Лабораторная работа № 5
Предел последовательности: определение, свойства

Необходимые понятия и теоремы: определение числовой последовательности, ограниченные и неограниченные последовательности, монотонные последовательности, определение предела последовательности, сходящиеся и расходящиеся последовательности, свойства сходящихся последовательностей.

Литература: [1] с. 81 – 87, [4] с. 87 – 111.

1 Напишите пять первых членов последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n	№	x_n	№	x_n
1.1	$\frac{1}{2n+1}$	1.6	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$	1.11	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$	1.16	$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$
1.2	$\frac{n+2}{n^3+1}$	1.7	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	1.12	$\frac{5^n+(-3)^n}{n^2}$	1.17	$\frac{\cos n}{n+1}$
1.3	$\frac{n}{2^{n+1}}$	1.8	$(-1)^n \frac{1}{n}$	1.13	$\frac{5^{n+1}+(-3)^n}{2^n}$	1.18	$((-1)^n-1)n$
1.4	$(-1)^n n$	1.9	$\cos n$	1.14	$\sin n$	1.19	$(-1)^n+6n$
1.5	$\frac{n+2}{n+3}$	1.10	$\frac{\ln n}{2^n}$	1.15	$\frac{\sin n}{n^2}$	1.20	$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$

2 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются:

2.1	числа $\{8; 14; 20; 26; 32; \ldots\}$	2.11	числа $\{1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; \ldots\}$
2.2	корни уравнения $\cos \pi x = 0$	2.12	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 1$
2.3	числа $\{1; 3; 1; 3; 1; \ldots\}$	2.13	числа $\{2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; \ldots\}$
2.4	корни уравнения $\sin \pi x = 0$	2.14	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 0$
2.5	числа $\{5; 7; 11; 19; 35; \ldots\}$	2.15	числа $\{-0,5; 1,5; -4,5; 13,5; \ldots\}$
2.6	корни уравнения $\cos \pi x = 1$	2.16	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 0$
2.7	числа $\{0,3; 0,33; 0,333; \ldots\}$	2.17	числа $\{-2; -1/2; -4/3; -3/4; \ldots\}$
2.8	корни уравнения $\sin \pi x = 1$	2.18	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 1$
2.9	числа $\{1; 2; 6; 24; 120; \ldots\}$	2.19	числа $\{-1/10; 1/100; -1/1000; \ldots\}$
2.10	корни уравнения $\cos \pi x = -1$	2.20	корни уравнения $\sin \pi x = -1$

3 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

№	x_1	x_{n+1}	№	x_1	x_{n+1}
3.1	1	$x_n + 2^n$	3.11	$1/3$	$1/(1+x_n)$
3.2	0	$(x_n+1)/(n+1)$	3.12	1	$3\cdot x_n + 5\cdot 2^n$
3.3	2	$x_n + 3\cdot 2^n$	3.13	2	$x_n/(4+x_n)$
3.4	1	$(n+1)(x_n+1)$	3.14	1	$x_n/(1+x_n)$
3.5	$1/2$	$1/(2-x_n)$	3.15	3	$(n+1)(x_n+1)$
3.6	1	$3x_n + 2^n$	3.16	0	$x_n + 7\cdot 2^n$
3.7	3	$x_n/(1+x_n)$	3.17	1	$x_n/(5+x_n)$
3.8	$1/2$	$2/(3-x_n)$	3.18	2	$4x_n + 2^n$
3.9	1	$2\cdot x_n + 3\cdot 2^n$	3.19	3	$x_n/(6+x_n)$
3.10	5	$x_n/(5+x_n)$	3.20	1	$x_n + 5\cdot 2^n$

