

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Практическое руководство по выполнению  
лабораторных работ для студентов  
математического факультета**

**Введение в анализ**

**Гомель 2012**

УДК 519.667(075.8)  
ББК 22.161я73  
М 34

**Авторы**

А.П. Старовойтов, А.В. Гаврилюк, Ю.А. Ермоленко,  
Г.Н. Казимиров, Ж.Н. Кульбакова, И.В. Парукевич

**Рецензенты:**

**В.Н. Семенчук**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;

**А.Н. Старовойтов**, кандидат физико-математических наук, доцент, исполняющий обязанности заведующего кафедрой прикладной математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

**М34 Математический анализ.** Введение в анализ: практическое руководство по выполнению лабораторных работ для студентов математического Факультета / А.П. Старовойтов [и др.]; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 44с.

ISBN

Гаврилюк, А.В. Введение в анализ / А.П. Старовойтов. – 2012. – 44 с.

Лабораторные работы разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика». В пособии содержится материал по темам «Элементы теории множеств и математической логики», «Отображения и числовые функции», «Вещественные числа».

Пособие адресовано студентам математического факультета.

УДК 519.667(075.8)

ББК 22.161я73

М 34

ISBN© 978-985-439-613-2

УО «Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины», 2012

## Содержание

<b>Введение</b> .....	4
<b>Лабораторная работа №1</b> «Элементы теории множеств и математической логики».....	5
<b>Лабораторная работа №2</b> «Отображения и функции».....	12
<b>Лабораторная работа №3</b> «Числовые функции».....	20
<b>Лабораторная работа №4</b> «Вещественные числа».....	32
<b>Литература</b> .....	39

## **Введение.**

Лабораторный практикум по математическому анализу составлен в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Пособие «Введение в анализ» содержит 4 лабораторные работы по следующим темам: элементы теории множеств и математической логики, отображения и числовые функции, вещественные числа, которые излагаются в 1 семестре обучения. Каждая лабораторная работа содержит наборы заданий с примерами решения типовых задач. Нумерация таблиц и рисунков сквозная, нумерация заданий своя в каждой лабораторной работе. При составлении лабораторного практикума авторы использовали литературу, список которой приводится в конце пособия. Материал пособия подготовили: Гаврилюк А.В., Ермоленко Ю.А., Казимиров Г.Н., Кульбакова Ж.Н., Парукевич И.В., Старовойтов А.П.

Лабораторный практикум по математическому анализу предназначен, с одной стороны, для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». С другой стороны, лабораторный практикум может быть использован при проведении практических занятий и формирования индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

## Лабораторная работа №1

### Элементы теории множеств и математической логики

*Необходимые понятия и теоремы:* операции над множествами, равенство множеств, декартово произведение множеств, высказывания и формулы алгебры высказываний, таблица истинности, кванторы, важнейшие тавтологии.

*Литература:* [1] с. 5 – 16, [2] с. 9 – 2, [3] с. 413 – 23.

**1** Составьте подмножества множества  $A$  элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа.

№	A	№	A
1.1	$\left\{-20; -1; \frac{3}{4}; 2; 0\right\}$	1.11	$-12; 0; 21; 23; 27$
1.2	$\left\{-10; -\frac{3}{5}; 0; 2; 13; 7\right\}$	1.12	$2, 5; 2, 6; 2, 7; 2, 8; 2, 9; 3$
1.3	$\left\{1; 2; 3; 17; \frac{2003}{10}\right\}$	1.13	$2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18$
1.4	$\left\{0; 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$	1.14	$; 3; 7; 9; 11; 13; 15; 17$
1.5	$2, 5; 3, 5; 6, 7; 12$	1.15	$-3; 3; -4; 4; -5; 5; -6; 6$
1.6	$-10^4; -10^3; -10^2; -10; 0; 1; 10^2$	1.16	$\left\{;\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}\right\}$
1.7	$\left\{-7; -5; -3; -1; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}\right\}$	1.17	$\left\{10; 100; 1000; 3\frac{1}{4}; 5\frac{2}{4}\right\}$
1.8	$\left\{-\frac{9}{10}; -\frac{8}{10}; -\frac{7}{10}; -\frac{6}{10}\right\}$	1.18	$\left\{-3; -9; -12; -15\frac{3}{4}\right\}$
1.9	$24; 25; 26; 27; 28$	1.19	$\left\{7; 12; 4; 48; 77\frac{1}{3}\right\}$
1.10	$\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}\right\}$	1.20	$\left\{22; 22\frac{1}{5}; 22\frac{2}{5}; 23\right\}$

**2** Найти пересечение, объединение, разность множеств А и В.

№	A	B	№	A	B
2.1	2;4;6;8;10;...	4;8;12;16;20;...	2.11	-10;-100;-1000;...	-10;-20;-30;...
2.2	3;6;9;12;15;...	9;18;27;36;...	2.12	-4;-8;-12;-16;-20;...	-8;-16;-24;...
2.3	4;8;12;16;...	8;16;24;...	2.13	$\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right\}$	$\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots\right\}$
2.4	5;10;15;20;...	10;20;30;...	2.14	$\left\{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots\right\}$	$\left\{1; \frac{1}{9}; \frac{1}{81}; \dots\right\}$
2.5	6;12;18;24;...	3;6;9;12;15;...	2.15	0,1;0,01;0,001;...	0,1;0,2;0,3;...
2.6	8;16;24;...	2;4;6;8;10;...	2.16	-1;-2;-3;-4;...	-1;-3;-5;-7;...
2.7	9;18;27;...	3;6;9;12;15;...	2.17	-5;-10;-15;-20;...	-10;-10 <sup>2</sup> ;-10 <sup>3</sup> ;...
2.8	10;10 <sup>2</sup> ;10 <sup>3</sup> ;...	10;20;30;...	2.18	-5;-10;-15;-20;...	-10;-20;-30;...
2.9	2;4;6;8;...	2;4;8;16;...	2.19	$\left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{15}; \dots\right\}$	$\left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \dots\right\}$
2.10	3;6;9;12;...	1;3;5;7;9;...	2.20	0,1;0,2;0,3;...	$\left\{0; \frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \dots\right\}$

**3** В каком из соотношений  $\subset, \supset, =$  находятся множества А и В?

№	A	B	№	A	B
3.1	$\mathbb{Z} \setminus -1; 0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	3.11	$0; 1 \cap \mathbb{Q}$	$0; 2 \setminus \mathbb{Z}$
3.2	$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{Q} \setminus 0; 1; 2; \dots$	3.12	$[0; 1] \cap (\{1\} \cup \{0\})$	$([0; 1] \setminus \{1\}) \cup \{0\}$
3.3	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{Q} \setminus 0; 1; 2; \dots$	3.13	$([0; 2] \setminus [0; 1]) \cap [1; 3]$	$([0; 2] \cap [1; 3]) \setminus [0; 1]$
3.4	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$	3.14	$\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
3.5	$\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$	3.15	$(-\infty; 0] \cap \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
3.6	$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	3.16	$(A \cap B) \cup C$	$(A \cup C) \cap (B \cup C)$
3.7	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	3.17	$(A \setminus B) \cap C$	$(A \cap C) \setminus B$
3.8	$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	3.18	$A \setminus B$	$A \setminus (A \cap B)$
3.9	$(-\infty; 0)$	$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	3.19	$A$	$(A \cap C) \cup (A \setminus B)$
3.10	$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$(-\infty; 0] \cap \mathbb{Z}$	3.20	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**4** Найти и изобразить декартово произведение множеств  $A$  и  $B$ .

№	A	B	№	A	B
4.1	[0;1]	[0;1]	4.11	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
4.2	[0;2]	[-1;1]	4.12	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)$
4.3	(0;3)	[1;2)	4.13	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
4.4	(1;2]	(3;4]	4.14	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; +\infty)$
4.5	{1,2,3}	{3,4,5}	4.15	$(-\infty; +\infty)$	[0;1]
4.6	{1,2,5}	{3,6,7}	4.16	[0;2]	$(-\infty; +\infty)$
4.7	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	4.17	$[0;1] \cup [3;4]$	[2;5]
4.8	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0)$	4.18	$[-1;0] \cup [1;2]$	$[0; +\infty)$
4.9	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$	4.19	$\mathbb{N}$	$(-\infty; +\infty)$
4.10	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	4.20	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$

**5** Каким из знаков  $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$  связаны высказывания  $A$  и  $B$  (доказать). Является ли  $A$  необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для  $B$ ? Здесь  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $D = b^2 - 4ac$ .

№	A	B	№	A	B
1	2	3	4	5	6
5.1	$f$ принимает только положительные значения	$a > 0$	5.11	множеством значений $f$ является $[-\frac{D}{4a}; +\infty)$	$a > 0$
5.2	$f$ принимает только отрицательные значения	$a < 0$	5.12	множеством значений $f$ является $(-\infty; -\frac{D}{4a}]$	$a < 0$
5.3	$f$ принимает только неотрицательные значения	$D \leq 0$	5.13	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a} > 0$
5.4	$f$ принимает только положительные значения	$a > 0$ и $D < 0$	5.14	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a} < 0$
5.5	$f$ принимает только отрицательные значения	$a < 0$ и $D < 0$	5.15	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a} > 0$ и $\frac{c}{a} > 0$

1	2	3	4	5	6
5.6	$f$ принимает только неотрицательные значения	$a > 0$ и $D \leq 0$	5.16	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a} < 0$ и $\frac{c}{a} > 0$
5.7	$f$ принимает только неположительные значения	$a < 0$ и $D \leq 0$	5.17	уравнение $f(x) = 0$ имеет 1 положительный и 1 отрицательный корень	$\frac{c}{a} < 0$
5.8	$f$ принимает положительные и отрицательные значения	$D > 0$	5.18	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a} > 0$ , $\frac{c}{a} > 0$ и $D > 0$
5.9	множеством значений $f$ является $[-2; +\infty)$	$a > 0$	5.19	уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a} < 0$ , $\frac{c}{a} > 0$ и $D > 0$
5.10	множеством значений $f$ является $(-\infty; 4]$	$a < 0$	5.20	уравнение $f(x) = 0$ имеет неотрицательные корни	$-\frac{b}{a} \geq 0$ , $\frac{c}{a} \geq 0$ и $D \geq 0$

## 6 Записать с помощью кванторов высказывание и его отрицание

**6.1** Все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \geq m$ .

**6.2** В числовом множестве  $X$  существует элемент  $x_0$  такой, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \geq x_0$ .

**6.3** Все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \leq M$ .

**6.4** В числовом множестве  $X$  существует элемент  $x_0$  такой, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \leq x_0$ .

**6.5** Существует число  $M$  такое, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \leq M$ .

**6.6** Во всяком подмножестве  $B$  числового множества  $X$  существует элемент  $x_0$  такой, что все элементы  $x$  множества  $B$  удовлетворяют условию  $x \leq x_0$ .

