Лабораторная работа № 11
Исследование функций на непрерывность

Необходимые понятия и теоремы: теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и композиции непрерывных функций, теорема о непрерывности обратной функции, понятие элементарной функции, теорема о непрерывности элементарных функций,

Литература: [1] с. 169 – 178; 185-195.

1 Используя непрерывность основных элементарных функций и теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, доказать непрерывность функции $f(x)$ во всех точках области определения $D(f)$:

№	$f(x)$	$D(f)$	№	$f(x)$	$D(f)$
1.1	$\dfrac{2^{2x}+3^{3x}}{2x^2+3x+4}$	R_+	1.11	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-x^3}{1+\ln x}$	$(\frac{1}{2};+\infty)$
1.2	$\dfrac{3\sin^2 x-\ln x^2}{x^2+3x+2}$	R_+	1.12	$\dfrac{1-\cos 2x}{\ln x^{(1+x)}}$	$(0;1)$
1.3	$\dfrac{3\sin^2 x-\sin\frac{\pi}{7}}{2x^2+1}$	R	1.13	$\dfrac{x^5-5x+1}{2+\sin(x+1)}$	R
1.4	$\dfrac{1+3\sin 2x}{\pi-\arcsin x}$	$[-1;1]$	1.14	$\dfrac{2\sin^2 x-\sin 1}{2x^2-1}$	$[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$
1.5	$\dfrac{x^4-4x+1}{2-\sin^2(x+1)}$	R	1.15	$\dfrac{2^{3x}+3^{2x}}{x^2+4x+5}$	R_+
1.6	$\dfrac{tgx-\sin x}{1+2^x-\sin^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$	1.16	$\dfrac{\ln x^2+\ln^2 x}{2+\cos x}$	R_+
1.7	$\dfrac{1-\cos x}{\ln x^{(1+x^2)}}$	R_+	1.17	$\dfrac{\sin^3 x+2\sin^2 x}{1+x^4}$	R
1.8	$\dfrac{\sin^3 x+\sin^2 x}{x^8+8}$	R	1.18	$\dfrac{tgx-\sin x}{3-\sin^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
1.9	$\dfrac{\sqrt[5]{x}-x^5}{1+2\ln x}$	$(1;+\infty)$	1.19	$\dfrac{1+3\sin 2x}{8-2\arccos x}$	$[-1;1]$
1.10	$\dfrac{\ln x^2+\ln^2 x}{2^x+\cos x}$	R_+	1.20	$\dfrac{2\sin^2 x-\ln x}{x^2+3x+2}$	R_+

2 Функции f_1 и f_2 являются композициями функций f и g в разном порядке. Найти функцию g. Выяснить, в каких точках функция f должна быть непрерывной и какому условию должно удовлетворять $f(a)$, чтобы по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций можно было сделать заключение о непрерывности в точке a функций f_1 и f_2:

№	$f_1(x)$	$f_2(x)$	№	$f_1(x)$	$f_2(x)$
2.1	$3^{f(x)}$	$f(3^x)$	2.11	$\dfrac{1}{1+f^2(x)}$	$f(\dfrac{1}{1+x^2})$
2.2	$\cos(f^2(x))$	$f(\cos x^2)$	2.12	$\lvert\sin f(x)\rvert$	$f(\lvert\sin x\rvert)$
2.3	$\ln(1+\lvert f(x)\rvert)$	$f(\ln(1+\lvert x\rvert))$	2.13	$f^2(x)$	$f(x^2)$
2.4	$\sin(f(x))$	$f(\sin x)$	2.14	$\cos^2(f(x))$	$f(\cos^2 x)$
2.5	$\sqrt{\lvert f(x)\rvert}$	$f(\sqrt{\lvert x\rvert})$	2.15	$e^{f(x)}$	$f(e^x)$
2.6	$\sin(1+f(x))$	$f(\sin(1+x))$	2.16	$\sqrt[4]{\lvert f(x)\rvert}$	$f(\sqrt[4]{\lvert x\rvert})$
2.7	$f^2(x)+1$	$f(x^2+1)$	2.17	$\sin(f^2(x))$	$f(\sin x^2)$
2.8	$2^{f(x)}+1$	$f(2^x+1)$	2.18	$\sqrt[3]{f^2(x)}$	$f(\sqrt[3]{x^2})$
2.9	$\sqrt{f^2(x)+1}$	$f(\sqrt{x^2+1})$	2.19	$\lvert\cos f(x)\rvert$	$f(\lvert\cos x\rvert)$
2.10	$\ln(1+f^2(x))$	$f(\ln(1+x^2))$	2.20	$\sqrt[3]{f(x)}$	$f(\sqrt[3]{x})$

3 Найти естественную область определения элементарной функции $f(x)$. Используя непрерывность основных элементарных функций и теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и композиции непрерывных функций, доказать непрерывность функции $f(x)$ во всех точках своей области определения :

