Лабораторная работа № 17
Исследование функций

Необходимые понятия и теоремы: условия выпуклости, точки перегиба, необходимые и достаточные условия существования точек перегиба, асимптоты графика функции.

Литература: [1] с. 267 – 278, [4] с. 307 – 309.

1 Найти естественную область определения функции $f(x)$, интервалы, где $f(x)$ выпукла, и точки перегиба:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$2x^4-3x^2+x-1$	1.8	$x-\cos x$	1.15	$2x^2+\ln x$
1.2	$\frac{\sqrt{x}}{x+1}$	1.9	$\frac{1}{1-x^2}$	1.16	$1+x^2-\frac{x^4}{2}$
1.3	e^{-x^2}	1.10	$x^2-1\;^{3}$	1.17	$xe^{-\frac{x^2}{4}}$
1.4	$x+36x^2-2x^3-x^4$	1.11	x^5-10x^2+3x	1.18	$\sqrt[3]{x+3}$
1.5	$\frac{1}{x-1\;^{2}}$	1.12	$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$	1.19	$4x^2+\frac{1}{x}$
1.6	$x+\sin x$	1.13	$x^4-12x^3+48x^2$	1.20	$\sqrt[3]{(x-5)^5}+2$
1.7	x^4-6x^2+5x	1.14	$e^{\frac{1}{x}}$	1.21	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$

2 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2.1	$\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$	2.8	$\frac{\ln^2 x}{x}-3x$	2.15	$2^{\frac{1}{1-x}}$
2.2	x^2e^{-x}	2.9	$y=x+\operatorname{arctg}2x$	2.16	$\sin x+\cos x$
2.3	$2x-\frac{\cos x}{x}$	2.10	$\frac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$	2.17	$x+\frac{\sin x}{x}$
2.4	$2x^2+\ln x$	2.11	$\sqrt[3]{x^3-6x^2}$	2.18	$\sqrt{x}\ln x$
2.5	$-x\operatorname{arctg}x$	2.12	$\log_3(4-x^2)$	2.19	$\ln(1+e^x)$

1	2	3	4	5	6
2.6	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	2.13	$\dfrac{x^2}{x+4}$	2.20	$\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$
2.7	$\arcsin\dfrac{1}{x^2}$	2.14	$\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$	2.21	$\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$

3 Найти естественную область определения функции $f(x)$, провести полное исследование и построить её график:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$	3.8	$\dfrac{x^2+8}{x^2-1}$	3.15	$\dfrac{-8x}{x^2+4}$
3.2	$\dfrac{x^2+12}{x+2}$	3.9	$\dfrac{x^2}{x^2-9}$	3.16	$\dfrac{x^3-1}{x+1}$
3.3	$\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$	3.10	$\dfrac{2x^3+1}{x^2}$	3.17	$\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
3.4	$\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$	3.11	$\dfrac{x}{x^2+1}$	3.18	$\dfrac{4x}{(x+1)^2}$
3.5	$-x^2+\dfrac{2}{x}$	3.12	$x-\dfrac{4}{x^2}$	3.19	$\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$
3.6	$\dfrac{x^2+2}{x^2-2}$	3.13	$\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$	3.20	$\dfrac{x^3}{3-x^2}$
3.7	$\dfrac{x^3+4}{x^2}$	3.14	$\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	3.21	$\dfrac{6-5x-x^2}{x^2-2x+1}$

4 Провести полное исследование и построить кривую, заданную параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$:

№	$x(t)$	$y(t)$	№	$x(t)$	$y(t)$
1	2	3	4	5	6
4.1	t^2+1	t^3-3t^2	4.11	t^2+3	t^3+6t^2
4.2	$\dfrac{4}{t^2}$	$t+1$	4.12	$\dfrac{16}{t^2}$	$t+4$
4.3	t^2-1	t^3-6t^2	4.13	$4t^2$	$t-t^4$