**6.7** Существует число  $m$  такое, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \geq m$ .



- 6.8** Во всяком подмножестве  $B$  числового множества  $X$  существует элемент  $x_0$  такой, что все элементы  $x$  множества  $B$  удовлетворяют условию  $x \geq x_0$ .
- 6.9** Существуют числа  $m$  и  $M$  такие, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $m \leq x \leq M$ .
- 6.10** Все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \leq M$  и для любого числа  $M' < M$  существует элемент  $x'$  из множества  $X$  такой, что  $x' > M'$ .
- 6.11** Существуют элементы  $x$  числового множества  $X$ , удовлетворяющие условию  $x \geq m$ .
- 6.12** Все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \geq m$  и для любого числа  $m' > m$  существует элемент  $x'$  из множества  $X$  такой, что  $x' < m'$ .
- 6.13** Существуют элементы  $x$  числового множества  $X$ , удовлетворяющие условию  $x \leq M$ .
- 6.14** Существует число  $M$  такое, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \leq M$  и для любого числа  $M' < M$  существует элемент  $x'$  из множества  $X$  такой, что  $x' > M'$ .
- 6.15** Для любого числа  $M$  существует элемент  $x$  числового множества  $X$  такой, что  $x > M$ .
- 6.16** Существует число  $m$  такое, что все элементы  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяют условию  $x \geq m$  и для любого числа  $m' > m$  существует элемент  $x'$  из множества  $X$  такой, что  $x' < m'$ .
- 6.17** Для любого числа  $m$  существует элемент  $x$  числового множества  $X$  такой, что  $x < m$ .
- 6.18** Существует число  $c$  такое, что любой элемент  $x$  числового множества  $X$  удовлетворяет условию  $x \leq c$  и любой элемент  $y$  числового множества  $Y$  удовлетворяет условию  $y \geq c$ .
- 6.19** Для любых чисел  $m$  и  $M$  существуют элементы  $x$  и  $y$  числового множества  $X$  такие, что  $x < m$  и  $y > M$ .
- 6.20** Для любых непустых числовых множеств  $X$  и  $Y$  таких, что любой элемент  $x$  из множества  $X$  меньше либо равен любому элементу  $y$  из множества  $Y$ , существует число  $M$  такое, что  $x \leq M \leq y$  для любых элементов  $x$  из  $X$  и  $y$  из  $Y$ .

## Решение типовых примеров

**1.20** Составьте подмножества множества  $A$  элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа.

*Решение.* Множество  $B$  называется подмножеством множества  $A$ , если любой элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ . Так как множество натуральных чисел  $\mathbb{N} = 1; 2; 3; 4; \dots$ , то подмножеством натуральных чисел для  $A$  будет  $22; 23$ . Множество целых чисел  $\mathbb{Z} = \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$ . Поэтому подмножеством целых чисел для  $A$  будет  $22; 23$ . Нечётными называются числа вида  $2n+1$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Поэтому подмножеством нечётных чисел для  $A$  будет  $23$ , поскольку  $23 = 2 \cdot 11 + 1$ . Чётными называются числа вида  $2n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Поэтому подмножеством чётных чисел для  $A$  будет  $22$ , поскольку  $22 = 2 \cdot 11$ . Отрицательными называются числа, расположенные слева от нуля на числовой прямой. Таких во множестве  $A$  нет. Поэтому и подмножеств, состоящих из этих чисел для  $A$  нет. Положительными называются числа, расположенные справа на числовой прямой. Все элементы множества  $A$  являются положительными числами. Поэтому в качестве подмножества положительных чисел для  $A$  можно взять само множество  $A$ .

**2.20** Найти пересечение, объединение, разность множеств

$$A = 0, 1; 0, 2; 0, 3; \dots \text{ и } B = \left\{ 0; \frac{1}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \dots \right\}.$$

*Решение.* Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B = x | x \in A \text{ и } x \in B$ . Поскольку  $0, 1 = \frac{1}{10}$ , а все остальные элементы множества  $B$  меньше любого элемента множества  $A$ , то других общих элементов для  $A$  и  $B$  нет и следовательно в данном случае  $A \cap B = \left\{ \frac{1}{10} \right\}$ . Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B = x | x \in A \text{ или } x \in B$ . Таким образом в объединение множеств  $A$  и  $B$  входят все элементы как множества  $A$ , так и множества  $B$ . В нашем случае  $A \cup B = \left\{ 0; \frac{1}{10}; 0, 2; \frac{1}{20}; 0, 3; \frac{1}{30}; 0, 4; \frac{1}{40}; \dots \right\}$ . Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \setminus B = x | x \in A \text{ и } x \notin B$ . В нашем случае только элемент  $0, 1$  из множества  $A$  принадлежит  $B$ . Поэтому  $A \setminus B = 0; 0, 2; 0, 3; 0, 4; \dots$

**3.20** Выяснить, в каком из соотношений  $\subset, \supset, =$  находятся множества  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  и  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ?

*Решение.* Докажем, что  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Два множества равны, если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

Покажем, что  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Пусть  $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , тогда  $x \in A \setminus B$  или  $x \in B \setminus A$ .

Если  $x \in A \setminus B$ , то  $x \in A$  и  $x \notin B$ . Из того, что  $x \in A$  следует, что  $x \in A \cup B$ , а из того, что  $x \notin B$  следует, что  $x \notin A \cap B$ . Значит  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Аналогично получаем, что  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , если  $x \in B \setminus A$ .

Докажем теперь, что  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Пусть  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , тогда  $x \in A \cup B$  и  $x \notin A \cap B$ . Из того, что  $x \in A \cup B$  следует, что  $x \in A$  или  $x \in B$ , а из того, что  $x \notin A \cap B$  следует, что  $x \notin A$  или  $x \notin B$ . Тогда, если  $x \in A$  и  $x \notin B$ , то  $x \in A \setminus B$ , а, если  $x \in B$  и  $x \notin A$ , то  $x \in B \setminus A$ . Других ситуаций быть не может. Итак,  $x \in A \setminus B$  или  $x \in B \setminus A$ . Значит  $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Равенство  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  доказано.

**4.20** Найти и изобразить декартово произведение множеств  $A = \mathbb{N}$  и  $B = \mathbb{Z}$ .

*Решение.* Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ . В нашем случае  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\}$ . Изобразим множество  $A \times B$  на плоскости

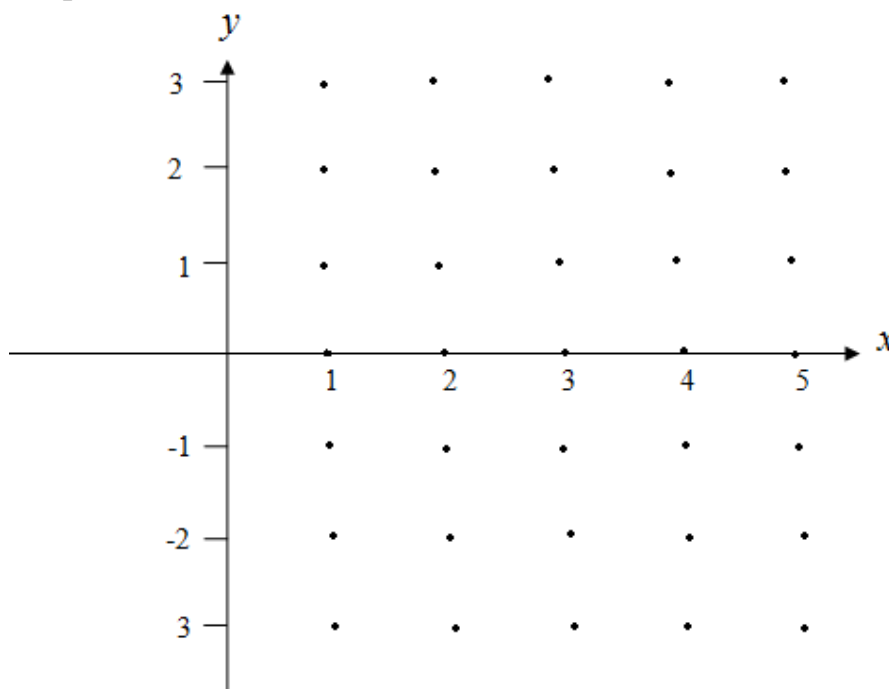


Рисунок 1 – Множество  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\}$

**5.20** Каким из знаков  $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$  связаны высказывания  $A = \{ \text{уравнение } ax^2 + bx + c = 0 \text{ имеет неотрицательные корни} \}$  и  $B = \{ -\frac{b}{a} \geq 0, \frac{c}{a} \geq 0 \text{ и } D \geq 0 \}$  (доказать). Является ли  $A$  необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для  $B$ ? Здесь  $D = b^2 - 4ac$ .

*Решение.* Докажем, что из  $A$  не следует  $B$ . Рассмотрим уравнение  $x^2 + 3x - 4 = 0$ . Оно имеет неотрицательный корень  $x = 1$ . Однако  $-\frac{b}{a} = \frac{-3}{1} = -3 < 0$ .

Докажем, что  $B \Rightarrow A$ . Пусть  $-\frac{b}{a} \geq 0, \frac{c}{a} \geq 0$  и  $D \geq 0$ . Из условия  $D \geq 0$  следует, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корни. Из теоремы Виета следует, что их произведение равно  $\frac{c}{a}$  и поскольку  $\frac{c}{a} \geq 0$ , то либо оба корня имеют одинаковый знак либо один из них равен нулю. Если один из корней равен нулю, то он и является неотрицательным корнем, т.е.  $A$  выполнено. Если же оба корня имеют одинаковый знак, то из теоремы Виета и условия  $-\frac{b}{a} \geq 0$  следует, что их сумма  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \geq 0$ . Поэтому они оба положительные. Значит и в этом случае уравнение имеет неотрицательный корень. Итак импликация  $B \Rightarrow A$  доказана.

**6.20** Записать с помощью кванторов высказывание  $A = \{ \text{Для любых непустых числовых множеств } X \text{ и } Y \text{ таких, что любой элемент } x \text{ из множества } X \text{ меньше либо равен любому элементу } y \text{ из множества } Y, \text{ существует число } M \text{ такое, что } x \leq M \leq y \text{ для любых элементов } x \text{ из } X \text{ и } y \text{ из } Y \}$  и его отрицание

*Решение.* Запишем с помощью кванторов высказывание  $A$  и его отрицание  $\neg A$ :

$$A = \forall X, Y : \forall x \in X, \forall y \in Y \rightarrow x \leq y \exists M : x \leq M \leq y \forall x \in X, \forall y \in Y$$

$$\neg A = \exists X, Y : \forall x \in X, \forall y \in Y \rightarrow x \leq y \wedge \forall M \exists x \in X, \exists y \in Y : x > M \vee y < M$$

Заметим, что высказывание  $A$  представляет собой теорему об отделимости числовых множеств и выполняется всегда. Поэтому высказывание  $\neg A$  ложно.