4 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

№	a_n	№	a_n	№	a_n
4.1	$\frac{1}{n+1}$	4.8	$\frac{\arcsin(1/n)}{n}$	4.15	$\frac{\cos n}{n^2}$
4.2	$\frac{(-1)^n}{n^2}$	4.9	$\sin\frac{1}{n^2}$	4.16	$\frac{2^n+(-1)^n}{n}$
4.3	2^n	4.10	3^{-n}	4.17	$\sqrt{n+2}$
4.4	$\frac{2^n}{n!}$	4.11	$\frac{n+(-1)^n}{3n-1}$	4.18	$\frac{\operatorname{arctg} n}{n}$
4.5	$\lg(1+n)$	4.12	n^2-2n+4	4.19	$n^2-(-1)^n$
4.6	$\frac{n+(-1)^n}{n}$	4.13	$\frac{(-1)^n}{n!}$	4.20	$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$
4.7	$(-1)^n n$	4.14	$(-1)^n n + n$	4.21	$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

5 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа N_ε.

№	a_n	a	№	a_n	a
5.1	$\frac{n+1}{n+4}$	1	5.11	$\frac{3n+1}{n+6}$	3
5.2	$\frac{2n-2}{n+4}$	2	5.12	$\frac{3n+\sin 3n}{n-6}$	3
5.3	$\frac{n+\cos n}{n+3}$	1	5.13	$\frac{n-1}{n+5}$	1
5.4	$\frac{2n+1}{n-4}$	2	5.14	$\frac{4n+1}{2n+1}$	2
5.5	$\frac{n-3}{2n+1}$	$\frac{1}{2}$	5.15	$\frac{n+\sin n}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$
5.6	$\frac{\cos n}{n-3}$	0	5.16	$\frac{2n-3}{2n+5}$	1
5.7	$\frac{2n+6}{2n+7}$	1	5.17	$\frac{2n-3}{n+4}$	2
5.8	$\frac{2n-1}{n+4}$	2	5.18	$\frac{2n+1}{n-6}$	2
5.9	$\frac{n-1}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	5.19	$\frac{3n+\cos n!}{3n+5}$	1
5.10	$\frac{n+1}{n+4}$	1	5.20	$\frac{n}{n+1}$	1

6 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

№	a_n	a	№	a_n	a
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
6.1	$\frac{3n+1}{n^2+6}$	1	6.11	$\frac{n+1}{n+4}$	3
6.2	$\frac{3n^2}{n-6}$	2	6.12	$\frac{2n-2}{n+4}$	3
6.3	$\frac{n-1}{n^2+5}$	1	6.13	$\frac{n^2}{n^3+3}$	1
6.4	$\frac{n+1}{2n+1}$	2	6.14	$\frac{2n+1}{6n-4}$	2
6.5	$\frac{n^2}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	6.15	$\frac{n-3}{2n^2+1}$	$\frac{1}{2}$

1	2	3	4	5	6
6.6	$\frac{2n-3}{2n+5}$	0	6.16	$\frac{n^2}{n-3}$	1
6.7	$\frac{2n-3}{n+4}$	1	6.17	$\frac{2n+6}{2n+7}$	2
6.8	$\frac{n+1}{n-6}$	2	6.18	$\frac{n-1}{n+4}$	2
6.9	$\frac{3n}{3n+5}$	$\frac{1}{2}$	6.19	$\frac{n-1}{2n+4}$	1
6.10	$\frac{n+3}{2n+4}$	1	6.20	$\frac{2n+1}{3n-1}$	$\frac{1}{2}$

7 Вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

№	a_n		
	А	Б	В
1	2	3	4
7.1	$\frac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	$\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+1)!+(2n+3)!}$
7.2	$\frac{3n^2-5}{6n^2+n-2}$	$\frac{3+0{,}5^{n+1}}{0{,}3^n+5}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$
7.3	$\frac{n^3+n+2}{n^3+n-1}$	$\frac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$	$\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!+(n+1)!}$
7.4	$\frac{n^3-4n^2+n-1}{2n^3+n^2-3}$	$\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!-(3n+1)!}$
7.5	$\frac{n^2-2n+4}{n^2-n+3}$	$\frac{2+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+1}$	$\frac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!+(2n+1)!}$
7.6	$\frac{4n^2-3n+1}{n^2+n-4}$	$\frac{(-1)^n\cdot 3^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}$	$\frac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!+2(5n)!}$
7.7	$\frac{n^3+1}{n^3+n-4}$	$\frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n-7^n}$	$\frac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$
7.8	$\frac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$	$\frac{4+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+5}$	$\frac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n)(2n-1)!}$

