортогональное дополнение к любому множеству $M \subset E$ является замкнутым векторным подпространством предгильбертова пространства E.*

Определение 5. Система векторов $(x_{\alpha}) \subset E$ называется **ортогональной**, если $(x_{\alpha}, x_{\beta}) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Если, кроме того, $||x_{\alpha}|| = 1$ при всех α, то эта система называется **ортонормированной.**

ТЕОРЕМА 1 (абстрактная теорема Пифагора). *Если $x_1, \dots, x_n$ - ортогональный набор векторов из E и $x = x_1 + \dots + x_n$, то $||x||^2 = ||x_1||^2 + \dots + ||x_n||^2$.*

ЛЕММА 2. *Пусть H - гильбертово пространство, $L \subset H$ - его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого элемента x из H в L существует ближайший к x элемент , т.е. такой элемент $y \in L$, что*

$$||x - y|| = \inf_{l \in L} ||x - l||.$$

Определение 6. Пусть L - векторное подпространство предгильбертова пространства E. **Проекцией** вектора x на L называется такой элемент y из L что $x - y \perp L$, т.е. $(x-y, l) = 0$ при всех l из L.

ТЕОРЕМА 2 (о прекции). *Пусть H - гильбетрово пространство, L - его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого x из H существует, и притом единственная, его проекция на L. (Эта проекция, обозначаемая $pr_L x$, является ближайшим к x элементом в L.)*

<u>Определение 7.</u> Ортонормировангная система векторов $e_1, \ldots, e_k, \ldots ((e_k, e_j) = \delta_{kj})$ гильбертова пространства *H* называется **ортонормированным базисом** пространства *H*, если *(e_k)* образуют базис в *H*, т.е. любой вектор *x* из *H* разлагается, и притом единственным образом, в ряд по этой системе : $x = \sum_k c_k e_k$.

Числа $c_k = (x, e_k)$ называются **коэффициентами Фурье** элемента *x* по ортонормированной системе *(e_k)*. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ называется **рядом Фурье** элемента *x* по этой системе.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть (e_k) - ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве H, x - произвольный элемент из H, $c_k = (x, e_k)$ - его коэффициенты Фурье. Тогда:*

1) числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, причем справедливо ***неравенство Бесселя***

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2;$$

2) ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится в H;

3) сумма ряда Фурье есть проекция вектора x на подпространство, порожденное системой (e_k);

4) x равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда выполняется равенство ***Парсеваля-Стеклова****:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

<u>Определение 8.</u> Система векторов *(e_k)* из *E* называется **полной**, если из того, что *$(x, e_k)=0$* при всех натуральных *k,* следует, что *x=0.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть H - гильбертово пространство, (e_k) - ортонормированная система векторов в H, L - подпространство, порожденное (e_k). Следующие свойства эквивалентны:*

1) любой элемент x из H является суммой своего ряда Фурье;

2)система (e_k) полная;

3) для любого x из H выполнено равенство Парсеваля-Стеклова;

4) подпространство L, порожденное системой (e_k), совпадает с H.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы в гильбертовом пространстве H существовала полная счетная ортонормированная система, необходимо и достаточно, чтобы H было сепарабельным и бесконечномерным.*

Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изоморфны.

В пространстве l_2 полной ортонормированной системой является система $e_k = (0,...,0,1,0, ...)$ (единица стоит на k-ом месте).

В пространстве $L_2[-1,1]$ примером полной ортонормированной системы является $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\pi t, \sin\pi t, \ldots, \cos k\pi t, \sin k\pi t, \ldots$ или $(e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ik\pi t}), k \in \mathbf{Z}$.

В пространстве $L_2[0,1]$ система $(e^{2\pi ikt}), k \in \mathbf{Z}$ является полной ортонормированной.

Б. Задачи к лабораторной работе

Необходимые понятия и теоремы см. выше.

Литература: [1] стр. 161 - 179, [2] стр. 145 – 169, [7] стр. 110-117, 245-249, [8] стр. 137-139, 150-154, [9] стр. 143-167, [11] стр. 77-85, [14] стр.41-48, 57-59, 100-114, [15] стр.26-43.

1. Проверить аксиомы скалярного произведения для функции $\omega : L \times L \to \mathbf{C}$, где L - заданное линейное пространство над полем **C**.