## Лабораторная работа №2

### Отображения и функции

*Необходимые понятия и теоремы:* отображения, числовые функции, образ, прообраз, сюръекция, инъекция, биекция, график, обратное отображение, композиция отображений

*Литература:* [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

**1** Для отображения  $y = ax^2 + bx + c$  найти коэффициенты  $a, b, c$  так, чтобы это отображение было сюръекцией множества  $X$  на множество  $Y$  и его график проходил через точку  $(x_0, y_0)$ , или доказать, что таких коэффициентов  $a, b, c$  не существует

№	$X$	$Y$	$(x_0; y_0)$	№	$X$	$Y$	$(x_0; y_0)$
1.1	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	$(0; 1)$	1.11	$(-4; 5)$	$(0; 8]$	$(0; 3)$
1.2	$\mathbb{R}$	$[2; +\infty)$	$(0; 4)$	1.12	$(-3; 1]$	$[1; 5]$	$(0; 4)$
1.3	$[2; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(3; 4)$	1.13	$(-\infty; +\infty)$	$[0; 4]$	$(1; 3)$
1.4	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	$(1; 0)$	1.14	$(-\infty; 0]$	$(0; 8]$	$(-1; 4)$
1.5	$\mathbb{R}$	$(-\infty; 1]$	$(0; 1)$	1.15	$(0; 8)$	$[1; 3]$	$(1; 2)$
1.6	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0]$	$(-3; 0)$	1.16	$[4; 10]$	$(1; 5)$	$(5; 4)$
1.7	$[0; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$(2; -1)$	1.17	$(-1; 3)$	$[1; 9)$	$(2; 4)$
1.8	$[1; 6]$	$[2; 8]$	$(2; 4)$	1.18	$(1; 5)$	$(3; 8]$	$(2; 4)$
1.9	$[2; 8]$	$[-3; 9]$	$(3; 5)$	1.19	$(-\infty; 1]$	$(1; 5)$	$(0; 3)$
1.10	$(-3; 8)$	$(-4; 3)$	$(0; 1)$	1.20	$[-2; 4)$	$(-1; 3)$	$(0; 0)$

**2** Для функции  $f(x)$  найти образ множества  $A$  и прообраз множества  $B$

№	$f(x)$	$A$	$B$	№	$f(x)$	$A$	$B$
1	2	3	4	5	6	7	8
2.1	$3x^2 + 6x - 1$	$(-3; 5)$	$(-3; 8)$	2.11	$e^{x-1}$	$(-\infty; 1)$	$(0; 1)$
2.2	$-x^2 + 2x + 1$	$(-4; 0)$	$(-\infty; 0]$	2.12	$2^{-(x+1)}$	$(-\infty; -1)$	$(0; 2]$
2.3	$\sin x$	$\left\{ \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$	2.13	$\ln(x+2)$	$(-2; 3]$	$(-\infty; 3]$
2.4	$\cos 2x$	$\left\{ \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$	2.14	$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$	$(-1; 4]$	$[2; 5]$
2.5	$\operatorname{tg} x$	$\left\{ \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3} \right\}$	2.15	$\cos 2x - 1$	$\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$	$[-1; 0]$

1	2	3	4	5	6	7	8
2.6	$\cos x$	$\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$	$\left(-1; -\frac{1}{2}\right]$	2.16	$\sin(x-1)$	$\left(1; \frac{3}{2}\right)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right)$
2.7	$\cos(-x)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2.17	$\log_{1/2}(x+1)$	$(0; 3)$	$(-\infty; \log_2 3)$
2.8	$ x -1$	$[-4; 1)$	$[5; +\infty)$	2.18	$ x^2 - 5x + 6 $	$(0; 2, 8]$	$\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$
2.9	$ x  +  x-1 $	$[-3; 8]$	$(1; +\infty)$	2.19	$ctg(x+2)$	$(-1; 1)$	$\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$
2.10	$ x-1 -1$	$[0; 1]$	$(2; 4]$	2.20	$y = 2^{-\sqrt{x}}$	$(3; 5]$	$\left(0; \frac{1}{13}\right)$

**3** Если это возможно, найти инъективное, биективное отображение множества  $X$  в  $Y$  или доказать, что такого отображения нет

№	$X$	$Y$	№	$X$	$Y$
3.1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	3.11	$\mathbb{R}$	$-\pi; \pi$
3.2	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	3.12	$\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$	$\mathbb{R}$
3.3	$[0; +\infty)$	$[2; +\infty)$	3.13	$(-1; 1)$	$\mathbb{R}$
3.4	$[3; +\infty)$	$[0; +\infty)$	3.14	$\mathbb{R}$	$(-2; 2)$
3.5	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	3.15	$(0; \pi)$	$\mathbb{R}$
3.6	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	3.16	$2n-1, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
3.7	$\mathbb{R}$	$(-\infty; 0)$	3.17	$2n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
3.8	$(-\infty; 0)$	$\mathbb{R}$	3.18	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
3.9	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	3.19	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
3.10	$[-1; 2]$	$[-4; 8]$	3.20	$\mathbb{N}$	$(0; 1)$

**4** Построить график отображения  $f : X \rightarrow Y$ . Найти  $Y$  и обратное отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , если это возможно, или доказать, что его нет

№	$y = f(x)$	$X$	№	$y = f(x)$	$X$
1	2	3	4	5	6
4.1	$2x^2 + x - 1$	$\left[-\frac{1}{4}; 5\right]$	4.11	$\sin 2x$	$[0; \pi]$

1	2	3	4	5	6
4.2	$\sin x$	$\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$	4.12	$\cos 2x$	$\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$
4.3	$\cos x$	$[\pi; 2\pi]$	4.13	$ctgx$	$(\pi; 2\pi)$
4.4	$y = x^2 - 4x + 3$	$[3; 8]$	4.14	$\sin(x/2)$	$[-\pi; \pi]$
4.5	$e^{ x-1 }$	$[-1; 1]$	4.15	$\cos(x/2)$	$[0; 2\pi]$
4.6	$ x-1 $	$[1; 5]$	4.16	$\sin(x-1)$	$[0; 1]$
4.7	$ x+1 $	$[-2; 3]$	4.17	$\cos(x+1)$	$[0; 1]$
4.8	$ \ln x $	$(0; 1]$	4.18	$\sin(x+2)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
4.9	$e^{ x }$	$[-1; 2]$	4.19	$\cos(x-2)$	$[0; \pi]$
4.10	$tgx$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$	4.20	$tg(x+1)$	$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{8}\right]$

**5** Найти следующие композиции:  $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$  или

доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций  $f$  и  $g$

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
5.1	$2^x$	$x^3$	5.11	$3^{x+1}$	$\log_3 x - 1$
5.2	$x^2$	$\sqrt{x^3}$	5.12	$\arcsin x$	$\sin x$
5.3	$3^x$	$x^2$	5.13	$\arccos x$	$\cos x$
5.4	$x^2$	$\sqrt{x}$	5.14	$\cos x$	$\arccos x$
5.5	$10^x$	$\lg x$	5.15	$\arcsin x$	$\cos x$
5.6	$x^5$	$x+5$	5.16	$\arccos x$	$\sin x$
5.7	$\sin x$	$x-1$	5.17	$\arcsin x$	$e^x$
5.8	$\cos x$	$\ln x$	5.18	$\arccos x$	$\ln x$
5.9	$x+2$	$\ln(x-2)$	5.19	$\arccos x$	$\arcsin x$
5.10	$e^x$	$\ln(x-1)$	5.20	$arctgx$	$\ln x$

## Решение типовых примеров

**1.20** Для отображения  $y = ax^2 + bx + c$  найти коэффициенты  $a, b, c$  так, чтобы это отображение было сюръекцией множества  $X = [-2; 4)$  на множество  $Y = (-1; 3)$  и его график проходил через точку  $(x_0, y_0) = (0; 0)$ , или доказать, что таких коэффициентов  $a, b, c$  не существует.

*Решение.* Очевидно, что при отображении  $y = ax^2 + bx + c$  образом промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка) будет промежуток (убедиться в этом, нарисовав все возможные случаи) или одна точка. Образом включённого левого конца промежутка будет включённый конец промежутка (убедиться геометрически). Поэтому полуинтервал  $[-2; 4)$  не может перейти в интервал  $(-1; 3)$ . Значит указанного отображения, а, следовательно, и чисел  $a, b, c$  не существует.

**2.20** Для функции  $f(x) = 2^{-\sqrt{x}}$  найти образ множества  $A = (3; 5]$  и прообраз множества  $B = \left(0; \frac{1}{13}\right)$ .

*Решение.* Образом множества  $A$  при отображении  $f$  называется множество  $f(A) = f(x) | x \in A$ . Поскольку функция  $y = \sqrt{x}$  возрастает на  $[0; +\infty)$ , то  $\forall x_1, x_2 \in [0; +\infty): x_1 < x_2 \rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ , а функция  $y = \frac{1}{2^x}$  или  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  убывает на  $(-\infty; +\infty)$ , то  $\frac{1}{2^{\sqrt{x_1}}} > \frac{1}{2^{\sqrt{x_2}}}$ . Поэтому функция  $y = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$  убывает на  $[0; +\infty)$ . Отсюда заключаем, что для  $f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$  образ  $f((3; 5]) = \left\{ \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} | x \in (3; 5] \right\} = \left[ \frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} \right)$ , поскольку  $f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$  не может принять любое значение вне  $\left[ \frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} \right)$  при  $x \in (3; 5]$  (в силу убывания) и принимает любое значение  $a \in \left[ \frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} \right)$  в точке  $x_0 = \log_2^2 a \in (3; 5]$  (доказать).

Прообразом множества  $B$  при отображении  $f$  называется множество  $f^{-1}(B) = x | f(x) \in B$ . В нашем случае  $f^{-1}\left(\left(0; \frac{1}{13}\right)\right) = \left\{ x \left| \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} \in \left(0; \frac{1}{13}\right) \right. \right\} =$



$= \left\{ x \mid 0 < \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{13} \right\}$ . Решим неравенство  $0 < \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{13}$ . Левое неравенство выполняется при всех  $x \in [0; +\infty)$  (области определения  $f$ ). Правое перепишем в виде  $\frac{1}{2^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{2^{\log_2 13}}$  или  $\sqrt{x} > \log_2 13$  или  $x > \log_2^2 13$ . Итак  $f^{-1}\left(\left(0; \frac{1}{13}\right)\right) = \log_2^2 13; +\infty$ .

**3.20** Если это возможно, найти инъективное, биективное отображение множества  $X = \mathbb{N}$  в  $Y = (0; 1)$  или доказать, что такого отображения нет.

*Решение.* Рассмотрим отображение  $f : X \rightarrow Y$ , действующее по формуле:  $f(x) = \frac{1}{2^x}$ . Отображение называется инъективным, если оно различные элементы переводит в различные (если  $x_1 \neq x_2$ , то и  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ). Очевидно,  $f$  инъективно. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется биективным, если оно сюръективно, т.е.  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ , и инъективно. Докажем, что нет биективного отображения  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0; 1)$ . Предположим, что такое отображение существует. Тогда оно является сюръективным и каждому действительному числу из  $(0; 1)$  соответствует вполне определённый номер  $n \in \mathbb{N}$ . Значит, все действительные числа из  $(0; 1)$  можно записать в порядке возрастания соответствующих им номеров:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} \dots \\ \alpha_2 &= 0, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} \dots \\ \alpha_3 &= 0, \alpha_1^{(3)} \alpha_2^{(3)} \alpha_3^{(3)} \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим число  $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$  такое, что  $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}, \beta_1 \neq 9, \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}, \beta_2 \neq 9, \beta_2 \neq 0, \beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}, \beta_3 \neq 9, \beta_3 \neq 0, \dots$ . Очевидно, число  $\beta \in (0; 1)$  и не совпадает ни с одним из чисел  $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ . Противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. На самом деле нами доказано, что  $(0; 1)$  не является счётным множеством.

**4.20** Построить график отображения  $f : X \rightarrow Y, f(x) = tg(x + 1)$ , если

$$X = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{8} \right]. \text{ Найти } Y \text{ и обратное отображение } f^{-1} : Y \rightarrow X, \text{ если это}$$

возможно, или доказать, что его нет.

*Решение.* Если  $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{8}\right]$ , то  $x+1 \in \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1+\frac{\pi}{8}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Поэтому графиком функции  $f(x) = \operatorname{tg}(x+1), x \in X$  будет часть графика функции  $f(x) = \operatorname{tg}x, x \in \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1+\frac{\pi}{8}\right]$ , сдвинутая на 1 влево. Нарисуем эти графики (рис.2).