1	2	3	4
7.9	$\dfrac{2n^2+n+4}{n^2+n+1}$	$\dfrac{(-1)^n\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 5^{n+1}}$	$\dfrac{(4n+3)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+3)!}$
7.10	$\dfrac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$	$\dfrac{2\cdot 4^{n+1}+3^{n+1}}{2\cdot 4^n-3^n}$	$\dfrac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!+(2n+5)!}$
7.11	$\dfrac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$	$\dfrac{4\cdot 0{,}6^{n+1}}{0{,}5^n+1}$	$\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+1)!(3n+5)}$
7.12	$\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n-3}$	$\dfrac{(-1)^n\cdot 5^{n+1}-3^{n+2}}{3^n-(-1)^n\cdot 5^n}$	$\dfrac{(7n+1)!+(7n+2)!}{(7n+3)!-3(7n+4)!}$
7.13	$\dfrac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$	$\dfrac{4^{n+1}+3\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 4^n-7^n}$	$\dfrac{(4n-1)!-(4n+1)!}{(4n)!+(4n+1)!}$
7.14	$\dfrac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$	$\dfrac{3+5\cdot 0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n-7}$	$\dfrac{(3n-1)!-(3n+1)!}{(3n)!(n+2)}$
7.15	$\dfrac{5n^2+n+7}{n^2+2n-3}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 9^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 9^{n+1}}$	$\dfrac{(5n-1)!+(5n+1)!}{(6n^2+n-7)(5n-1)!}$
7.16	$\dfrac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$	$\dfrac{11^{n+1}+9^n}{11^n-9^n}$	$\dfrac{2\cdot(4n)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+1)!}$
7.17	$\dfrac{n^2-3}{n^2+4n-2}$	$\dfrac{0{,}3^n+0{,}7^{n+2}}{0{,}5^n+5}$	$\dfrac{(8n+1)!-(8n+3)!}{(8n+5)!+6(8n+1)!}$
7.18	$\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\dfrac{100\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-25\cdot 5^{n+1}}$	$\dfrac{3n!+(n+1)!}{n!(n^2+5)}$
7.19	$\dfrac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$	$\dfrac{3\cdot 5^{n+1}+8^{n+1}}{5^n-8^n}$	$\dfrac{9n!+(n+1)!}{n!(3n-1)}$
7.20	$\dfrac{8n-5}{2n+3}$	$\dfrac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$	$\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3(n+3)!+(n+1)!}$

8 Формулируя определение предела последовательности, студент вместо

8.1 «Выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n-a\le\varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 5 является пределом последовательности 1, 1, …, 1… .

8.2 «Найдется такое N_ε, что при $n\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Найдется такое N_ε , что выполняется неравенство

$|x_n - a| \le \varepsilon$». Приведите пример не сходящейся последовательности, которая имеет предел при таком определении?

8.3 «Найдется такое N_ε» сказал: «При всех N_ε». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.4 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность 2, 2, 2, … имеет предел 7.

8.5 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого ε». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении?

8.6 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 6 является пределом последовательности 3, 3, …, 3… .

8.7 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого n». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.8 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении? Если возможно, привести пример.

8.9 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n$ имеет предел 0.

8.10 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.11 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности 4, 4, …, 4… .

8.12 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность 4, 4, 4, … имеет предел 10.

8.13 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

8.14 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого $n > N_\varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.15 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-2)^n$ имеет предел 0.

8.16 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого $\varepsilon \ge 0$». Какие последовательности не будут иметь предел при таком определении? Привести пример.

8.17 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 8 является пределом последовательности 5, 5, …, 5….

8.18 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n + 1$ имеет предел 0.

8.19 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 10 является пределом последовательности 7, 7, …, 7….

8.20 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел 0.

Решение типовых примеров

1.20 Напишите пять первых членов последовательности

$$x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$$

Решение. Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = -\frac{5}{16}$, $x_5 = \frac{6}{25}$.