	L	$\omega(x, y)$
1.1	l_2	$\sum_n (1/n) x_n \overline{y}_n$
1.2	$C^{(1)}[a,b]$	$\int_a^b (x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)})dt$
1.3	$C[a,b]$	$\int_a^b e^{-t} x(t)\overline{y(t)}dt$
1.4	Пространство $BC(\mathbf{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x(t)\overline{y(t)}dt$
1.5	Пространство l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей	$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x_n \overline{y_n}$
1.6	Пространство c всех сходящихся числовых последовательностей	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x_n \overline{y_n}$
1.7	$C([a,b] \times [a,b])$	$\int_a^b \int_a^b t x(s,t)\overline{y(s,t)}dsdt$
1.8	Пространство c_0 всех сходящихся к нулю числовых последовательностей	$\sum_{n \in N} n^{-\frac{3}{2}} x_n \overline{y}_n$
1.9	$C[0,1]$	$\int_a^b t^{-\frac{1}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$

1.10	$L_2([0,1]\times[0,1])$	$\int_0^1\int_0^1 x(s,t)\overline{y(s,t)}dsdt$
1.11	$\{x\in C[0,+\infty) \mid \int_0^\infty \lvert x(t)\rvert^2\ tdt<\infty\}$	$\int_0^\infty x(t)\overline{y(t)}tdt$
1.12	$\{x\in C(R) \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2\ t^2dt<\infty\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}t^2dt$
1.13	$l_2(Z):=\{(x_n)_{n\in Z} \mid \sum_{n\in Z}\lvert x_n\rvert^2<\infty\}$	$\sum_{n\in Z} x_n\overline{y}_n$
1.14	$\{x\in C(R^2) \mid \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(s,t)\rvert^2 e^{-\lvert st\rvert}dsdt<\infty\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s,t)\overline{y(s,t)}e^{-\lvert st\rvert}dsdt$

2. В гильбертовом пространстве H найдите проекцию вектора x_0 на заданное подпространство L.

	H	x_0	L
2.1	l_2	$x_0(k)=1/2^k$	$\{\alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in R, x(k)=1/7^k, y(k)=1/8^k\}$
2.2	l_2	$x_0(k)=1/3^k$	$\{\alpha x+\beta y \mid \alpha,\beta\in R, x(k)=1/5^k, y(k)=1/6^k\}$
2.3	$L_2[-\pi,\pi]$	$t+1$	$\{x \mid \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos tdt=\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin tdt=0\}$
2.4	$L_2[0,1]$	t	$\{x \mid \int_0^1 x(t)dt=\int_0^{0,5} x(t)tdt=0\}$
2.5	l_2	$x_0(k)=1/2^k$	$\{x\in l_2 \mid \sum_{k=1}^\infty x(k)/3^k=0, x(1)=x(5)\}$
2.6	$L_2[-\pi,\pi]$	$t-2$	$\{x \mid \int_{-\pi}^{0} x(t)\cos tdt=\int_0^{\pi} x(t)\sin tdt=0\}$
2.7	$L_2[0,1]$	$t+1$	$\{x \mid \int_0^1 x(t)dt=\int_0^{0,5} x(t)tdt=0\}$
2.8	l_2	$x_0(k)=1/k$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in R, x_1=(1,1,0,0,\dots), x_2=(1,0,0,\dots)\}$
2.9	l_2	$(0,1,1,2,0,\dots)$	$\{x\in l_2 \mid \sum_{k=1}^\infty x(k)/2^k=0, x(2)=0\}$
2.10	l_2	$x_0(k)=1/3^k$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in R, x_1=(1,0,1,0,0,\dots),$ $x_2=(1,1,1,0,0,\dots)\}$
2.11	l_2	$(1,1,0,0,\dots)$	$\{x \mid \sum_{k=2}^\infty x(2k)/k^2=0, x(2)+x(3)=x(2)-x(4)=0\}$
2.12	l_2	$x_0(k)=1/2^k$	$\{x\in l_2 \mid \sum_{k=1}^\infty x(2k+1)/2^k=0, x(1)-2x(3)=0\}$
2.13	l_2	$x_0(k)=1/3^k$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in R, x_1=(1,1/2,1/4,\dots),$ $x_2=(1,0,1,0,0,\dots)\}$