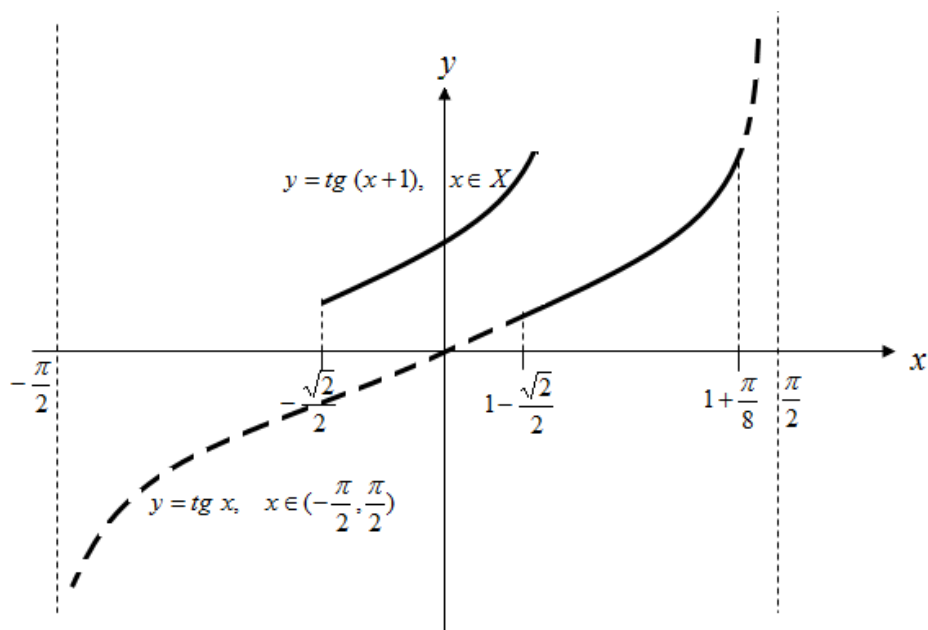


Рисунок 2 – Рисунок к задаче 4.20

Поскольку при  $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$  и  $f(x) = \operatorname{tg}x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  возрастает, то и функция  $f(x) = \operatorname{tg}(x+1), x \in X$  возрастает. Поэтому множеством значений этой функции будет множество  $Y = \left[\operatorname{tg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \operatorname{tg}\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\right]$  и в силу возрастания отображение  $f : X \rightarrow Y$  будет взаимно-однозначным (биективным), следовательно будет существовать обратное отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Найдём его, выразив переменную  $x$  через  $y$  из уравнения  $y = \operatorname{tg}(x+1)$  и учтя, что  $x+1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) : x+1 = \operatorname{arctg}y$  или  $x = \operatorname{arctg}y - 1$ .

Итак,  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}x - 1, x \in Y$  – отображение, обратное к  $f(x) = \operatorname{tg}(x+1), x \in X$ .

**5.20** Найти следующие композиции:  $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$

или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  и  $g(x) = \ln x$ .

*Решение.* Сложная функция  $f(g)$  (или композиция функций  $f$  и  $g$ ) будет определена тогда, когда множество значений  $E(g)$  функции  $g$  содержится в области определения  $D(f)$  функции  $f$ . В нашем случае  $E(g) = (-\infty; +\infty)$ ,  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $D(g) = (0; +\infty)$ ,  $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Так как  $E(g) \subset D(f)$ , то определена функция  $f(g(x)) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ .

Поскольку  $E(f)$  не содержится в  $D(g)$ , то композиция  $g(f)$  на естественных областях не возможна.

$E(f) \subset D(f)$  и значит определена сложная функция  $f(f(x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$ .

$E(g)$  не содержится в  $D(g)$ . Поэтому композиция  $g(g)$  на естественных областях не возможна.

На естественной области определения  $f$  не определена функция  $\frac{1}{f^2}$  (в точке  $x=0$ ) и поэтому не определена функция  $f\left(\frac{1}{f^2}\right)$ .

Областью определения функции  $y = \sqrt{x}$  является множество  $[0; +\infty)$ . Так как множество значений функции  $f$  не содержится в нём, то композиция  $\sqrt{f}$  не возможна на естественной области определения  $f$ .

## Лабораторная работа №3

### Числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: область определения, область значений, графики элементарных функций, сдвиги

Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

1 Найти область определения функции  $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{x}}$	1.11	$\arccos \frac{3x}{1-x}$
1.2	$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x}}$	1.12	$\frac{1}{\sqrt{ x - x+1 }}$
1.3	$\log_x \sin x$	1.13	$\sqrt[4]{(x-1)\cos^2 \pi x}$
1.4	$\log_{-x} \cos x$	1.14	$\sqrt[5]{\ln(x^2+x-1)}$
1.5	$\sqrt{\cos 2x}$	1.15	$\arccos( 1-x + 1+x )$
1.6	$\frac{1}{x-2} \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$	1.16	$\left(\sqrt[6]{\sin x - \frac{1}{2}}\right)^6$
1.7	$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin 3x-1}}$	1.17	$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} + \log_x(x^2-1)$
1.8	$\log_3 \log_2 x$	1.18	$\sqrt{5x-3x^3}$
1.9	$\frac{1}{\sqrt{(\sin x)^2}}$	1.19	$\operatorname{arctg}\left(\ln \cos x  - \frac{1}{2}\right)$
1.10	$\arcsin(2\cos 2x)$	1.20	$\arccos(\lg(10x))$

2 Найти множество значений функции  $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	2	3	4
2.1	$\sqrt{x^2-x-2}$	2.11	$\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$
2.2	$\sqrt[3]{x^2-4x-5}$	2.12	$\sqrt{\cos(2x+1)}$
2.3	$3x-4, x \in [-2; 2]$	2.13	$\cos \sqrt{x^2-6x+5}$
2.4	$3^{\sin x}$	2.14	$\sin \sqrt[4]{3-x^2}$

1	2	3	4
2.5	$2^{-\cos x}$	2.15	$\arccos(x^2 - 10x + 6)$
2.6	$e^{\log_2 x}$	2.16	$\arctg \sqrt[6]{x^2 + 5x + 6}$
2.7	$\sin -\sqrt{x-2}$	2.17	$\arccos(\log_{1/2} x)$
2.8	$\ln(\cos x)$	2.18	$\log_{1/2}(\arcsin x)$
2.9	$\ln(\operatorname{tg} x)$	2.19	$y = \log_2(\log_{1/2}(\cos x))$
2.10	$\arcsin 2^x$	2.20	$y = \arccos(\arcsin x)$

3 Построить график функции  $f(x)$

№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$ x^2 - 4 $	3.11	$4\cos 2x$
3.2	$ \sin 2x $	3.12	$5\sin(x - 2)$
3.3	$\left \cos \frac{x}{2}\right $	3.13	$2\cos \frac{x}{2}$
3.4	$\log_{1/2} x-1 $	3.14	$\sqrt[3]{x+3}$
3.5	$ 3-x^2 $	3.15	$\sqrt[4]{ x }$
3.6	$2^{ x+1 }$	3.16	$\sqrt[5]{x-0,5}$
3.7	$2^{-x-1}$	3.17	$\sqrt[3]{ x+1 }$
3.8	$-\cos 2x$	3.18	$ \sqrt{x+1}-1 $
3.9	$\operatorname{ctg}(-x)$	3.19	$\sqrt{ x-1 }-3$
3.10	$\operatorname{tg}(1-x)$	3.20	$\log_2(x-2)^2$

4 Построить графики функций  $f(x-1)$ ,  $f(x+2)$ ,  $f(x)+3$ ,  $f(x)-4$ ,  $f(2x)$ ,  $f(x/3)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f|x|$ ,  $2f(x)$ ,  $-f(x)$ ,  $f(-x)$ , исходя из графика функции  $f(x)$ , и объяснить такое построение

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	2	3	4
4.1	$\ln x$	4.11	$\operatorname{arctg} x$
4.2	$e^x$	4.12	$\log_{\pi} x$
4.3	$1/x$	4.13	$\log_{1/2} x$

1	2	3	4
4.4	$\sqrt[3]{x}$	4.14	$\sqrt{x+2}$
4.5	$(x-1)^2$	4.15	$ 3x+1 $
4.6	$\cos x$	4.16	$\sin x$
4.7	$-\frac{2}{x}$	4.17	$\frac{3}{x+2}$
4.8	$\arccos x$	4.18	$\log_2(x+2)^2$
4.9	$\arcsin x$	4.19	$\sin(x/2)$
4.10	$tgx$	4.20	$\arcsin(x-1)$

5 Найдите функцию  $f(x)$ , если известно, что

№	Уравнение	№	Уравнение
5.1	$f(x+1) = x^2 + 2x + 2$	5.11	$f(x^3) = \sqrt[3]{x}$
5.2	$f(x-1) = x^2 - 2x + 5$	5.12	$f(\sqrt{x}) = x^3 + 1$
5.3	$f(x - \frac{1}{x}) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$	5.13	$f(\sqrt[3]{x}) = x^9$
5.4	$f(\frac{1}{x}) = x^3 + 1$	5.14	$f(x^3) = 1 - x^2$
5.5	$f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$	5.15	$f(e^x) = e^{2x} + e^x - 1$
5.6	$f(\frac{x}{x+1}) = x^2$	5.16	$f(\ln x) = 2\ln x^2 - 3\ln x + 1$
5.8	$f(x^2) = 1 - x^3$	5.17	$f(\cos x) = 1 + 2\cos 2x$
5.9	$f(x+2) = e^{4-2x-x^2}$	5.18	$f(\sin x) = \cos^4 x - \cos 4x$
5.10	$f(3x) = \ln x^2$	5.19	$f(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x + 1}$
	$f(\frac{x}{4}) = \log_3 x^3$	5.20	$f( x ) = \ln x^6 -  x $

## Решение типовых примеров

**1.20** Найти область определения функции  $f(x) = \arccos(\lg(10x))$ .

*Решение.* Функция  $f(x) = \lg(10x)$  определена, если  $10x > 0$ , а функция  $y = \arccos x$  определена при  $x \in [-1; 1]$ . Поэтому сложная функция  $f(x) = \arccos(\lg(10x))$  будет определена при выполнении двух условий:

$$\begin{cases} 10x > 0 \\ -1 \leq \lg(10x) \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq 1 + \lg x \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \lg x \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \\ \begin{cases} x > 0 \\ 10^{-2} \leq x \leq 10^0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 0,01 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \text{что равносильно условию } x \in [0,01; 1].$$

Итак, областью определения функции  $f(x) = \arccos(\lg(10x))$  является множество  $[0,01; 1]$ .

**2.20** Найти множество значений функции  $f(x) = \arccos(\arcsin x)$ .

*Решение.* Найдём сначала область определения этой функции. Она будет определена для всех  $x$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ -1 \leq \arcsin x \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \sin(-1) \leq \sin(\arcsin x) \leq \sin 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1 \end{cases},$$

что равносильно условию  $x \in [-\sin 1; \sin 1]$ . Поскольку функция  $y = \arcsin x$  возрастает, то для  $x \in [-\sin 1; \sin 1]$  она примет все значения из  $[-1; 1]$  и только их. Поэтому функция  $y = \arccos(\arcsin x)$  примет все значения из  $[0; \pi]$  и только их. Итак, множеством значений функции  $f(x) = \arccos(\arcsin x)$  является  $[0; \pi]$ .

**3.20** Построить график функции  $f(x) = \log_2(x-2)^2$ .

*Решение.* Так как  $a^2 = |a|^2$ , то функция может быть переписана в виде  $f(x) = 2\log_2|x-2|$ . Построим сначала график функции  $y = \log_2|x|$  (рис.3). Он состоит из графика функции  $y = \log_2 x$  и линии, симметричной этому графику относительно оси  $Oy$ , так как в точках  $x$  и  $-x$  функция  $y = \log_2|x|$  принимает одно и тоже значение (чётная).

