Лабораторная работа №2
Отображения и числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: отображения, числовые функции, образ, прообраз, график, обратное отображение, композиция отображений
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 71 – 84, [3] с. 23 – 36.

1 Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c так, чтобы оно отображало X на Y (сюрьекция) и его график проходил через точку (x_0, y_0) или доказать, что таких a, b, c не существует

№	X	Y	$(x_0; y_0)$	№	X	Y	$(x_0; y_0)$
1.1	$\mathbb{R}$	$[0;+\infty)$	$(0;1)$	1.11	$(-4;5)$	$(0;8]$	$(0;3)$
1.2	$\mathbb{R}$	$[2;+\infty)$	$(0;4)$	1.12	$(-3;1]$	$[1;5]$	$(0;4)$
1.3	$[2;+\infty)$	$[1;+\infty)$	$(3;4)$	1.13	$(-\infty;+\infty)$	$[0;4]$	$(1;3)$
1.4	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$(1;0)$	1.14	$(-\infty;0]$	$(0;8]$	$(-1;4)$
1.5	$\mathbb{R}$	$(-\infty;1]$	$(0;1)$	1.15	$(0;8)$	$[1;3]$	$(1;2)$
1.6	$(-\infty;0]$	$(-\infty;0]$	$(-3;0)$	1.16	$[4;10]$	$(1;5)$	$(5;4)$
1.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;-1]$	$(2;-1)$	1.17	$(-1;3)$	$[1;9)$	$(2;4)$
1.8	$[1;6]$	$[2;8]$	$(2;4)$	1.18	$(1;5)$	$(3;8]$	$(2;4)$
1.9	$[2;8]$	$[-3;9]$	$(3;5)$	1.19	$(-\infty;1]$	$(1;5)$	$(0;3)$
1.10	$(-3;8)$	$(-4;3)$	$(0;1)$	1.20	$[-2;4)$	$(-1;3)$	$(0;0)$

2 Для функции $y = f(x)$ найти образ множества A и прообраз множества B

№	$y = f(x)$	A	B	№	$y = f(x)$	A	B
1	2	3	4	5	6	7	8
2.1	$y = 3x^2 + 6x - 1$	$(-3;5)$	$(-3;8)$	2.11	$y = e^{x-1}$	$(-\infty;1)$	$(0;1)$
2.2	$y = -x^2 + 2x + 1$	$(-4;0)$	$(-\infty;0]$	2.12	$y = \frac{1}{2^{x+1}}$	$(-\infty;-1)$	$(0;2]$
2.3	$y = \sin x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$	$\left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$	2.13	$y = \ln(x+2)$	$(-2;3]$	$(-\infty;3]$
2.4	$y = \cos 2x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$	$\left\{\frac{1}{2};1\right\}$	2.14	$y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$	$(-1;4]$	$[2;5]$
2.5	$y = tgx$	$\left\{\frac{\pi}{4}k, k \in Z\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right\}$	2.15	$y = \cos 2x - 1$	$(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$	$[-1;0]$

1	2	3	4	5	6	7	8
2.6	$y=\cos x$	$[\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}]$	$(-1;-\frac{1}{2}]$	2.16	$y=\sin(x-1)$	$(1;\frac{3}{2})$	$(0;\frac{1}{3})$
2.7	$y=\cos(-x)$	$(\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2})$	$(0;\frac{\sqrt{2}}{2})$	2.17	$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$	(0;3)	$(-\infty;\log_2 3)$
2.8	$y=\|x\|-1$	$[-4;1)$	$[5;+\infty)$	2.18	$y=\|x^2-5x+6\|$	(0;2,8]	$(\frac{1}{8};+\infty)$
2.9	$y=\|x\|+\|x-1\|$	$[-3;8]$	$(1;+\infty)$	2.19	$y=ctg(x+2)$	$(-1;1)$	$(\frac{\pi}{4};2\pi)$
2.10	$y=\|x-1\|-1$	[0;1]	(2;4]	2.20	$y=\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$	(3;5]	$(0;\frac{1}{13})$

3 Найти инъективное, биективное отображение множества X в Y (доказать его инъективность, биективность) или доказать, что такого отображения нет