2.14	l_2	$(1,0,1/2,0,\ldots,0,1/2^k,0,\ldots)$	$\{\alpha x_1+\beta x_2 \mid \alpha,\beta\in R, x_1=(0,1,1,0,\ldots), x_2=(1/2,1/4,1/8,\ldots)\}$
2.15	$L_2[-1,1]$	e^t	$\{x \mid x(t)=x(-t), \int_0^1 x(t)dt=0\}$
2.16	$L_2[0,1]$	$\cos t$	$\{\alpha t^2+\beta t+\gamma \mid \alpha,\beta,\gamma\in R\}$
2.17	$L_2[-2,2]$	$\sin t$	$\{x \mid x(t)e^t=x(-t), \int_{-2}^0 x(t)dt=0\}$
2.18	$L_2[-1,1]$	$1+t^2$	$\{x \mid \int_0^1 x(t)tdt=\int_{-1}^1 x(t)t^2dt=0\}$
2.19	$L_2[-1,1]$	$\sin\pi t+\cos\pi t$	$\{x \mid x(t)=-x(-t), \int_0^1 x(t)t^2dt=0\}$
2.20	$L_2[-\pi,2\pi]$	$\cos t - 3$	$\{\alpha\sin t+\beta \mid \alpha,\beta\in R\}$
2.21	$L_2[1/2,2]$	$1+t$	$\{x \mid x(t)=x(1/t), \int_1^2 x(t)dt=0\}$
2.22	$L_2[1/2,2]$	t^2	$\{x \mid x(t)=-x(1/t), \int_{0,5}^1 x(t)dt=0\}$
2.23	$L_2[-5,5]$	$1-t$	$\{x \mid x(t)=x(-t), \int_0^1 x(t)t^2dt=0\}$
2.24	$L_2[-2,2]$	e^t	$\{x \mid x(t)=-x(-t), \int_{-1}^0 x(t)tdt=0\}$
2.25	$L_2[-1,1]$	t^2	$\{x \mid x(t)=x(-t), \int_0^1 x(t)tdt=0\}$

3. Докажите, что в указанном нормированном пространстве X со стандартной нормой нельзя ввести скалярное произведение, порождающее эту норму.

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
X	$C[0,1]$	l_1	$C^{(1)}[0,1]$	l_∞	$L_1[0,1]$	c_0	l_3
	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14
X	$C([0,1]^2)$	$C^{(2)}[0,1]$	$BC(\mathbf{R})$	$L_3[0,1]$	$L_1([0,1]^2)$	l_5	c

4. Вычислите угол между векторами x,y : а) в пространстве H_1, б) в пространстве H_2.

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
x	$\sin 3t$	t	e^{-t}	$\sin\pi t$	t	t^2	$\sin\pi t$
y	$\cos 5t$	t^2	e^{-2t}	$\sin t$	$\cos t$	$\sin t$	$\cos\pi t$

H_1	$L_2[-\pi,\pi]$	$L_2[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[-1,1]$
H_2	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$	$L_2[0,3]$
	4.8	4.9	4.10	4.11	4.12	4.13	4.14
x	e^t	1	$x(k)=1/k$	$x(k)=e^{-k}$	t	1	t
y	t	st	$(0,1,0,...)$	$(1,0,0...)$	t^2	t^3	1
H_1	см.зад.1.2	см.зад.1.7	l_2	l_2	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[-1,1]$
H_2	см.зад.1.3	см.зад.1.10	см.зад.1.5	см.зад.1.6	см.зад.1.2	см.зад.1.9	$L_2[0,1]$

5. Проверьте, что система векторов (φ_n) является ортогональным базисом пространства H.

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
H	см.зад.1.1	l_2	см.зад.1.5	см.зад.1.6	см.зад.1.8	см.зад.1.13	$L_2[0,1]$
φ_n	$e_n,\ n\in\boldsymbol{N}$	$e_n,\ n\in\boldsymbol{N}$	$e_n,\ n\in\boldsymbol{N}$	$e_n,\ n\in\boldsymbol{N}$	$e_n,\ n\in\boldsymbol{N}$	$f_n,\ n\in\boldsymbol{Z}$	$e^{2\pi int},\ n\in\boldsymbol{Z}$
	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14
H	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[0,\pi]$	$L_2[-\pi,\pi]$	$L_2[0,2\pi]$	$L_2[-1,1]$
φ_n	$\sin \pi nt,\ n\in\boldsymbol{N}$	$\cos \pi nt,\ n\in\boldsymbol{N}$	$\sin nt,\ n\in\boldsymbol{N}$	$e^{2int},\ n\in\boldsymbol{Z}$	$e^{int},\ n\in\boldsymbol{Z}$	$e^{int},\ n\in\boldsymbol{Z}$	$1, \cos n\pi t, \sin n\pi t,\ n\in\boldsymbol{N}$

(мы полагаем $e_n = (0,...,0,1,0,...), f_n = (...,0,1,0,...)$; единица стоит на n-ом месте).