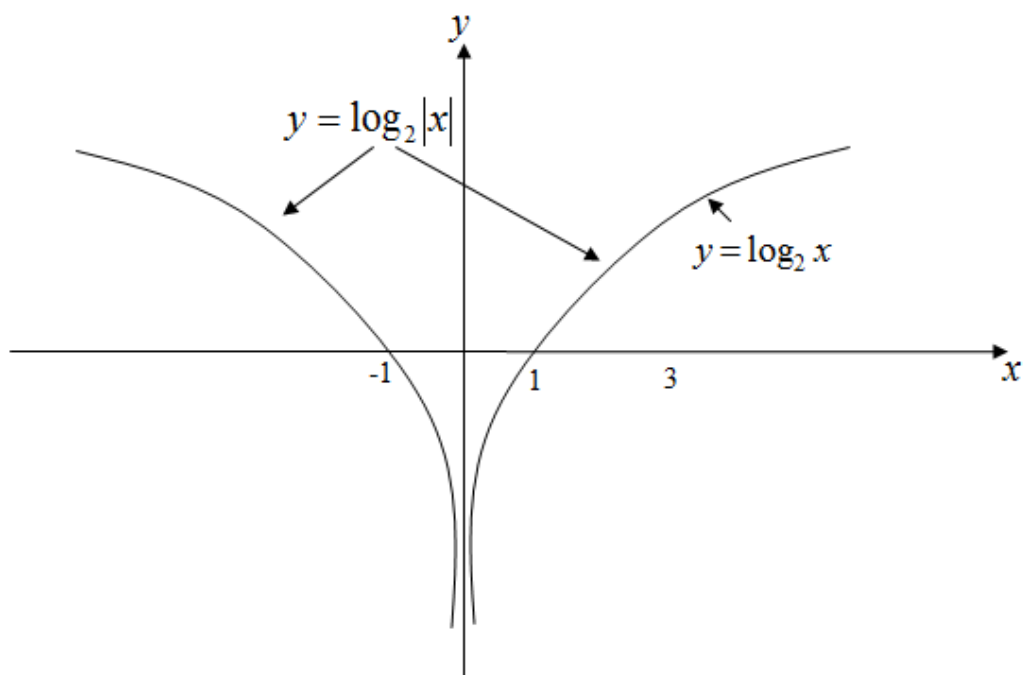


Рисунок 3 – График функции  $y = \log_2|x|$

Далее построим график функции  $y = \log_2|x-2|$  (рис.4), который получается из графика функции  $y = \log_2|x|$  сдвигом вправо на 2 единицы, так как значение функции  $y = \log_2|x-2|$  в точке  $x+2$  совпадает со значением функции  $y = \log_2|x|$  в точке  $x$ .

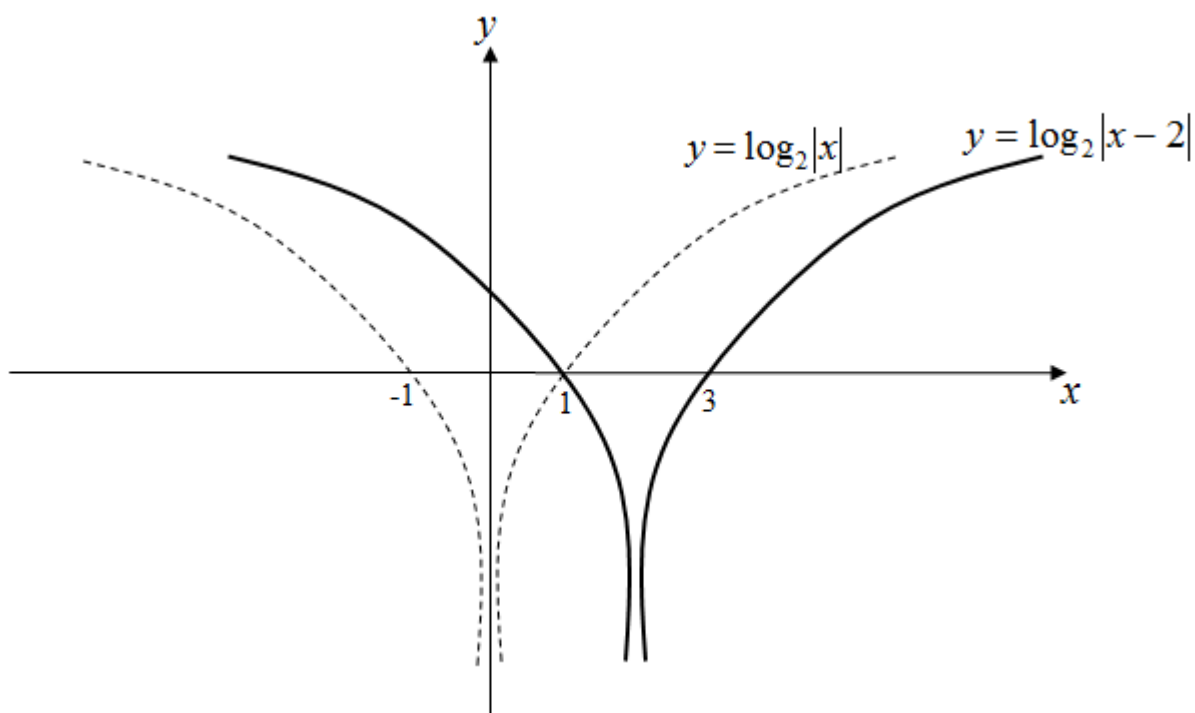


Рисунок 4 – График функции  $y = \log_2|x-2|$



И наконец, строим график функции  $y = 2\log_2|x-2|$  (рис. 5), который получается из графика функции  $y = \log_2|x-2|$  растяжением в 2 раза вдоль оси  $Oy$  относительно точки  $O$ .

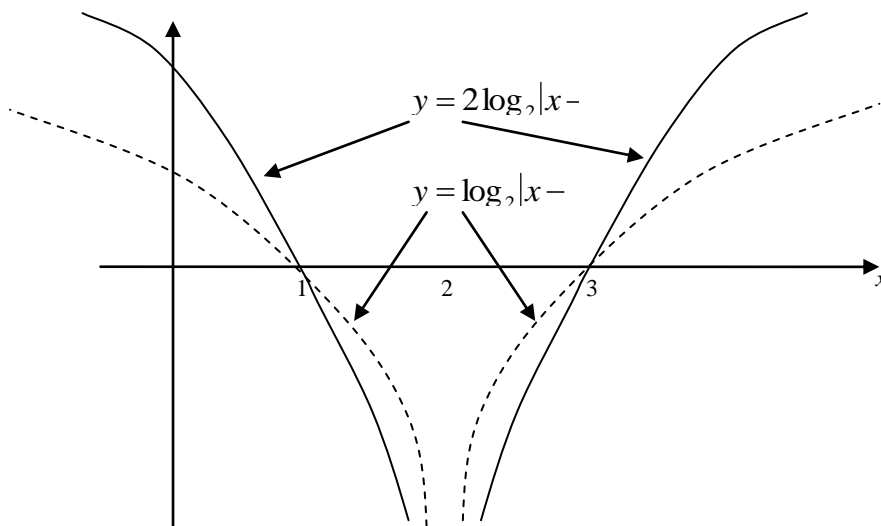


Рисунок 5 – График функции  $y = 2\log_2|x-2|$

**4.20** Построить графики функций  $f(x-1)$ ,  $f(x+2)$ ,  $f(x)+3$ ,  $f(x)-4$ ,  $f(2x)$ ,  $f(x/3)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f|x|$ ,  $2f(x)$ ,  $-f(x)$ ,  $f(-x)$ , исходя из графика функции  $f(x) = \arcsin(x-1)$ , и объяснить такое построение

*Решение.* В нашем случае  $f(x) = \arcsin(x-1)$ . Построим сначала график функции  $y = \arcsin(x-1)$ , исходя из графика функции  $y = \arcsin x$  в одной системе координат (рис. 6).

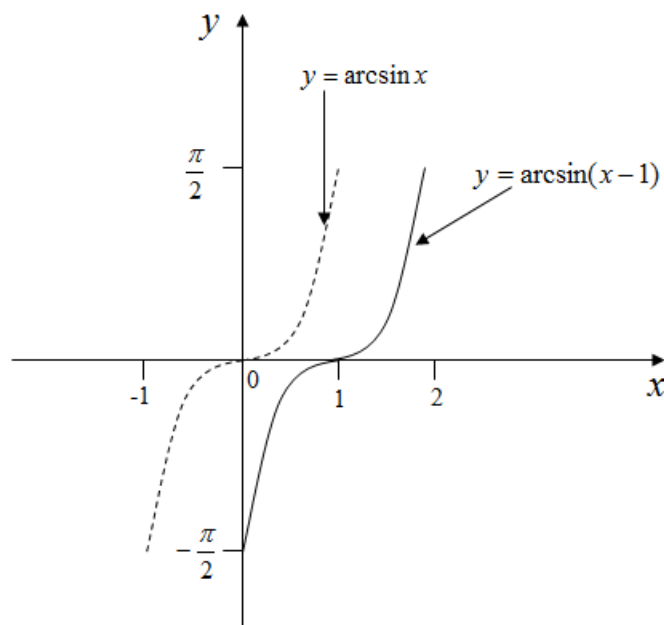


Рисунок 6 – График функции  $y = \arcsin(x-1)$

Графиком функции  $y = f(x)$  является множество  $A = \{x, f(x) \mid x \in [0; 2]\}$ . Функция  $y = f(x-1)$  определена при всех  $x: x-1 \in [0; 2]$  или  $x \in [1; 3]$ . Графиком функции  $y = f(x-1)$  является множество  $B = \{x, f(x-1) \mid x \in [1; 3]\}$ . Сделаем замену  $x-1 = z$ . Тогда  $B = \{z+1, f(z) \mid z \in [0; 2]\}$ . Поэтому каждая точка множества  $B$  получается из соответствующей точки множества  $A$  сдвигом на 1 вправо, т.е. график функции  $y = f(x-1)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом на 1 вправо (рис. 7).

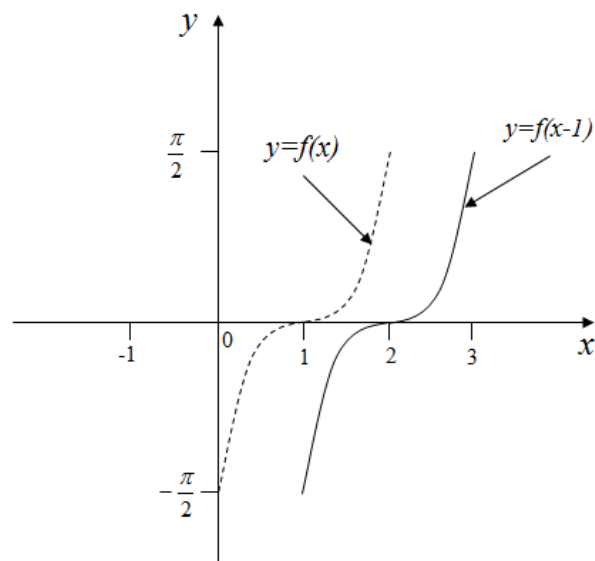


Рисунок 7 – График функции  $y = f(x-1)$

График функции  $y = f(x+2)$  (рис. 8) получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом влево на 2 единицы (объяснить)

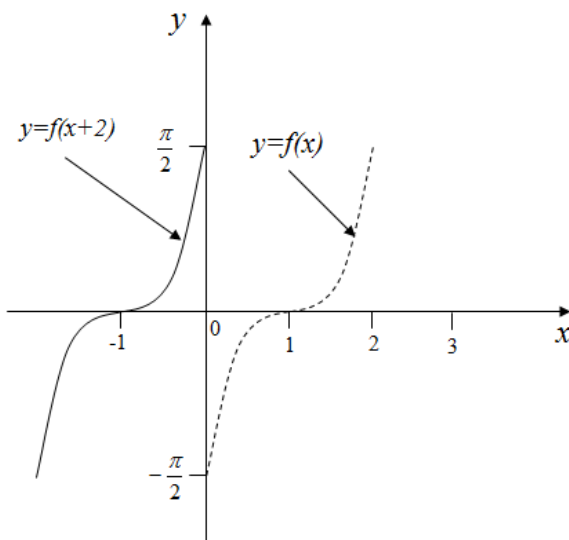


Рисунок 8 – График функции  $y = f(x+2)$

График функции  $y = f(x) + 3$  получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом на 3 единицы вверх (рис. 9).