2.20 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются корни уравнения $\sin \pi x = -1$.

Решение. Решая уравнение $\sin \pi x = -1$, получаем

$$\pi x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $x_n = -1/2 + 2n, n \in \mathbb{N}$.

3.20 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 5 \cdot 2^n$.

Решение. Подставляя в рекуррентную формулу вместо x_n его выражение через x_{n-1}, затем вместо x_{n-1} его выражение через x_{n-2} и так далее, получим

$$x_{n+1} = x_n + 5\cdot 2^n = (x_{n-1} + 5\cdot 2^{n-1}) + 5\cdot 2^n = x_{n-1} + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) =$$
$$= (x_{n-2} + 5\cdot 2^{n-2}) + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) = x_{n-2} + 5\cdot(2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) = \ldots$$
$$= 1 + 5\cdot(2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n) = 1 + 5\cdot\frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 1 + 10\cdot(2^n - 1).$$

Таким образом, формула общего члена последовательности имеет вид:

$$x_n = 1 + 10\cdot(2^{n-1} - 1).$$

4.20 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$$

Решение. Поскольку $|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}\right| = \frac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной, а, значит, ограниченной сверху и снизу.

Так как $a_3 > a_4$ и $a_4 < a_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

5.20 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа N_ε.

Решение. Приведем определение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge N_\varepsilon : |a_n - a| \le \varepsilon .$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Найдем номер N_ε.

Из неравенства $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \le \varepsilon$ получим $\frac{1}{n+1} \le \varepsilon$. Отсюда $n \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Если взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ (так как при $\varepsilon \ge 1$ получим $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] = 0 \notin \mathbb{N}$), то для всех номеров $n \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \le \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 99, 100, …, а при $\varepsilon = 2$ неравенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.20 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1} \ne \frac{1}{2}$.

Решение. Построим отрицание определения предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \iff \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : \left|a_n - a\right| > \varepsilon$$

Оценим $\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{1}{2}\right|$. Будем иметь:

$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+3}{2\cdot(3n-1)}\right| = \frac{n+3}{2\cdot(3n-1)} > \frac{n+3}{6n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{6}$, для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, при $\varepsilon = \frac{1}{6}$ имеем $\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Это означает, что число $1/2$ не является пределом данной последовательности.

7.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3}$;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$**;**

В) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$**.**

Решение.

А) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3} = \left[\!\left[\begin{array}{c}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на n}\end{array}\right]\!\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{8-0}{2+0} = \frac{8}{2} = 4;$$

Б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5} = \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(11+0{,}9^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}5^n+5)} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 11 + \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}9^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}5^n + \lim\limits_{n\to\infty} 5} = \frac{11+0}{0+5} = \frac{11}{5};$$

В) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(n+1)!}{(n+3)!}+\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right)=$$

$$= \text{ по свойствам пределов } =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}+\frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)}\right)= \text{ по свойствам пределов } =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)}=0.$$

8.20 «Для любого $\varepsilon>0$» – «хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n-1$ имеет предел 0.

Решение. Приведем определение предела последовательности.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_\varepsilon : |x_n-a|\leq\varepsilon.$$

Заметим, что последовательность $(-1)^n-1$ не сходится, так как при $n=2k,\, k\in\mathbb{N},$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а при $n=2k+1,\, k\in\mathbb{N},$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$.

С другой стороны, согласно определению предела последовательности, данному студентом, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \exists\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_\varepsilon : |x_n-a|\leq\varepsilon.$$

Возьмем, например, $\varepsilon=5$. При $n=2k,\, k\in\mathbb{N},$ имеем $\left|(-1)^n-1-0\right|=0<5$. При $n=2k+1,\, k\in\mathbb{N},$ получим $\left|(-1)^n-1-0\right|=2<5$. Тогда для $\varepsilon=5$ и $N_\varepsilon=1$ при $\forall n\geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-0|\leq\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(-1)^n-1$ имеет предел, равный нулю, при таком определении.