ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 16

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ.

Определение 1**. Преобразованием Фурье функции** f из $L_1(\mathbf{R})$ называется функция $\widehat{f}(\lambda)$, определяемая равенством

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{1}$$

Оператор $F: f \mapsto \widehat{f}$ называется **преобразованием Фурье.**
Введя обозначения

$$F_c(f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx, \tag{2}$$

$$F_s(f)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx, \tag{3}$$

формулу (1) можно переписать в виде

$$F(f) = F_c(f) + iF_s(f).$$

Преобразования (2) и (3) называются соответственно **косинус-** и **синус-преобразованиями Фурье.** Ясно, что $F(f) = F_c(f)$, если f — четная функция, и $F(f) = iF_s(f)$, если f - нечетная функция.

Оператор F инъективен, и при некоторых условиях имеет место следующая **формула обращения** , задающая обратный оператор F^{-1},

:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{4}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Вот одно из точных утверждений этого сорта.

ТЕОРЕМА 1**.** *Если f и $\widehat{f}$ принадлежат $L_1(\mathbf{R})$, то для п.в. x из* $\mathbf{R}$ *имеет место равенство* (4).

То же справедливо с заменой $L_1(\mathbf{R})$ на $L_2(\mathbf{R})$ (см. теорему 4 ниже). Другие условия справедливости формулы (4) см. в [1], [2], [6].

Для нахождения прямого и обратного преобразований Фурье применяют также специальные таблицы , например, [7] - [10]. Заметим, что при использовании различных источников требуется определенная осторожность, поскольку определение преобразования Фурье в них может отличаться от нашего числовым множителем перед интегралом или в показателе экспоненты.

Определение 2. **Сверткой** функций f и g называется функция (если интеграл существует)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пространство* $L_1(\mathbf{R})$ *со сверткой в качестве умножения является коммутативной алгеброй.*

ТЕОРЕМА 3 (О свертке). *При* f,g *из* $L_1(\mathbf{R})$ *имеет место формула*

$$F(f * g) = F(f)F(g).$$

Следующая теорема содержит в себе, в частности, определение **преобразования Фурье для функций из** $L_2(\mathbf{R})$ (определение 1 для этой цели не годится, так как $L_2(\mathbf{R})$ не содержится в $L_1(\mathbf{R})$).

ТЕОРЕМА 4 (Планшерель). *Для всякой функции* f *из* $L_2(\mathbf{R})$ *функция*

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

при любом натуральном n принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$. *Последовательность* $(\widehat{f}_n)$ *сходится в метрике* $L_2(\mathbf{R})$ *к некоторой функции* $\widehat{f} \in L_2(\mathbf{R})$, *называемой* ***преобразованием Фурье функции*** f. *Возникающее при этом отображение* $F : f \mapsto \widehat{f}$ *является линейным ограниченным биективным оператором , действующим в пространстве* $L_2(\mathbf{R})$, *и выполняется* ***равенство Парсеваля:***

$$\| \widehat{f} \|_2 = \sqrt{2\pi} \, \| f \|_2 \,.$$

Л и т е р а т у р а: [1], с. 201 - 210; [2], с. 397 - 414; [8], с. 15 - 29.

II. З А Д А Ч И

1. Пользуясь определением, найдите преобразование Фурье функции f из $L_1(\mathbf{R})$ (здесь и далее χ_A - индикатор (характеристическая функция) множества $A \subset \mathbf{R}$)

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	$e^{-2\|x\|}$	$e^{-x}\chi_{R+}(x)$	$e^{x}\chi_{[-1,1]}(x)$	$\chi_{[0,1]}(x)\sin x$	$1/(1+x^2)$
	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}(x)\cos x$	$x\chi_{[0,1]}(x)$	$e^{ix}\chi_{[0,1]}(x)$	$x^3\chi_{[0,2]}(x)$	$x^2\chi_{[-1,1]}(x)$
	1.11	1.12	1.13	1.14	
$f(x)$	$e^{-\|x\|}sgnx$	$sin^2x\chi_{[0,1]}(x)$	$cos^2x\chi_{[-1,1]}(x)$	$e^{-x^2/2}$	

Решение задачи 1.14. Полагая для краткости $y = F(f)$, имеем

$$y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos\lambda x dx.$$

Дифференцируя по параметру, а затем интегрируя по частям, получаем

$$y'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}(-\sin\lambda x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda x de^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}\sin\lambda x\Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos\lambda x dx = -\lambda y'(\lambda),$$

т.е. y удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + \lambda y = 0$. Общее решение этого уравнения есть $y = Ce^{-\lambda^2/2}$, а постоянную C находим из начального условия

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(интеграл Эйлера-Пуассона). Окончательно получаем, что $\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2}$.