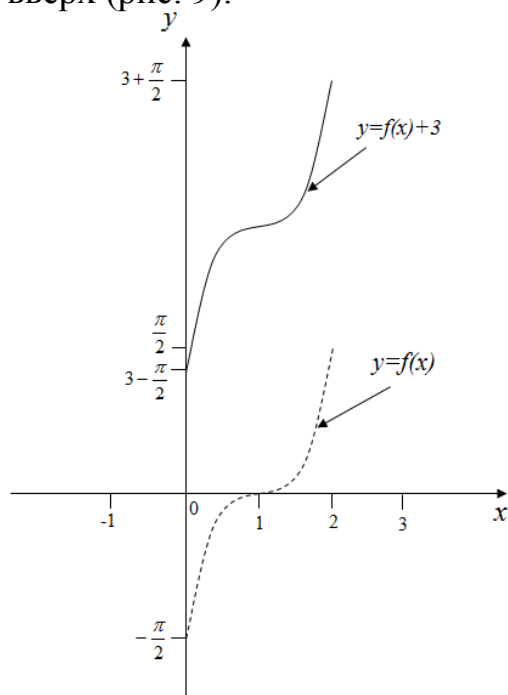


Рисунок 9 – График функции  $y = f(x) + 3$

График функции  $y = f(x) - 4$  (рис. 10) получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом вниз на 4 единицы (объяснить).

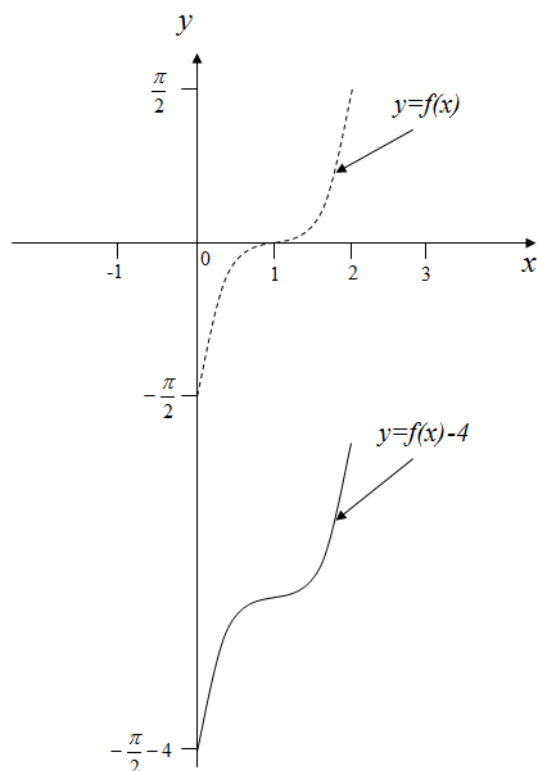


Рисунок 10 – График функции  $y = f(x) - 4$

График функции  $y = f(2x)$  (рис. 11) получается из графика функции  $y = f(x)$  сжатием вдоль оси  $Ox$  в 2 раза (объяснить).

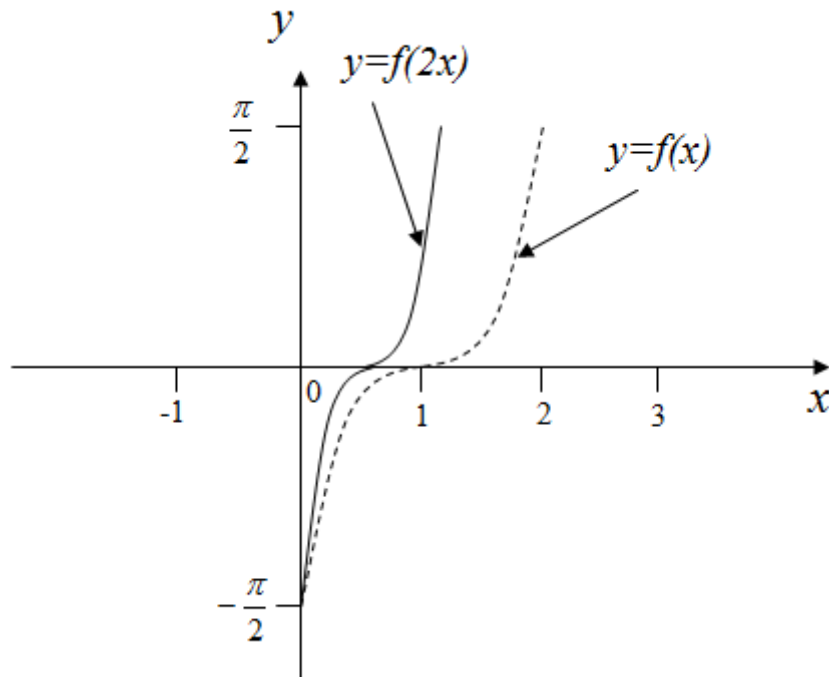


Рисунок 11 – График функции  $y = f(2x)$

График функции  $y = f(x/3)$  (рис. 12) получается из графика функции  $y = f(x)$  растяжением вдоль оси  $Ox$  в 3 раза (объяснить).

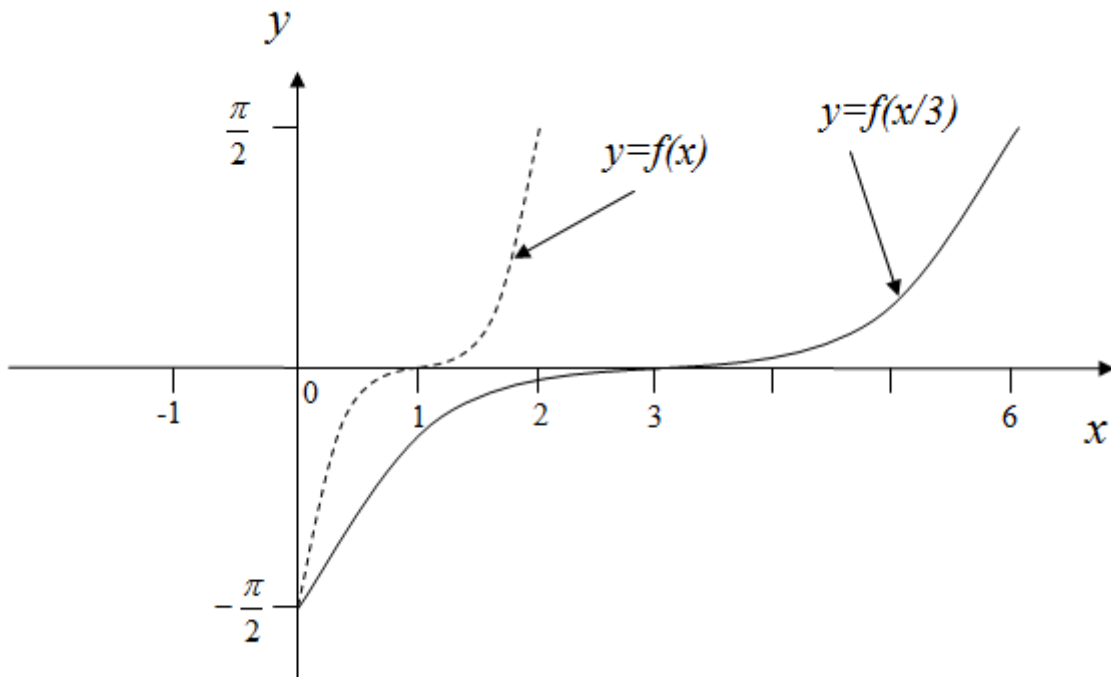


Рисунок 12 – График функции  $y = f(x/3)$

График функции  $y = |f(x)|$  (рис. 13) состоит из части графика функции  $y = f(x)$ , расположенной выше оси  $Ox$  и линии, симметричной относительно оси  $Ox$  части графика  $y = f(x)$ , расположенной ниже оси  $Ox$  (объяснить).

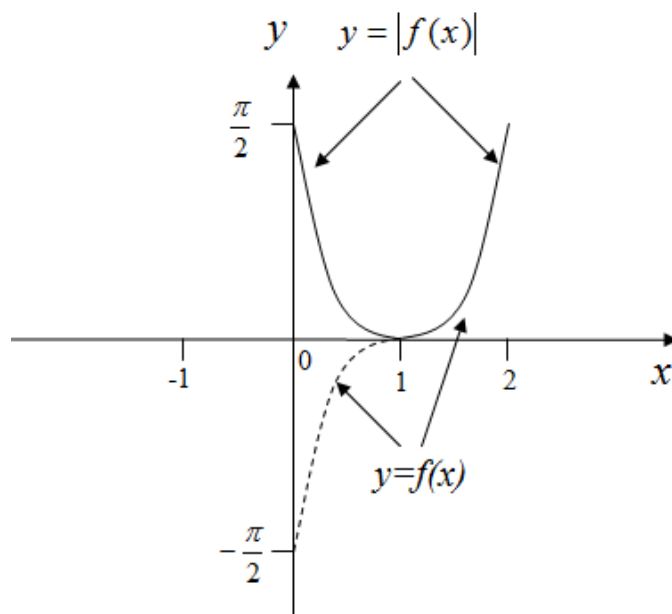


Рисунок 13 – График функции  $y = |f(x)|$

График функции  $y = f(|x|)$  (рис. 14) состоит из графика функции  $y = f(x)$  и линии, симметричной графику функции  $y = f(x)$  относительно оси  $Oy$  (объяснить).

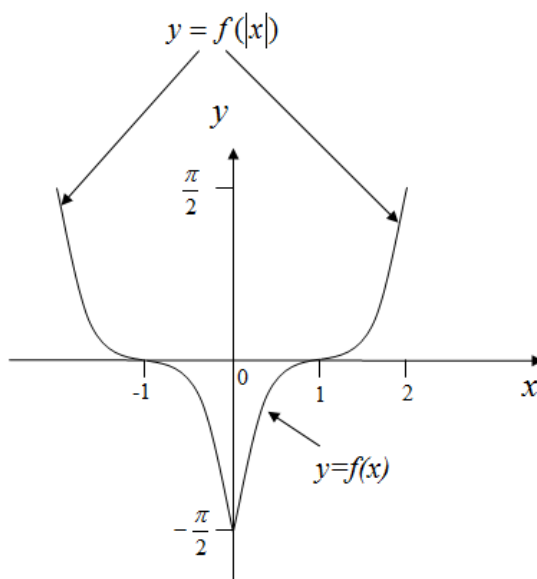


Рисунок 14 – График функции  $y = f(|x|)$

График функции  $y = 2f(x)$  (рис. 15) получается из графика функции  $y = f(x)$  растяжением вдоль оси  $Oy$  в 2 раза (объяснить).