6. Для данного подмножества M гильбертова пространства H найдите ортогональное дополнение $M^{\perp}$.

	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7
H	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,\infty)$	$L_2[-1,1]$	$L_2(\boldsymbol{R})$	$L_2[-\pi,\pi]$	$L_2[0,1]$	l_2
M	$\{x \mid x(t)=0$ при $t<0\}$	$\{x \mid x(t)=0$ при $t>1\}$	$\{x \mid \int_{-1}^{1} x(t)dt=0\}$	$\{x \mid \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-t}dt=0\}$	$\{x \mid \int_{-\pi}^{0} x(t)\sin t\,dt=0\}$	$\{x \mid x(t)=0$ при $t>1/2\}$	$\{x_1=x_3=0\}$
	6.8	6.9	6.10	6.11	6.12	6.13	6.14
H	l_2	l_2	l_2	l_2	l_2	l_2	$L_2[0,1]$
M	$\{x_1+x_2=0\}$	$\{x_1=x_2\}$	$\{x_{2n}=0,\ n\in\boldsymbol{N}\}$	$\{x_{2n-1}=0,\ n\in N\}$	$\{x_1=x_3=...\}$	$\{x_2=x_4=...\}$	$\{x \mid \int_0^1 x(t)t\,dt=0\}$

7. Применить процесс ортогонализации к векторам x_1, x_2, x_3 в гильбертовом пространстве H.

	H	x_1, x_2, x_3
7.1	l_2	$x_1 = (1,1,0,...)$, $x_2 = (1,1/2,1/2^2,...)$, $x_3 = (0,1,1,0,...)$
7.2	l_2 с весом p, $p(k)=1/2^k$	$x_1 = (1/3,1/3^2,1/3^3,...)$, $x_2 = (1,0,0,...)$, $x_3 = (1,0,1,0,0,...)$
7.3	l_2	$x_1 = (1/2,0,1/4,0,...)$, $x_2 = (0,1,1,0,0,...)$, $x_3 = (0,0,1,1,0,...)$
7.4	l_2 с весом p, $p(k)=1/2^k$	$x_1 = (1,0,1,0,0,...)$, $x_2 = (1,0,0,...)$, $x_3 = (1,1,1,0,0,...)$
7.5	l_2	$x_1 = (1/2,1/2^2,1/2^3,...)$, $x_2 = (1,0,-1,0,...)$, $x_3 = (-1,1,1,0,0,...)$
7.6	l_2 с весом p, $p(k)=k$	$x_1 = (1,1,-1,0,...)$, $x_2 = (1,-1,-1/3,0,0,...)$, $x_3 = (1,-1,0,0,...)$
7.7	l_2	$x_1 = (1/4,1/16,1/64,...)$, $x_2 = (1,0,-1,0,0,...)$, $x_3 = (1,-1,0,0,...)$
7.8	l_2 с весом p, $p(k)=1/3^k$	$x_1 = (1,0,1/2,0,1/4,0,...)$, $x_2 = (1,0,-1,0,...)$, $x_3 = (0,1,1/2,0,0,...)$
7.9	$L_2[-1,1]$	$x_1(t)= t$, $x_2(t)=2t - t^2$, $x_3(t) = e^t$
7.10	$L_2[-1,1]$ с весом e^t	$x_1(t)= t + t^2$, $x_2(t)=1 + t^2$, $x_3(t) = e^t$
7.11	$L_2[-2,2]$	$x_1(t)= \cos \pi t$, $x_2(t)= \sin \pi t$, $x_3(t) = t - 8$
7.12	$L_2[-\pi, \pi]$ с весом $\cos t$	$x_1(t)= \cos t$, $x_2(t)= \sin t$, $x_3(t) = 3t^2 - 1$
7.13	$L_2[0,1]$	$x_1(t)= t$, $x_2(t)=2t - t^2$, $x_3(t) = e^t$
7.14	$L_2[0,1]$ с весом t	$x_1(t)= t + 2$, $x_2(t)=t - 3$, $x_3(t) = e^t + 1$
7.15	$L_2[-1,1]$	$x_1(t)= \cos \pi t + 2$, $x_2(t)= 1$, $x_3(t) = e^t + 1$
7.16	$L_2[-1,1]$ с весом t^2	$x_1(t)=t$, $x_2(t)=1 - t^2$, $x_3(t) = t^3$

8. В гильбертовом пространстве H найти высоту $АД$ треугольника ABC. Изобразить на плоскости равный ему треугольник.