2. Считая известным преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f из $L_1(\mathbf{R})$**,** найдите преобразование Фурье функции g.

	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$g(x)$	$f(-3x)$	$f(x-a)$	$f(-x)$	$f(2x)$	$\sin x f(x)$
	2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
$g(x)$	$\cos x f(x)$	$f(x)-f(-x)$	$\overline{f(x+1)}$	$\sin^2 x f(x)$	$\cos^2 x f(x)$
	2.11	2.12	2.13	2.14	
$g(x)$	$f(1-x)$	$f(x-1)+f(x+1)$	$\overline{f(-x)}$	$\mathrm{Re} f(x)$	

Решение задачи 2.14. Поскольку $\mathrm{Re} f(x) = f(x) + \overline{f(x)},$ то

$$\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-i\lambda x} dx = \widehat{f}(\lambda) + \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx} = \widehat{f}(\lambda) + \overline{\widehat{f}(-\lambda)}.$$

3. Решите следующие функциональные уравнения в пространстве $L_1(\mathbf{R})$**:**

3.1. $f(x) + f(x-1) + f(x-2) = \chi_{[0,3]}(x).$

$3.2. f(x)+f(x-2\pi)=e^{ix}\chi_{[0,4\pi]}(x).$

$3.3. f(x+\frac{1}{2})+f(x-\frac{1}{2})=e^{4\pi ix}\chi_{[-0,5;-1,5]}(x).$

$3.4. f(x+1)+f(x+3)+f(x+5)=\chi_{[0,6]}(x).$

$3.5. f(2-x)+f(2x-4)=\chi_{[-2,2]}(x).$

$3.6. f(\pi-x)+f(-x)=e^{-2ix}\chi_{[-\pi,\pi]}(x).$

$3.7. f(x)+f(1+x)=2\chi_{[0,2]}(x).$

$3.8. f(1-x)+f(2-x)=\chi_{[0,2]}(x).$

$3.9. f(x+1)-f(x-1)=e^{-2\pi ix}(\chi_{[-3,-1]}(x)-\chi_{[1,3]}(x)).$

$3.10. f(x+2\pi)+f(x-2\pi)=e^{2ix}\chi_{[-4\pi,4\pi]}(x).$

$3.11. f(x()+f(x+1)=\chi_{[-1,0]}(x)+2\chi_{[0,1]}(x)+\chi_{[1,2]}(x).$

$3.12. f(x-1)+f(x)+f(x+1)=\chi_{[-1,2]}(x).$

$3.13. f(x+\pi)+f(x-\pi)=e^{2ix}(\chi_{[-\pi,0]}(x)+\chi_{[\pi,2\pi]}(x)).$

$3.14. f(1-x)+f(2-x)+f(3-x)+f(4-x)=e^{2\pi ix}\chi_{[0,4]}(x).$

Решение задачи 3.14. Если положить $f(1\text{-}x) = g(x)$, то уравнение принимает вид

$$g(x)+g(x-1)+g(x-2)+g(x-3)=e^{2\pi ix}\chi_{[0,4]}(x). \tag{5}$$

Поскольку

$$F(\chi_{[a,b]})(\lambda)=\frac{e^{-i\lambda a}-e^{-i\lambda b}}{i\lambda}, \tag{6}$$

$$F(e^{aix}\varphi(x))(\lambda)=\widehat{\varphi}(\lambda-a), \tag{7}$$

то, переходя в (5) к преобразованию Фурье, имеем

$$\widehat{g}(\lambda)(1+e^{-i\lambda}+e^{-2i\lambda}+e^{-3i\lambda})=\frac{1-e^{-4i(\lambda-2\pi)}}{i(\lambda-2\pi)}=\frac{1-e^{-4i\lambda}}{i(\lambda-2\pi)}.$$

Так как

$$1+e^{-i\lambda}+e^{-2i\lambda}+e^{-3i\lambda}=\frac{1-e^{-4i\lambda}}{1-e^{-i\lambda}},$$

то

$$\widehat{g}(\lambda)=\frac{1-e^{-i\lambda}}{i(\lambda-2\pi)}=\frac{1-e^{-i(\lambda-2\pi)}}{i(\lambda-2\pi)}.$$