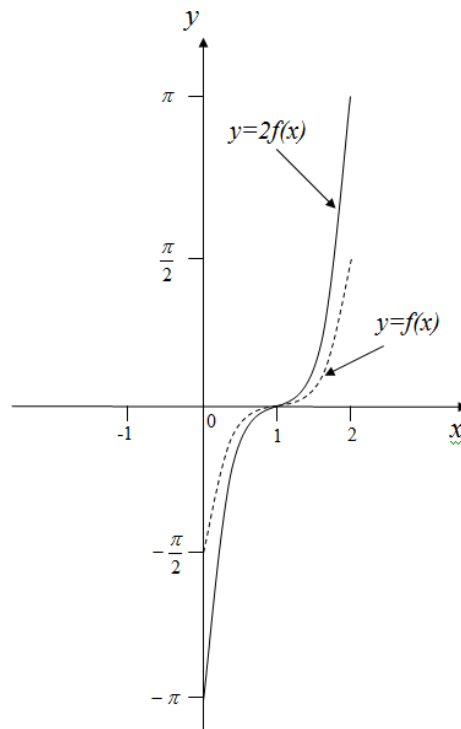


Рисунок 15 – График функции  $y = 2f(x)$

График функции  $y = -f(x)$  (рис. 16) состоит из линии, симметричной относительно оси  $Ox$  части графика функции  $y = f(x)$ , расположенной выше оси  $Ox$  и линии, симметричной относительно оси  $Ox$  части графика функции  $y = f(x)$ , расположенной ниже оси  $Ox$  (объяснить).

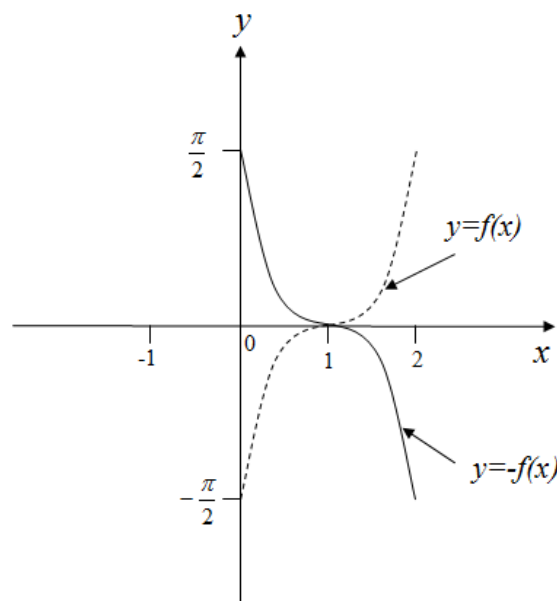


Рисунок 16 – График функции  $y = -f(x)$

График функции  $y = f(-x)$  (рис. 17) получается из графика функции  $y = f(x)$  симметрией относительно оси  $Oy$  (объяснить).

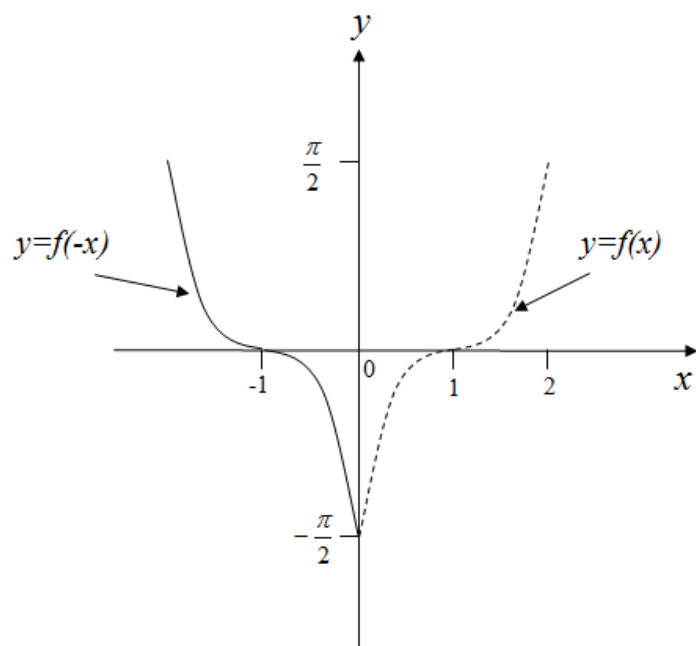


Рисунок 17 – График функции  $y = f(-x)$

## Лабораторная работа № 4

### Вещественные числа

*Необходимые понятия и теоремы:* рациональные и иррациональные числа, действительные числа, аксиомы действительных чисел, принцип математической индукции, верхняя и нижняя грани множеств, ограниченные множества.

*Литература:* [1] с. 29 – 61, [4] с. 37 – 80.

**1** Исходя из аксиом действительных чисел, доказать утверждения:

**1.1** Если  $a + b = c$ , то  $a = c - b$ .

**1.2** Число, обладающее свойством единицы, единственно.

**1.3** Если  $a > b$ , то для любого числа  $c$  справедливо  $a + c > b + c$ .

**1.4** Для любого числа  $a$  справедливо  $a \cdot 0 = 0$ .

**1.5** Число, обладающее свойством нуля, единственно.

**1.6** Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.

**1.7** Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .

**1.8** Если  $a \cdot b = 0$ , то хотя бы один из сомножителей  $a$  и  $b$  равен нулю.

**1.9** Число, противоположное данному, единственно.

**1.10** Для любого числа  $a \neq 0$  справедливо  $a : a = 1$ .

**1.11** Если  $a < b$ , то  $-a > -b$ .

**1.12** Для любых чисел  $a$  и  $b$  справедливо  $(-a) \cdot b = -a \cdot b$ .

**1.13** Для любых чисел  $a$  и  $b$  справедливо  $-a - b = -(a + b)$ .

**1.14** Для любого числа  $a \neq 0$  справедливо  $1 : (1 : a) = a$ .

**1.15** Если  $a < b$  и  $c \leq d$ , то  $a + c < b + d$ .

**1.16** Уравнение  $a \cdot x = b$ ,  $a \neq 0$ , имеет единственное решение.

**1.17** Для любой дроби  $\frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ , и  $\forall c \neq 0$  справедливо  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ .

**1.18** Если  $a < b$  и  $c \leq d$ , то  $a - c < b - d$ .

**1.19** Если  $a < b$  и  $c < 0$ , то  $ac > bc$ .

**1.20** Уравнение  $a + x = b$  имеет единственное решение.

**2** Доказать иррациональность числа  $a$ :

№	$a$	№	$a$	№	$a$	№	$a$
2.1	$\sqrt{3}$	2.6	$\sqrt{13}$	2.11	$\sqrt{21}$	2.16	$\sqrt{43}$
2.2	$\sqrt{5}$	2.7	$\sqrt{17}$	2.12	$\sqrt{22}$	2.17	$\sqrt{51}$
2.3	$\sqrt{7}$	2.8	$\sqrt{15}$	2.13	$\sqrt{33}$	2.18	$\sqrt{57}$
2.4	$\sqrt{11}$	2.9	$\sqrt{19}$	2.14	$\sqrt{37}$	2.19	$\sqrt{50}$
2.5	$\sqrt{10}$	2.10	$\sqrt{20}$	2.15	$\sqrt{41}$	2.20	$\sqrt{2}$



3 Найти  $\max X$ ,  $\min X$ ,  $\sup X$ ,  $\inf X$  числового множества:

№	$X$	№	$X$
3.1	$\{x \in \mathbb{Q} :  x  < 1\}$	3.11	$\{x \in \mathbb{Q} :  x  > 1\}$
3.2	$[0; 2)$	3.12	$[1; 2]$
3.3	$\{(-1)^n(1-1/n), n \in \mathbb{N}\}$	3.13	$\{1+(-1)^n/n, n \in \mathbb{N}\}$
3.4	$\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$	3.14	$\{-1/3; -1/9; \dots, -1/3^n, \dots\}$
3.5	$\{1/3; 1/9; \dots, 1/3^n, \dots\}$	3.15	$\{-1/2; -3/4; \dots, -(2^n-1)/2^n, \dots\}$
3.6	$\{x \in \mathbb{Q} :  x  \geq 1\}$	3.16	$\{x \in \mathbb{Q} :  x  < 3\}$
3.7	$(0; 5]$	3.17	$\{\sin n, n \in \mathbb{Z}\}$
3.8	$\{n^2 e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$	3.18	$\{1/10; 1/100; \dots, 1/10^n, \dots\}$
3.9	$\{1/10; 1/100; \dots, 1/10^n, \dots\}$	3.19	$\{2; 1+1/2; \dots, 1+1/n, \dots\}$
3.10	$\{1/2; 3/4; \dots, (2^n-1)/2^n, \dots\}$	3.20	$\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$

4 Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ . Найти:

4.1	$\sup_m \inf_n \frac{m-n}{m+n}$	4.8	$\inf_n \sup_m \frac{m-n}{m+3n}$	4.15	$\sup_n \inf_m \frac{m-n}{2m+n}$
4.2	$\inf_n \sup_m \frac{m-n}{m+n}$	4.9	$\sup_m \inf_n \frac{m}{7m+n}$	4.16	$\inf_m \sup_n \frac{m-n}{2m+n}$
4.3	$\sup_m \inf_n \frac{m}{m+n}$	4.10	$\inf_n \sup_m \frac{m}{7m+n}$	4.17	$\sup_n \inf_m \frac{m-n}{m+3n}$
4.4	$\inf_n \sup_m \frac{m}{m+n}$	4.11	$\sup_n \inf_m \frac{m-n}{m+n}$	4.18	$\inf_m \sup_n \frac{m-n}{m+3n}$
4.5	$\sup_m \inf_n \frac{m-n}{2m+n}$	4.12	$\inf_m \sup_n \frac{m-n}{m+n}$	4.19	$\sup_n \inf_m \frac{m}{7m+n}$
4.6	$\inf_n \sup_m \frac{m-n}{2m+n}$	4.13	$\sup_n \inf_m \frac{m}{m+n}$	4.20	$\inf_m \sup_n \frac{m}{m+n}$
4.7	$\sup_m \inf_n \frac{m-n}{m+3n}$	4.14	$\inf_m \sup_n \frac{m}{m+n}$	4.21	$\sup_m \inf_n \frac{m-n}{m+2n}$

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений при  $n \in \mathbb{N}$ :

№	Утверждение	№	Утверждение
5.1	$5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\dots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$	5.11	$n^3+5n$ кратно 6
5.2	$1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$	5.12	$n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6
5.3	$4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\dots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$	5.13	$7^{2n}-1$ кратно 24
5.4	$2\cdot 2+3\cdot 5+\dots+(n+1)(3n-1)=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$	5.14	$13^n+5$ кратно 6
5.5	$1+6+\dots+(2n-1)2^{n-1}=3+2^n(2n-3)$	5.15	$15^n+6$ кратно 7
5.6	$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$	5.16	$9^n+3$ кратно 4
5.7	$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$	5.17	$7^n+3n-1$ кратно 9
5.8	$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$	5.18	$7^n+12n+17$ кратно 18
5.9	$\frac{1}{5\cdot 12}+\dots+\frac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\frac{n}{5(7n+5)}$	5.19	$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
5.10	$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$	5.20	$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

