Лабораторная работа № 5

Сопряженные операторы. Интегральные уравнения

5.1. Найти сопряженный к оператору A в пространстве $L_2[0;1]$ $(\alpha \in \mathbb{C})$

Вариант	$(Ax)(t)$	Вариант	$(Ax)(t)$
1	$\alpha \sin t \cdot x(t)$	6	$e^{\alpha\pi t} t \cdot x(t)$
2	$\alpha i t \cdot x(t)$	7	$\alpha t^2 \cdot x(t)$
3	$e^{\alpha i t} \cdot x(t)$	8	$e^{\alpha} \sqrt{t} \cdot x(t)$
4	$\sin(\alpha t) \cdot x(t)$	9	$\cos(\alpha t) \cdot x(t)$
5	$e^{t\alpha} \cdot x(\sqrt[3]{t})$	10	$e^{\alpha\pi i} t \cdot x(t)$

5.2. Найти сопряженный к оператору A в гильбертовом пространстве l_2 с весом p, где $p(k) = 1/2^k$.

Вариант	Ax
1	$\left(0; x(2); x(1); x(3); \ldots; x(k); \ldots\right)$
2	$\left(\dfrac{x(1)}{3}; \dfrac{x(2)}{3^2}; 0; 0; \dfrac{x(3)}{3^3}; \dfrac{x(4)}{3^4}; \ldots\right)$
3	$\left(x(3); x(2); 0, x(4); x(5); \ldots; x(k); \ldots\right)$
4	$\left(x(1) - 2x(3); x(1) + x(5); 0; 0; 0; \ldots\right)$
5	$(x(2); x(3); \ldots; x(n); 0; 0; 0; \ldots)$
6	$\left(x(2) - 4x(4); 0; x(7) - x(1); 0; 0; 0; \ldots\right)$
7	$\left(0; ix(1); x(2); ix(3); x(4); ix(5); \ldots\right)$
8	$\left(x(1); 0; x(3); 0, x(5); 0; \ldots\right)$
9	$\left(x(4) + 2x(3); x(7) - x(5); 0; 0; 0; \ldots\right)$
10	$\left(0; x(1); \dfrac{x(2)}{2}; \dfrac{x(3)}{3}; \ldots; \dfrac{x(k)}{k}; \ldots\right)$

Будем далее рассматривать интегральное уравнение

$$x(t)=\mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds+f(t). \qquad (1)$$

5.3. Решить уравнение (1) при $\mu=1$, если:

Вариант	a	b	$K(t,s)$	$f(t)$
1	0	π	$(2/\pi)\cos(s+t)$	$1+\sin t$
2	0	π	$\sin s+s\cos t$	$1-2t/\pi$
3	0	π	$\cos(t+s)$	$\sin t$
4	-1	1	$3t-s^2t^2$	t^2+t^4
5	0	1	$5st$	$3t+2$
6	0	1	e^{t+s}	1
7	0	$\pi/2$	$(1/\pi)\cos(3s+t)$	$\sin 3t$
8	0	2	$5t-s^3t^2$	$3t-5$
9	0	2	e^{t-s}	5
10	0	$\pi/2$	$t\sin s-s\cos t$	$8+\sin t$

5.4. Не решая уравнения (1), определите, при каких $f\in L_2[a;b]$ оно имеет решение в пространстве $L_2[a;b]$ (в этой задаче мы полагаем $\mu=1$)

Вариант	a	b	$K(t,s)$
1	0	2π	$\sin(t-2s)$
2	-1	1	$st+s^2t^2$
3	0	1	$2st-4t^2$
4	0	$\pi/2$	$4\sin^2 t$
5	-2	2	$i\lvert t\rvert/4$
6	$-\pi$	π	se^{it}
7	0	2π	$\frac{2i}{\pi}\sin(t+2s)$
8	-1	1	$st+is^4t^2$
9	-2	2	$s(t+is^4)$
10	0	2π	$\sin t\cos t$

5.5. Определить, при каких значениях параметра $\mu\in\mathbb{C}$ уравнение (1) разрешимо в пространстве $C[a;b]$ при любой функции f из $C[a;b]$

Вариант	a	b	$K(t,s)$
1	-2	2	$\lvert t \rvert$
2	0	$\pi/2$	$\sin t \cos s$
3	-1	1	$t^2 - 2ts$
4	-1	1	$s^2 + ts$
5	-1	1	$2s^3 + t^3$
6	0	2π	$e^{i(t-s)}$
7	0	2	$t^2 - 5ts^3$
8	0	π	$\sin t + \cos s$
9	-3	3	$9s^4 + 4t^3$
10	0	π	$e^{2i(t+s)}$