№	X	Y	№	X	Y
3.1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	3.11	$\mathbb{R}$	$-\pi;\pi)$
3.2	$[-1;2]$	$[-4;8]$	3.12	$\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$	$\mathbb{R}$
3.3	$[0;+\infty)$	$[2;+\infty)$	3.13	(-1;1)	$\mathbb{R}$
3.4	$[3;+\infty)$	$[0;+\infty)$	3.14	$\mathbb{R}$	(-2;2)
3.5	$[1;+\infty)$	$(-\infty;2]$	3.15	$(0;\pi)$	$\mathbb{R}$
3.6	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	3.16	множество нечётных чисел	$\mathbb{N}$
3.7	$\mathbb{R}$	$(-\infty;0)$	3.17	множество чётных чисел	$\mathbb{N}$
3.8	$(-\infty;0)$	$\mathbb{R}$	3.18	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$
3.9	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$	3.19	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
3.10	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	3.20	$\mathbb{N}$	(0;1)

4 Построить график отображения $y=f(x), x\in X, f:X\to Y$. Найти Y и обратное отображение $f^{-1}:Y\to X$, если это возможно или доказать, что его нет

№	$y=f(x)$	X	№	$y=f(x)$	X
4.1	$y=2x^2+x-1$	$[-\frac{1}{4};5]$	4.11	$y=\sin 2x$	$[0;\pi]$
4.2	$y=\sin x$	$[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$	4.12	$y=\cos 2x$	$[-\frac{\pi}{4};0]$
4.3	$y=\cos x$	$[\pi;2\pi]$	4.13	$y=ctgx$	$(\pi;2\pi)$
4.4	$y=x^2-4x+3$	$[3;8]$	4.14	$y=\sin\frac{x}{2}$	$[-\pi;\pi]$
4.5	$y=tgx$	$[0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi]$	4.15	$y=\cos\frac{x}{2}$	$[0;2\pi]$
4.6	$y=\lvert x-1\rvert$	$[1;5]$	4.16	$y=\sin(x-1)$	$[0;1]$
4.7	$y=\lvert x+1\rvert$	$[-2;3]$	4.17	$y=\cos(x+1)$	$[0;1]$
4.8	$y=\lvert\ln x\rvert$	$(0;1]$	4.18	$y=\sin(x+2)$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
4.9	$y=e^{\lvert x\rvert}$	$[-1;2]$	4.19	$y=\cos(x-2)$	$[0;\pi]$
4.10	$y=e^{\lvert x-1\rvert}$	$[-1;1]$	4.20	$y=tg(x+1)$	$[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$

5 Найти следующие композиции: $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций f и g

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
5.1	2^x	x^3	5.11	3^{x+1}	$\log_3 x-1$
5.2	x^2	$\sqrt{x^3}$	5.12	$\arcsin x$	$\sin x$
5.3	3^x	x^2	5.13	$\arccos x$	$\cos x$
5.4	x^2	$\sqrt{x}$	5.14	$\cos x$	$\arccos x$
5.5	10^x	$\lg x$	5.15	$\arcsin x$	$\cos x$
5.6	x^5	$x+5$	5.16	$\arccos x$	$\sin x$
5.7	$\sin x$	$x-1$	5.17	$\arcsin x$	e^x
5.8	$\cos x$	$\ln x$	5.18	$\arccos x$	$\ln x$
5.9	$x+2$	$\ln(x-2)$	5.19	$\arccos x$	$\arcsin x$
5.10	e^x	$\ln(x-1)$	5.20	$arctgx$	$\ln x$

Решение типовых примеров

1.20 Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c так, чтобы оно отображало X=$[-2;4)$ на Y=$(-1;3)$ (сюрьекция) и его график проходил через точку $(x_0; y_0) = (0;0)$ или доказать, что таких a, b, c не существует.

Решение. Очевидно, что при отображении $y = ax^2 + bx + c$ образом промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка) будет промежуток (убедиться в этом, нарисовав все возможные случаи) или одна точка. Образом включённого левого конца промежутка будет включённый конец промежутка (убедиться геометрически). Поэтому полуинтервал $[-2;4)$ не может перейти в интервал $(-1;3)$. Значит указанного отображения, а следовательно и чисел a, b, c не существует.

2.20 Для функции $y = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ найти образ множества $A = (3;5]$ и прообраз множества $B = (0;\frac{1}{13})$.