1	2	3	4	5	6
4.4	$\dfrac{9}{t^2}$	$t-1$	4.14	t^2+5	$-t^3+6t^2$
4.5	t^2+2	t^3-3t^2	4.15	t^2	t^4-t
4.6	$\dfrac{1}{t^2}$	$t-3$	4.16	$9t^2$	$\dfrac{1}{t}+t^2$
4.7	t^2-2	t^3+3t^2	4.17	t^2-5	$-t^3+3t^2$
4.8	$-\dfrac{4}{t^2}$	t^2+t	4.18	$4t^2-4$	t^4-t
4.9	t^2-3	t^3-6t^2	4.19	$-\dfrac{16}{t^2}$	t^2-t+1
4.10	$-\dfrac{9}{t^2}$	t^2-t	4.20	$2t-t^2$	t^2+t-1

Решение типовых примеров

1.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, её интервалы выпуклости и точки перегиба, если

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^5}+2.$$

Решение. $D(f)=\mathbb{R}$. Имеем:

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}},\quad f''(x)=\frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x=5$. В окрестности точки $x=5$ получим при $x<5$, то $f''(x)<0$ и кривая выпукла вверх, при $x>5$, то $f''(x)>0$ и кривая выпукла вниз. Следовательно, $x=5$ – точка перегиба, при этом $f_{\text{пер}}=2$.

2.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику, если $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Решение.

1) функция определена на промежутках

$$(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty).$$

Так как

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=+\infty,$$

то прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x\;\;x+2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\Big[f\;\;x\;\;-kx\Big]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right]=-4.$$

Следовательно, наклонная асимптота при $x\to\infty$ имеет вид

$$y=x-4.$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\infty.$$

2.21 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику, если $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$.

*Решение***.** Преобразуем функцию к виду

$$f(x)=|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}.$$

1) функция определена на промежутках

$$-\infty;2\;\;\cup\;\;3;+\infty\;\;.$$

Так как

$$\lim_{x\to 3+0}|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=+\infty,\text{ а }\lim_{x\to 3-0}|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\text{ не существует,}$$

то прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\;\;f\;\;x\;\;-k_1x\;\;=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, наклонная асимптота при $x\to+\infty$ имеет вид

$$y_1=x+\frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=-1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x \right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} + x \right) = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, наклонная асимптота при $x \to -\infty$ имеет вид

$$y_2 = -x - \frac{1}{2}.$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to+\infty} |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = +\infty.$$

3.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, провести полное исследование и построить её график, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$$

*Решение***.** Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) Находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть

$$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty).$$

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty.$$

Следовательно, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, то функция не ограничена при $x \to \pm\infty$.

График функции пересекает координатные оси только в начале координат, так как $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x)=-f(x)$, т. е.

$$\frac{(-x)^3}{3-x^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \geq 0$.

2) Асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ равны бесконечности, то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0,$$

Прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

3) Точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Функция $f'(x)$ определена на $D(f)$. В промежутке $(0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ для любого $x \geq 0$. Имеем:

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0,\ 9-x^2>0 \Rightarrow 0<x<3,$$

т. е. функция возрастает на интервалах $(0;\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};3)$.

Аналогично:

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}<0,\ 9-x^2<0 \Rightarrow x>3,$$

т. е. функция убывает на множестве $(3;\infty)$.

4) Промежутки выпуклости, точки перегиба. Вычисляем вторую производную функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$:

$$f''(x)=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Функция $f''(x)$ определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы выпуклости графика функции из неравенств $f''(x)>0$, $f''(x)<0$ для любого $x\geq 0$. Имеем:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}>0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow 0<x<\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла вниз на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла вверх на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ имеем $f''(x)=0$ и $f''(x)<0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $f''(x)>0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости вниз кривой от ее интервала выпуклости вверх. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой.

5) Локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $f''(x)$ локальные экстремумы. Так как $f''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции, точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} f(x)=-4{,}5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} f(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты исследования функции

x	0	$0;\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3};3$	3	$3;\infty$
$f'(x)$	0	+	Не сущ.	+	0	–
$f''(x)$	0	+	Не сущ.	–	–	–
$f(x)$	0	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 1, строим график данной функции для $x \in 0;\infty$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 22).