**6** С помощью метода математической индукции доказать неравенство при  $n \in \mathbb{N}$ :

№	Неравенство	№	Неравенство
1	2	3	4
6.1	$4^n > 7n - 5$	6.11	$2^n n! < n^n, \forall n > 2$
6.2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \forall n \geq 2$	6.12	$(2n)! > \frac{4n}{n+1} (n!)^2, \forall n \geq 2$
6.3	$4^n > n^2 + 3^n$	6.13	$3^n > 2^n + 7n, \forall n \geq 4$
6.4	$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} < 1$	6.14	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \forall n \geq 2$
6.5	$y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n, \forall y_1, y_2, \dots, y_n > 0: y_1 y_2 \dots y_n = 1$	6.15	$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, x_k \geq 0, \forall k = \overline{1, n}$
6.6	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$	6.16	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14}, \forall n \geq 2$

1	2	3	4
6.7	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$ $\forall n \geq 2$	6.17	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n, \forall n \geq 2$
6.8	$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 2$	6.18	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}, \forall n \geq 2$
6.9	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$	6.19	$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) \geq \frac{1}{2},$ $x_k \geq 0, \forall k = \overline{1, n}, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$
6.10	$3^n - 2^n \geq n$	6.20	$n \leq 2^{n-1}$

7 Построив соответствующее сечение, доказать равенство:

7.1	$\sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$	7.7	$\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{108}$	7.13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$
7.2	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$	7.8	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$	7.14	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{77}$
7.3	$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}$	7.9	$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{27}$	7.15	$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$
7.4	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$	7.10	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$	7.16	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$
7.5	$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$	7.11	$\sqrt{7} + \sqrt{28} = \sqrt{63}$	7.17	$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}$
7.6	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}$	7.12	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$	7.18	$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$

## Решение типовых примеров

**1.20** Уравнение  $a + x = b$  имеет единственное решение.

*Решение.* Число  $-a + b$  удовлетворяет уравнению  $a + x = b$ . В самом деле:  $a + (-a + b) = (a + (-a) + b) = 0 + b = b$ . Других решений нет. Действительно, если  $x \in \mathbb{R}$  и является решением уравнения  $a + x = b$ , то

$$\begin{aligned} -a + b &= -a + b, \quad -a + (a + x) = -a + b, \\ (-a + a) + x &= -a + b, \quad 0 + x = -a + b, \quad x = -a + b. \end{aligned}$$

**2.20** Доказать, что  $\sqrt{2}$  – иррациональное число.

*Решение.* Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число  $\frac{m}{n}$  (несократимая дробь), квадрат которого

равен 2. Тогда  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$  или  $m^2 = 2n^2$ . Следовательно, число  $m^2$  есть четное число. Отсюда  $m$  есть четное число, и, следовательно, представимо в виде  $m = 2k$ . Тогда имеем  $n^2 = 2k^2$ . Значит,  $n^2$  есть четное число, тогда и

$n$  – четное. Таким образом, числа  $m$  и  $n$  являются четными. Поэтому дробь  $\frac{m}{n}$  сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит,  $\sqrt{2}$  – иррациональное число,  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

**3.20** Найти  $\max X$ ,  $\min X$ ,  $\sup X$ ,  $\inf X$  числового множества

$$X = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$$

*Решение. Шаг 1.* Покажем, что  $\inf X = 0$ , то есть, 1)  $\forall x = \frac{m}{n} \in X$ ,  $\frac{m}{n} > 0$  (0 – нижняя граница  $X$ ); 2)  $\forall x^* > 0 \exists \bar{x} \in X$  такой, что  $\bar{x} < x^*$  (0 – наибольшая из нижних границ). Утверждение 1) очевидно.

Докажем утверждение 2). Представим  $x^*$  в виде десятичной дроби  $x^* = a, x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots$ . Если  $a > 0$ , то неравенство  $\bar{x} < x^*$  очевидно, так как множество  $X$  состоит из правильных дробей. Если  $a = 0$ , то  $\exists n$  такой, что  $x_n \neq 0$ , и поэтому  $\bar{x} = 0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n - 1) \dots$  – искомое, то есть,  $\bar{x} < x^*$ .

*Шаг 2.* Покажем, что  $\min X$  не существует. По определению, наименьшим элементом множества  $X$  называется такое число  $c \in X$ , что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \geq c$ . Заметим, что  $\inf X \notin X$ , так как  $\frac{0}{n} \notin X$ , 0 – не натуральное число, и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

*Шаг 3.* Покажем, что  $\sup X = 1$ , то есть 1)  $\forall x = \frac{m}{n} \in X$ ,  $\frac{m}{n} < 1$  (1 – верхняя граница  $X$ ); 2)  $\forall x^* < 1 \exists \bar{x} \in X$  такой, что  $\bar{x} > x^*$  (1 – наименьшая из верхних границ). Утверждение 1) очевидно, так как  $X$  содержит только правильные дроби.

Докажем утверждение 2). Представим  $x^*$  в виде десятичной дроби  $x^* = 0, x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots$ . Тогда  $\exists n$  такой, что  $x_n \neq 0$ , и поэтому  $\bar{x} = 0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n + 1) \dots$  – искомое, то есть,  $\bar{x} > x^*$ .

*Шаг 4.* . Покажем, что  $\max X$  не существует. По определению, наибольшим элементом множества  $X$  называется такое число  $c \in X$ , что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq c$ . Заметим, что  $\sup X \notin X$ , так как  $\frac{m}{n} = 1$  при  $m = n$ , что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество  $X$  не имеет наибольшего элемента.

**4.20** Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ . Найти  $\inf_m \sup_n \frac{m}{m+n}$ .

*Решение.* Заметим, что если  $\exists \max X$  и  $\min X$ , то  $\sup X = \max X$ ,  $\inf X = \min X$ . Для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется  $0 \leq \frac{m}{m+n} \leq \frac{m}{m+1}$ . Следовательно,  $\max_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$ , а значит,  $\sup_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$ .

Для всех  $m \in \mathbb{N}$  выполняется  $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{m+1} < 1$ . Следовательно,  $\min_m \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$ , а значит,  $\inf_m \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$ .

**5.20** Методом математической индукции докажите, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Решение. Шаг 1.* При  $n=1$  равенство очевидно.

*Шаг 2.* Предположим, что равенство верно для натурального числа

$$n = k: 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

*Шаг 3.* Проверим верность утверждения для натурального числа  $n = k+1$ :  $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \left[ \begin{array}{l} \text{учитывая} \\ \text{шаг 2} \end{array} \right] = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \left( \frac{k+2}{2} \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

Из истинности утверждения при  $n=k$  вытекает его истинность при  $n=k+1$ . Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

**6.20** С помощью метода математической индукции доказать неравенство  $n \leq 2^{n-1}$  при  $n \in \mathbb{N}$ .

*Решение. Шаг 1* При  $n=1$  неравенство верно, т.к.  $1 \leq 1$ .

*Шаг 2.* Предположим, что неравенство верно для  $n=k$ , то есть  $k \leq 2^{k-1}$ .

*Шаг 3.* Докажем, что неравенство верно для  $n=k+1$ :

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \geq \left[ \begin{array}{l} \text{учитывая} \\ \text{шаг 2} \end{array} \right] \geq 2 \cdot k \geq k + k \geq k + 1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при  $n=k$  вытекает его истинность при  $n=k+1$ . Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

**7.20** Построив сечение, доказать равенство  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ .

*Решение.* Для удобства обозначим  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \alpha$ . Необходимо доказать, что  $\alpha = \sqrt{18}$ . Покажем, что совпадают верхние классы сечений, определяющие числа  $\alpha$  и  $\sqrt{18}$ . Сначала построим сечения, определяющие действительные числа  $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$ . Рассмотрим верхние классы этих сечений:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= A | A'; & A' &= \{a' | a'^2 > 2, a' > 0\}; & \sqrt{8} &= B | B'; & B' &= \{b' | b'^2 > 8, b' > 0\}; \\ \sqrt{18} &= C | C'; & C' &= \{c' | c'^2 > 18, c' > 0\}.\end{aligned}$$

Теперь определим, какой верхний класс определяет число  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{8}$ . Пусть  $\alpha$  производит сечение  $D | D'$ . Рассмотрим рациональные числа  $a', a, b', b$ , удовлетворяющие неравенствам  $a < \sqrt{2} < a'$  и  $b < \sqrt{8} < b'$ , где  $a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B'$ .

По определению, суммой  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$  называется число, которое содержится в следующих рациональных границах  $a + b < \sqrt{2} + \sqrt{8} < a' + b'$ .

Из определения суммы двух вещественных чисел следует, что в верхний класс  $D'$  сечения, определяющего число  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ , входят всевозможные суммы вида  $a' + b'$ :  $D' = \{d' | d' = a' + b', a' \in A', b' \in B'\}$ .

Докажем совпадения классов  $D'$  и  $C'$ . Для этого вначале покажем, что  $D' \subset C'$ . Пусть  $d' \in D'$ , тогда  $d' = a' + b'$ ,  $a' \in A', b' \in B'$  и  $a'^2 > 2, a' > 0, b'^2 > 8, b' > 0$ . Ясно, что  $d' > 0$ . Докажем, что  $d'^2 > 18$ . Так как  $a'^2 b'^2 > 16$ , то  $a' b' > 4$  и  $2a' b' > 8$ . Следовательно,

$$d'^2 = (a' + b')^2 = a'^2 + 2a'b' + b'^2 > 2 + 8 + 8, \text{ т. е. } d'^2 > 18, d' \in C' \Rightarrow D' \subset C'.$$

Покажем, что  $C' \subset D'$ . Пусть  $c' > 0, c' \in C'$ , т. е.  $c'^2 > 18$ . Положим  $c'^2 - 18 = h$  ( $h$  – рациональное число) и выберем  $a' > 0$  так, чтобы

$$2 < a'^2 < 2 + \frac{1}{6}h, a'^2 < 3 \text{ и } b' = c' - a'.$$

Тогда  $b' > 0$  и  $b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'$ . Так как  $c'^2 = 18 + h$ , а  $4a'^2 < 4(2 + h/6) = 8 + 2h/3$ , то

$$\begin{aligned}4c'^2 a'^2 &< (8 + 2h/3)(18 + h) = 144 + 20h + 2h^2/3 < \\ &< 144 + 20h + 25h^2/36 = (12 + 5h/6)^2,\end{aligned}$$

т. е.  $2c'a' < 12 + 5h/6$ , а  $a'^2 + c'^2 > 20 + h$ , следовательно,  $b'^2 > 8 + h/6$ , т. е.  $b'^2 > 8$  или  $c' = a' + b'$ , где  $a' \in A', b' \in B'$  и верхний класс  $C'$  содержится в классе  $D'$ . Так как  $C' \subset D'$  и  $D' \subset C'$ , то классы  $C'$  и  $D'$  совпадают. Верхние классы  $D'$  и  $C'$  сечений совпадают, значит, совпадают и нижние классы  $D$  и  $C$  и, следовательно,  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ .

## Литература

1. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Часть 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление/ Э.И. Зверович. – Минск: Высш.шк., 2006. – 319с.
2. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа: Учеб. Пособ. Для вузов. / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин – М.: Гл. ред. физ. мат. лит., 1988. – 816 с.
3. Зорич, В.А. Математический анализ, часть 1/ В.А. Зорич. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.
4. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1 – М.: Высш. Шк., 1988. – 712 с.