Снова воспользовавшись формулами (6) и (7), получаем отсюда, что

$$F(g)(\lambda) = F(e^{2\pi ix}\chi_{[0,1]}(x))(\lambda).$$

Поэтому $g(x) = e^{2\pi ix}\chi_{[0,1]}(x)$. Полагая в этом равенстве $x = 1 - t$, имеем окончательно

$$f(t) = e^{-2\pi it}\chi_{[0,1]}(t).$$

4. Вычислите свертку, $f * \chi_{[-1.1]}$ если

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
$f(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	xe^{-x^2}	$x^3e^{-x^4}$	$\dfrac{x}{1+x^2}$	$\sin^3 x$	$e^x \sin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	4.8	4.9	4.10	4.11	4.12	4.13	4.14
$f(x)$	$e^{-\lvert x\rvert}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\dfrac{x^3}{x^4+1}$	$e^{-x}\cos x$	$e^{\lvert x\rvert}\chi_{R_+}(-x)$	$\dfrac{\chi_{R_+}(x)}{1+x^2}$	$e^{-x}\chi_{R_+}(x)$

Решение задачи 4.14. По определению

$$f * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\chi_{[-1,1]}(y)dy = \int_{-1}^{1} e^{-(x-y)}\chi_{R_+}(x-y)dy =$$

$$[y = x - t] = \int_{x-1}^{x+1} e^{-t}\chi_{R_+}(t)dt = \int_{[x-1,x+1]\cap R_+} e^{-t}dt.$$

Для вычисления последнего интеграла рассмотрим три случая.

1). $x < -1$. Тогда $[x-1, x+1] \bigcap R_+ = \varnothing$, поэтому $f * \chi_{[-1,1]}(x) = 0$.

2). $-1 \le x < 1$. Тогда $[x-1, x+1] \bigcap R_+ = [0, x+1]$. Поэтому

$$f * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_0^{x+1} e^{-t}dt = 1 - e^{-x-1}.$$

3). $x \ge 1$. Тогда $[x-1, x+1] \subset R_+$. Следовательно,

$$f * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^{-t}dt = (e - e^{-1})e^{-x}.$$

Окончательно имеем

$$f * \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 - e^{-x}, & -1 \le x < 1 \\ (e - e^{-1})e^{-x}, & x \ge 1. \end{cases}$$

5. Решите интегральное уравнение в пространстве $L_1(\mathbf{R})$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-s)x(s)ds.$$

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
$f(t)$	e^{-t^2}	$\frac{1}{t^2+4}$	$te^{-t^2/2}$	te^{-2t^2}	$\frac{t}{(t^2+4)^2}$
$K(t)$	e^{-4t^2}	$\frac{1}{t^2+1}$	e^{-t^2}	te^{-4t^2}	$\frac{1}{t^2+1}$
	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10
$f(t)$	$\frac{t}{(t^2+9)^2}$	$e^{-\vert t\vert}(1+\vert t\vert)$	e^{-2t^2}	$\frac{1}{t^2+3}$	$te^{-t^2/4}$
$K(t)$	$\frac{t}{(t^2+1)^2}$	$e^{-\vert t\vert}$	e^{-3t^2}	$\frac{1}{t^2+2}$	$e^{-t^2/2}$
	5.11	5.12	5.13	5.14	
$f(t)$	te^{-2t^2}	$\frac{t}{(t^2+2)^2}$	$\frac{t}{(t^2+4)^2}$	$e^{-t^2}sh2t$	
$K(t)$	te^{-3t^2}	$\frac{1}{t^2+1}$	$\frac{t}{(t^2+3)^2}$	te^{-t^2}	

Решение задачи 5.14. Применяя к обеим частям данного уравнения преобразование Фурье, в силу теоремы о свертке имеем

$$\widehat{x}(\lambda)=\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)}.$$

Мы вычислим $\widehat{f},\widehat{K}$ не прибегая к помощи таблиц, а пользуясь лишь формулой

$$F(e^{-ax^2})(\lambda)=e^{-\lambda^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

где (a>0),которая выводится при помощи того же приема, что и в задаче 1.14. Поскольку

$$(g')^\wedge(\lambda)=i\lambda\widehat{g}(\lambda),\quad te^{-t^2}=-(1/2)(e^{-t^2})',$$

то

$$\widehat{K}(\lambda)=F(te^{-t^2})(\lambda)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\lambda e^{-\lambda^2/4}.$$

Далее,

$$f(t)=e^{-t^2}sh2t=\frac{1}{2}e^{-t^2}(e^{2t}-e^{-2t})=\frac{e}{2}(e^{-(t-1)^2}-e^{-(t+1)^2}).$$

Поскольку

$$F(g(x-a))(\lambda)=e^{-i\lambda a}F(g)(\lambda),$$

то

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{e}{2}(e^{-i\lambda}e^{-\lambda^2/4}\sqrt{\pi}-e^{i\lambda}e^{-\lambda^2/4}\sqrt{\pi})=\frac{e\sqrt{\pi}}{2}e^{-\lambda^2/4}(e^{-i\lambda}-e^{i\lambda})=-ie\sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}\sin\lambda.$$