	H	A	B	C
8.1	$L_2[0,1]$	1	t	t^2
8.2	$L_2[-1,1]$	1	t	t^2
8.3	$L_2[0, \pi]$	$\sin t$	$\sin 2t$	$\cos t$
8.4	$L_2[0,1]$	t	t^2	t^3
8.5	$L_2[0,1]$	1	e^t	e^{2t}
8.6	$L_2[0,2\pi]$	e^{it}	e^{-it}	1
8.7	l_2	$(0,0,...)$	$(1/2,1/2^2,1/2^3,...)$	$(1/3,1/3^2,1/3^3,...)$
8.8	l_2	$(1,1,1,0,0,...)$	$(1/2,1/2^2,1/2^3,...)$	$(1/4,1/4^2,1/4^3,...)$
8.9	l_2	$(1/4,1/4^2,1/4^3,...)$	$(1/2,1/2^2,1/2^3,...)$	$(1/3,1/3^2,1/3^3,...)$
8.10	l_2	$(0,0,...)$	$(1/4,1/4^2,1/4^3,...)$	$(1/3,1/3^2,1/3^3,...)$

9. В пространстве $L_2[-1,1]$ функцию $x(t)$ с точностью до ε приблизить тригонометрическими многочленами.

	ε	$x(t)$		ε	$x(t)$
9.1	10^{-2}	t	9.2	10^{-2}	$2\sin\pi t + 1$
9.3	10^{-3}	$1 + {}^2t$	9.4	10^{-3}	$t - 3t^2$
9.5	10^{-2}	$1 - t + t^3$	9.6	10^{-2}	$6t - 1$
9.7	10^{-3}	$1 + t^2$	9.8	10^{-3}	$1 - t$
9.9	10^{-2}	$2t + t^2$	9.10	10^{-2}	$1 + 3t$

10. С помощью разложения в ряд Фурье в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ решить интегральное уравнение $x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds + y(t)$, где $K(t) - 2\pi$ -периодическая функция.

	$y(t)$	$K(t)$		$y(t)$	$K(t)$
10.1	$\cos t$	$\lvert t\rvert - 1, \lvert t\rvert \le \pi$	10.2	$\cos^2 t + 1$	$3e^{\lvert t\rvert} + \lvert t\rvert,\ \lvert t\rvert \le \pi$
10.3	$t - 3$	$2t^2 + 1, \lvert t\rvert \le \pi$	10.4	$\sin t + \cos^2 t$	$\operatorname{ch} t - 1,\ \lvert t\rvert \le \pi$
10.5	$t - \cos 3t$	$\lvert t\rvert - 2t^2, \lvert t\rvert \le \pi$	10.6	$1 - \lvert t\rvert$	$\lvert sh\rvert + t^2,\ \lvert t\rvert \le \pi$
10.7	$t - 1 + \sin t$	$3\cos t,\ \lvert t\rvert \le \pi$	10.8	$t - \cos t$	$t\sin t,\ \lvert t\rvert \le \pi$
10.9	$\sin^2 t - 1$	$\lvert \sin t\rvert,\ \lvert t\rvert \le \pi$	10.10	$t\sin t - 1$	$\cos^2 t,\ \lvert t\rvert \le \pi$

11. Решить уравнение $x(t) - ax(\{t - h\}) = y(t)$ разложением в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,1]$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа).

	a	h	$y(t)$
11.1	$1/2$	$3/2$	$\sin 2\pi t - 3\cos\pi t$
11.2	$1/3$	$1/2$	$2t^3 - 3t + 5$
11.3	$1/3$	$1/4$	$2t - 3\sin\pi t + 1$
11.4	$1/6$	$1/3$	$1 + 2\lvert t\rvert - \sin\pi t$
11.5	$1/4$	$1/4$	$t\sin\pi t + t^2$
11.6	$1/4$	$1/3$	$3\cos\pi t - t$
11.7	$1/2$	$1/5$	$2t + \cos\pi t$
11.8	$3/8$	$1/8$	$2t - 4\cos\pi t$
11.9	$1/5$	$1/3$	$\cos^2\pi t - 3t + 2$
11.10	$3/10$	$1/7$	$2\cos\pi t - t\sin\pi t$