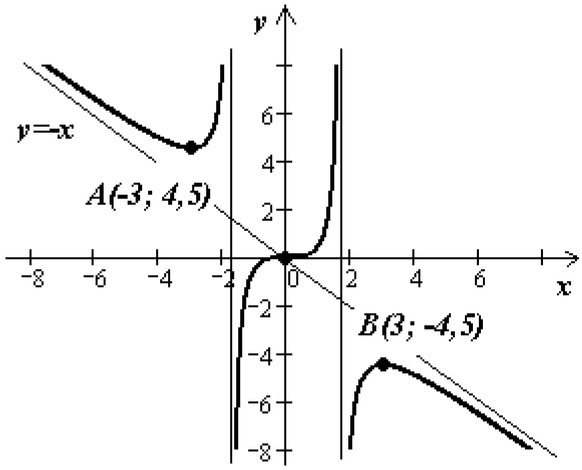

Рисунок 22 – График функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

4.20 Провести полное исследование и построить кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x(t) = 2t - t^2,\ y(t) = t^2 + t - 1.$$

Решение. Решая уравнение $t^2 - 2t + x = 0$ относительно переменной t, получим $t = 1 \pm \sqrt{1 - x}$, при $x \le 1$.

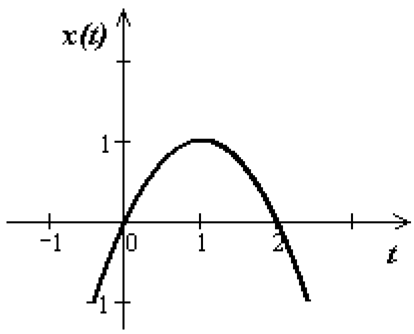

Рисунок 23 – График функции $x(t)=2t-t^2$

I шаг. При $t\in(-\infty;1]$ имеем $t=1-\sqrt{1-x}$. Тогда, подставляя t в параметрическое задание кривой для y, получим

$$y=-3\sqrt{1-x}-x+2,\text{ при } x\in(-\infty;1].$$

Проведем полное исследование функции

$y_1(x)=-3\sqrt{1-x}-x+2$, при $x\in(-\infty;1]$ по схеме из задачи 3.20.

1) $D(f)=(-\infty;1]$. Исследуем поведение функции при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3\sqrt{1-x}-x-2)=+\infty.$$

Находим точки пересечения с осью OX: $A\left(\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2};0\right)$.

График пересекает ось OY в точке $K(0;-1)$. Функция не является периодической, общего вида.

2) Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y_1(x)}{x}=-1,\ b=\lim_{x\to-\infty}(y_1(x)-kx)=-\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

3) Находим первую производную функции $y_1(x)$:

$$y_1'(x)=\frac{3}{2\sqrt{1-x}}-1.$$

Производная обращается в ноль в точке $x=-\dfrac{5}{4}$ и не существует в точке $x=1$. Определяем интервалы монотонности из неравенств $y_1'(x)>0$ и $y_1'(x)<0$ при $x\in(-\infty;1]$. Функция возрастает на $\left(-\dfrac{5}{4};1\right)$, убывает на $\left(-\infty;-\dfrac{5}{4}\right)$. Таким образом, имеем локальный минимум в точке $C\left(-\dfrac{5}{4};-\dfrac{5}{4}\right)$.

4) Находим вторую производную функции $y_1(x)$:

$$y_1''(x)=\frac{3}{4}(1-x)^{-3/2}>0\text{ при } x\in(-\infty;1].$$

Значит, функция $y_1(x)$ выпукла вниз на всей области определения. Результаты исследования заносим в таблицу:

Таблица 2 – Результаты исследования функции

x	$\left(-\infty;-\dfrac{5}{4}\right)$	$-\dfrac{5}{4}$	$\left(-\dfrac{5}{4};1\right)$	1
$f'(x)$	–	0	+	Не сущ.
$f''(x)$	+	–	+	Не сущ.
$f(x)$	↘	$-\dfrac{5}{4}$	↗	1
		min		

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 2, строим график данной функции для $x \in (-\infty; 1]$.