Таким образом,

$$\widehat{x}(\lambda)=\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)}=\frac{-ie\sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}\sin\lambda}{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\lambda e^{-\lambda^2/4}}=2e\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Неизвестная функция x теперь может быть найдена из таблиц (см. [7] - [10]), но мы воспользуемся формулой (6), из которой при a=-1, $в$=1 следует, что $2\frac{\sin\lambda}{\lambda}=F(\chi_{[-1,1]})(\lambda).$ Окончательно получаем, что

$$x(t)=e\chi_{[-1,1]}(t).$$

6. Верно ли, что преобразование Фурье F есть линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y?

	X	Y
6.1	$L_1(\mathbf{R})$	$C_0(\mathbf{R})=\{f\in C(\mathbf{R}):f(\infty)=0\}$
6.2	$L_1(\mathbf{R})$	$L_1(\mathbf{R})$
6.3	$L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$	$L_2(\mathbf{R})$
6.4	$L_2(\mathbf{R})$	$C_0(\mathbf{R})$
6.5	$L_1(\mathbf{R})$	$BC(\mathbf{R})$
6.6	$L_1(\mathbf{R})$	$UC(\mathbf{R})$ — *пространство равномерно непрерывных функций на* $\mathbf{R}$.
6.7	$\{f;f(x)e^{ax}\in L_1(R)\forall a\geq 0\}$	$BC(\mathbf{R})\cap O(\mathbf{C})$
6.8	$\{f\in L_1(R):xf(x)\in L_1(R)\}$	$C^{(1)}(\mathbf{R})$
6.9	$\{f\in L_1(R):f''\in L_1(R)\}$	$L_1(\mathbf{R})$
6.10	$L_2(\mathbf{R})$	$L_1(\mathbf{R})$
6.11	$D(\mathbf{R})$	$O(\mathbf{R})$
6.12	$L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$	$L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$
6.13	$L_1(\mathbf{R})$	$L_2(\mathbf{R})$
6.14	$\{f\in L_1(R):f(x)e^{\lvert x\rvert}\in L_1(R)\}$	$O(\{\lvert\mathrm{Im} z\rvert<1\})$

$O(D)$ - пространство функций, аналитических в области $D\subset \mathbf{C}$.

Решение задачи 614. В доказательстве нуждается лишь утверждение, что $F(f)\in Y\forall f\in X$. Докажем это. Функция $\widehat{f}(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbf{R})$ формулой

$$\widehat{f}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-izx}dx \qquad (6)$$

продолжается в полосу $\{\lvert\mathrm{Im} z\rvert<1\}$ z-плоскости $(z=\lambda+i\tau)$, поскольку в этой полосе интеграл (6) абсолютно сходится. Осталось доказать дифференцируемость функции $\widehat{f}(z)$ в каждой точке z_0 этой полосы. В соответствии с теоремой о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра (см., например, [6]; для интеграла Лебега эта теорема также справедлива), достаточно показать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx}(-ix)dx$$

от производной по параметру подинтегральной функции в (6) сходится равномерно (по параметру z) в некоторой окрестности точки z_0. Действительно, если q < 1таково, что $|\mathrm{Im} z_0| < q$, то в полуплоскости $\{\tau < q\}$, содержащей z_0, имеем оценку

$$| f(x)e^{-izx}(-ix) |=| f(x) || x | e^{\tau x} =| f(x) | e^{|x|}\cdot | x | e^{\tau x-|x|} \le| f(x) | e^{|x|}\cdot | x | e^{-(1-q)|x|},$$

причем последняя функция интегрируема. Осталось применить мажорантный признак (признак Вейерштрасса) равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Варианты заданий см. в лабораторной работе 13.

III. Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е З А Д А Ч И.

19. Решите задачу 1 для функции $f(x) = 1/(x - i)$ из $L_2(\mathbf{R})$.
20. Решите задачи 2.1 - 2.14 в случае, когда f принадлежит $L_2(\mathbf{R})$.
21. Решите функциональные уравнения в пространстве $L_1(\mathbf{R})$

$$f(x - 1) + f(x + 1) = g(x)$$

для правых частей $g(x) = e^{-x^2} ch2x, \dfrac{chx}{ch2 + chx}, \chi_{[-1,1]}(x)$.

22. Решите задачу 4 для $f = \chi_{[a,b]}$.

23. *Решите задачу 5 при f(t) = arctg(2 / t*^{2}*), K(t) = 1/(1 + t*^{2}*).*

24. Решите задачу 6, если $X = Y =$ S(**R)** (пространство Шварца).