*Решение***.** Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) = \ f(x) \big| x \in A$. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на $[0;+\infty)$, то $\forall x_1, x_2 \in [0;+\infty) : x_1 < x_2 \to \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, а функция $y = \frac{1}{2^x}$ или $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, то $\frac{1}{2^{\sqrt{x_1}}} > \frac{1}{2^{\sqrt{x_2}}}$. Поэтому функция $y = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ убывает на $[0;+\infty)$. Отсюда заключаем, что для $f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ образ $f((3;5]) = \left\{ \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} \big| x \in (3;5] \right\} = [\frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}})$, поскольку $f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ не может принять любое значение вне $[\frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ при $x \in (3;5]$ (в силу убывания) и принимает любое значение $a \in [\frac{1}{2^{\sqrt{5}}}; \frac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ в точке $x_0 = \log_2^2 a \in (3;5]$ (доказать).

Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B)=\{x \mid f(x)\in B\}$. В нашем случае $f^{-1}((0;\frac{1}{13}))=\left\{x \left| \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}\in(0;\frac{1}{13})\right.\right\}=$

$=\left\{x \left| 0<\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{13}\right.\right\}$. Решим неравенство $0<\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{13}$. Левое неравенство выполняется при всех $x\in[0;+\infty)$ (области определения f). Правое перепишем в виде $\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\frac{1}{2^{\log_2 13}}$ или $\sqrt{x}>\log_2 13$ или $x>\log_2^2 13$. Итак $f^{-1}((0;\frac{1}{13}))=(\log_2^2 13;+\infty)$.

3.20 Найти инъективное, биективное отображение множества $X=\mathbb{N}$ в $Y=(0;1)$. (доказать его инъективность, биективность) или доказать, что такого отображения нет.

Решение. Рассмотрим отображение $f: X\to Y$, действующее по формуле: $f(x)=\frac{1}{2x}$. Отображение называется инъективным, если оно различные элементы переводит в различные (если $x_1\neq x_2$, то и $f(x_1)\neq f(x_2)$). Очевидно, f - инъективно. Отображение $f: X\to Y$ называется биективным или взаимно-однозначным, если оно сюрьективно, т.е. $\forall y\in Y\exists x\in X: f(x)=y$ и инъективно. Докажем, что нет биективного отображения $f:\mathbb{N}\to(0;1)$. Предположим, что такое отображение существует. Тогда оно является сюрьективным и каждому действительному числу из (0;1) соответствует вполне определённый номер $n\in\mathbb{N}$. Значит, все действительные числа из (0;1) можно записать в порядке возрастания соответствующих им номеров:

$$\alpha_1=0,\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\ldots$$
$$\alpha_2=0,\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}\ldots$$
$$\alpha_3=0,\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)}\ldots$$

Рассмотрим число $\beta=0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ такое, что $\beta_1\neq\alpha_1^{(1)},\beta_1\neq 9,\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq\alpha_2^{(2)},\beta_2\neq 9,\beta_2\neq 0$, $\beta_3\neq\alpha_3^{(3)},\beta_3\neq 9,\beta_3\neq 0,\ldots$. Очевидно, число $\beta\in(0;1)$ и не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_n, n\in\mathbb{N}$. Противоречие.Следовательно наше предположение неверно.

На самом деле нами доказано, что (0;1) не является счётным множеством.

4.20 Построить график отображения $f: X\to Y$, $f(x)=tg(x+1)$,если

$X=[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$. Найти Y и обратное отображение $f^{-1}:Y\to X$, если это возможно или доказать, что его нет.

Решение. Если $x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$, то $x+1\in[1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}]\subset[0;\frac{\pi}{2})$. Поэтому графиком функции $y=tg(x+1), x\in X$ будет часть графика функции $y=tgx, x\in[1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}]$, сдвинутая на 1 влево. Нарисуем эти графики (рис.2).