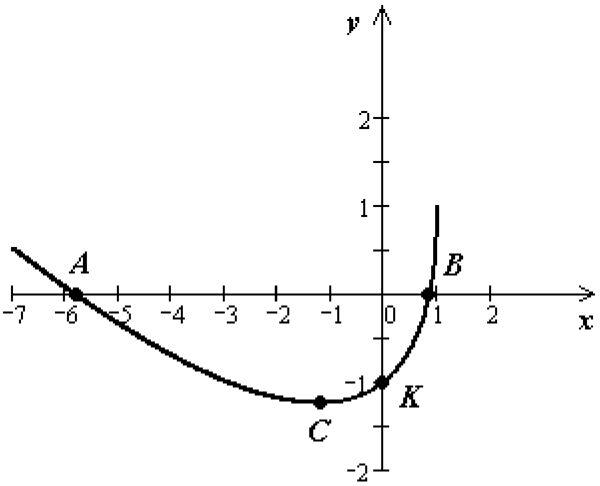

Рисунок 24 – График функции $y_1(x) = -3\sqrt{1-x} - x + 2$, $x \in (-\infty; 1]$

II шаг. При $t \in [1; +\infty)$ имеем $t = 1 + \sqrt{1-x}$. Тогда, подставляя t в параметрическое задание кривой для y, получим

$$y_2 = 3\sqrt{1-x} - x + 2, \text{ при } x \in (-\infty; 1].$$

Проведем полное исследование функции

$y_2(x) = 3\sqrt{1-x} - x + 2$, при $x \in (-\infty; 1]$ по схеме из задачи 3.20.

$D(f) = (-\infty; 1]$. Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} (-3\sqrt{1-x} - x - 2) = +\infty.$$

График функции $y_2(x)$ пересекает ось OY в точке $E(0; 5)$. Функция не является периодической, общего вида. Наклонных асимптот нет.

Находим первую производную функции $y_2(x)$:

$$y_2'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-x}} - 1 < 0 \text{ .при } x \in (-\infty; 1].$$

Таким образом, функция $y_2(x)$ убывает на всей области определения.

Находим вторую производную функции $y_2(x)$:

$$y_2''(x) = -\frac{9}{4}(1-x)^{-3/2} < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1].$$

Значит, функция $y_2(x)$ выпукла вверх на всей области определения.

Исходя из результатов исследования, строим график функции $y_2(x)$ для $x \in (-\infty; 1]$.

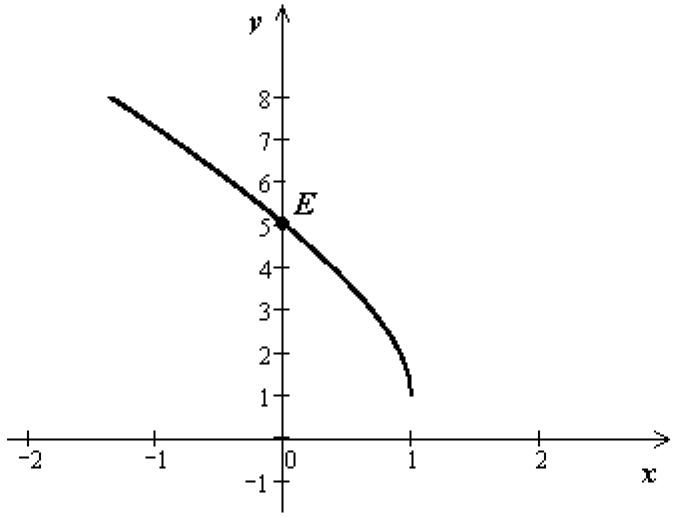

Рисунок 25 – График функции $y_2(x) = 3\sqrt{1-x} - x + 2$, $x \in (-\infty; 1]$

Тогда кривая, заданная параметрическими уравнениями $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = t^2 + t - 1$, имеет вид:

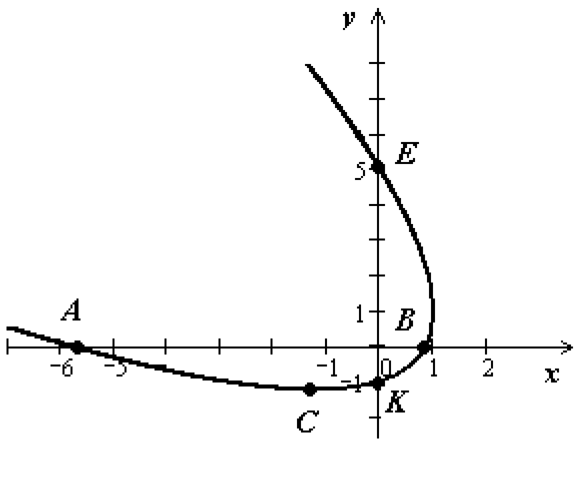

Рисунок 26 – График функции $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = t^2 + t - 1$