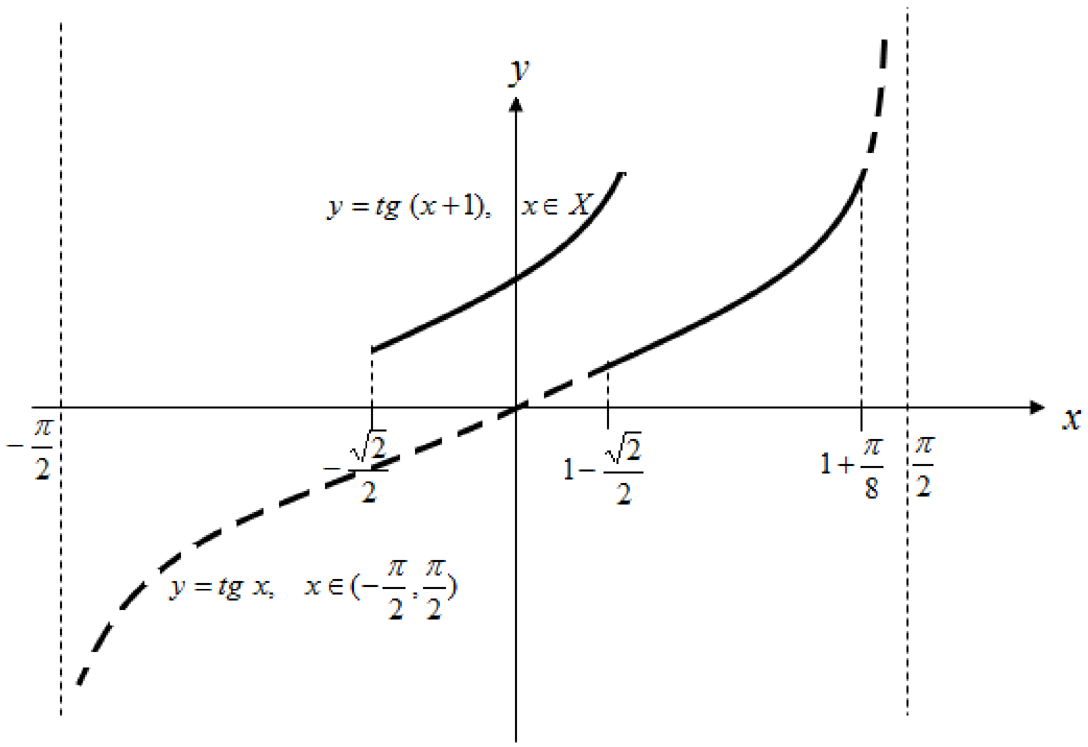

Рисунок 2 – Рисунок к задаче 4.20

Поскольку при $\forall x_1,x_2: x_1<x_2\to x_1+1<x_2+1$ и $y=tgx, x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ возрастает, то и функция $y=tg(x+1), x\in X$ возрастает. Поэтому множеством значений этой функции будет множество $Y=[tg(1-\frac{\sqrt{2}}{2});tg(1+\frac{\pi}{8})]$ и в силу возрастания отображение $f:X\to Y$ будет взаимно-однозначным (биективным), следовательно будет существовать обратное отображение

$f^{-1}: Y \to X$. Найдём его, выразив переменную x через y из уравнения $y = tg(x+1)$ и учтя, что $x+1 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$$x+1 = arctgy \quad \text{или} \quad x = arctgy - 1.$$

Итак, $f^{-1}(x) = arctgx - 1, x \in Y$ – отображение, обратное к $f(x) = tg(x+1), x \in X$.

5.20Найти следующие композиции:

$f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций $f(x) = arctgx f$ и $g(x) = \ln x$.

Решение. Сложная функция $f(g)$ (или композиция функций *f* и *g)* будет определена тогда, когда множество значений *E(g)* функции *g* содержится в области определения *D(f)* функции *f*. В нашем случае *E(g)*$=(-\infty;+\infty)$, *D(f)*$=(-\infty;+\infty)$, *D(g)*$=(0;+\infty)$, *E(f)*$=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Так как *E(g)*$\subset$*D(f)*, то определена функция $f(g(x)) = arctg(\ln x)$.

Поскольку *E(f)* не содержится в *D(g)*, то композиция *g(f)* на естественных областях не возможна.

E(f)$\subset$*D(f)* и значит определена сложная функция $f(f(x)) = arctg(arctgx)$.

E(g) не содержится в *D(g)*. Поэтому композиция *g(g)* на естественных областях не возможна.

На естественной области определения *f* не определена функция $\frac{1}{f^2}$ (в точке *x=0*) и поэтому не определена функция $f\left(\frac{1}{f^2}\right)$.

Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. Так как множество значений функции *f* не содержится в нём, то композиция $\sqrt{f}$ не возможна на естественной области определения *f*.