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$2^{\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}}$	1.11	$\dfrac{\sqrt[3]{\sin 5x-\sin 1}}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$
1.2	$\dfrac{\sqrt{x^2+\lvert 4x^2-1\rvert}}{\sqrt{1+x^3}}$	1.12	$\ln\sqrt{\ln(x^2+x+1)}$
1.3	$\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$	1.13	$\ln(\ln(x^2-5x+6))$

1.4	$\dfrac{\sin\left\lvert x-\frac{\pi}{3}\right\rvert}{1-2\cos x+\cos^2 x}$	1.14	$\dfrac{1-\sqrt{2\sin x}}{1-\sin\sqrt{2x}}$
1.5	$\dfrac{\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{1-\lvert\sin(x-\frac{\pi}{2})\rvert}$	1.15	$\dfrac{\sqrt{x^2}+\lvert 4x^2-1\rvert}{\sqrt{1-\lvert x\rvert^3}}$
1.6	$\dfrac{\sin^2(4x^2-1)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1.16	$\dfrac{\ln(2^x+3^x)}{\sqrt{x^2+x+1)}}$
1.7	$\dfrac{x^2+\arcsin^2 x}{10+x^2-\arcsin^2 x}$	1.17	$\sqrt[3]{\dfrac{\sin\pi x}{\sin(x-1)}}$
1.8	$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}+\lvert 4x^2-1\rvert}{\sqrt{1-\lvert x\rvert^5}}$	1.18	$\dfrac{\cos^2(4x^2-1)}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$
1.9	$\dfrac{\cos x}{\ln\lvert 1-\sin(x-\frac{\pi}{2})\rvert}$	1.19	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
1.10	$\dfrac{\sqrt{x^2}+\lvert x^2-2x+1\rvert}{\sqrt{\lvert x\rvert+\lvert x^2-2x\rvert}}$	3.20	$\sqrt{\ln(x^2+x+1)}$

4 Используя односторонние пределы, доказать непрерывность функции $y=f(x)$ в точке a:

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
4.1	$\begin{cases} 2x^2-x, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x}{\pi(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	1	4.11	$\begin{cases} x^2+2, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x^3}{\sin\pi x}, & x>1 \end{cases}$	1
4.2	$\begin{cases} \dfrac{x-\pi}{\pi}, & x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos x}{2x-\pi}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{2}$	4.12	$\begin{cases} \sin\pi x+\cos\pi x, & x\le 1 \\ \dfrac{\arcsin(x-1)}{\arcsin(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	0
4.3	$\begin{cases} -\dfrac{5\cos x}{3}, & x\le\pi \\ \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}, & x>\pi \end{cases}$	π	4.13	$\begin{cases} 3x^2-x-1, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x}{\pi\sin(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	1

4.4	$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x}, & x \le 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$	0	4.14	$\begin{cases} \cos^2(x-\dfrac{\pi}{6}), & x \le 0 \\ \dfrac{2(1-\cos 3x)}{\sin^2 4x}, & x > 0 \end{cases}$	0
4.5	$\begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \le \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\sqrt{3}-ctgx}{6x-\pi}, & x > \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{6}$	4.15	$\begin{cases} \cos x - \sin \pi x, & x \le 2 \\ \dfrac{\sin x - \sin 2}{x-2}, & x > 0 \end{cases}$	2
4.6	$\begin{cases} 2^{x+5}, & x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}, & x > 0 \end{cases}$	0	4.16	$\begin{cases} \dfrac{\pi(5-2x)}{\cos \pi x}, & x < 2{,}5 \\ 2x-3, & x \ge 2{,}5 \end{cases}$	2,5
4.7	$\begin{cases} x^2-2, & x \le -1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}, & x > -1 \end{cases}$	–1	4.17	$\begin{cases} \dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}, & x > 0 \\ (x-1)^2, & x \le 0 \end{cases}$	0
4.8	$\begin{cases} ctg^2(\dfrac{\pi}{3}+x^2), & x \le 0 \\ \dfrac{x}{\sin 3x}, & x > 0 \end{cases}$	0	4.18	$\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x^2}{2\sin^4 x}, & x > 0 \\ \sin(x+\dfrac{\pi}{6}), & x \le 0 \end{cases}$	0
4.9	$\begin{cases} \dfrac{\pi}{x}, & x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi-2x}{\cos x}, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{2}$	4.19	$\begin{cases} \cos(x+\dfrac{\pi}{3}), & x \le 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}, & x > 0 \end{cases}$	0
4.10	$\begin{cases} 5\cos x, & x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2 5x}{x \arcsin 5x}, & x > 0 \end{cases}$	0	4.20	$\begin{cases} x^2+1, & x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$	0

5 Найти естественную область определения функции $y = f(x)$. Доказать непрерывность функции $y = f(x)$ во всех точках своей естественной области определения. Выяснить, является ли эта функция элементарной:

№	$f(x)$	№	$f(x)$
5.1	$\dfrac{\sqrt[3]{[x]^3-3x^2+2[x]}}{\sqrt{x-x^2}}$	5.11	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{\sqrt{\pi x - x^2}}$
5.2	$\dfrac{\cos(x\{x\})}{\sqrt{x-x^2}}$	5.12	$\sqrt[3]{\operatorname{sgn}(\cos x)+2\arccos x}$

5.3 $\dfrac{[x]\ln x}{\arcsin x}$

5.4 $\dfrac{\{x\}\ln x}{(1-x)\arccos x}$

5.5 $\dfrac{[\frac{x-1}{2}](\sin^2 x+\cos x^2)}{\arccos x}$

5.6 $\dfrac{\{\frac{x-1}{2}\}(\sin^2 x+\cos x^2)}{\lg(1+x^2)\arccos x}$

5.7 $\dfrac{\{\frac{x+1}{2}\}\sqrt{1+\arccos^2 x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

5.8 $\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin\pi x)}{\sqrt{2x-2x^2}}$

5.9 $\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin\pi x)}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

5.10 $\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{\sqrt{3\pi x-x^2-2\pi^2}}$

5.13 $\sqrt{(3+\arcsin x)\operatorname{sgn}(\cos x)}$

5.14 $\dfrac{(-1)^{[x]}}{\ln(1+\cos^2 x)\sin\pi x}$

5.15 $\dfrac{(-1)^{[x]}\sin\pi x}{|(x-\pi)(x-3\pi)(x+4\pi)|}$

5.16 $\dfrac{(-1)^{[x+\frac{1}{2}]}}{\ln(1+\cos^2\pi x)\cos\pi x}$

5.17 $|\sin\pi x|+(-1)^{[x+\frac{1}{2}]}\cos\pi x$

5.18 $\dfrac{(-1)^{\{x\}+2[x]-x}\sin\pi x}{x^3-2x^2+x}$

5.19 $\dfrac{1-\sqrt{\cos x}+\operatorname{sgn}^2 x}{1-\cos\sqrt{x}}$

5.20 $\dfrac{\operatorname{sgn}^2 x}{x\sqrt{|\cos x|}}$

6 Проверить, использовалась ли непрерывность некоторой функции при вычислении пределов в лабораторной работе № 9, в задачах 3 и 4. Найти предел последовательности. Непрерывность какой функции (и в какой точке) использовалась при вычислении предела:

6.1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{arctg\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$

6.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)$

6.3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\sin^2\frac{1}{n}}$

6.4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\arcsin(1-n\sin\frac{1}{n})$

6.11 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-1)$

6.12 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-\sqrt{\cos\frac{1}{n}})$

6.13 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\dfrac{n^2+n-1}{n^2-n+1}$

6.14 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n\ln\cos\frac{1}{n}}$

6.5	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi+\frac{1}{n}}-\sqrt{\pi}}{arctg\frac{1}{n}}$	6.15	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{2}{n})}$
6.6	$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\dfrac{1+n}{n})$	6.16	$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{3}{4n})^n$
6.7	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arcsin\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$	6.17	$\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2})$
6.8	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)(\sqrt[n]{e}-1)$	6.18	$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{2}{n})$
6.9	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n^2+3)(\sqrt[n]{3}-1)}{n}$	6.19	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{\cos\frac{1}{n}}}{1-\cos\sqrt{\frac{1}{n}}}$
6.10	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n\lg\cos\frac{1}{n}}$	6.20	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}})^n$

7 Найти область определения и исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

№	a	при $x\neq a$	при $x=a$	№	a	при $x\neq a$	при $x=a$
7.1	0	$\ln(1-\dfrac{\sin^3 x}{x})$	0	7.11	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$	$\dfrac{1}{2}$
7.2	0	$ctgx\ln(1-\sin x)$	2	7.12	0	$\dfrac{\ln(1-2\sin^4 x)}{x\sqrt{1-4x^2}}$	–2
7.3	0	$\sqrt[x^2]{\cos x\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{e}$	7.13	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4\sqrt{x}}$	0
7.4	0	$\sqrt[x]{1-x+x^2}$	2	7.14	1	$\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{\arcsin\sqrt{1-x^2}}$	1
7.5	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin x(1-\cos\sqrt{x})}$	$\dfrac{1}{2}$	7.15	0	$\ln(3-\dfrac{\sin 3x}{x})$	0

7.6	1	$\dfrac{\arcsin\sqrt[4]{x-x^2}}{\sqrt[4]{3-2x-x^2}}$	1	7.16	0	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x})$	$-\dfrac{1}{2}$
7.7	0	$\ln(1-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}})$	0	7.17	0	$\dfrac{\sqrt[x^2]{1+\sin x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$	e
7.8	0	$\dfrac{\sqrt[x^2]{1+2\sin x^2}}{\arccos 6x}$	–1	7.18	0	$\sqrt[x]{1-2x}$	e^{-2}
7.9	0	$\dfrac{\sqrt[x^4]{\cos x^2}}{1+arctgx}$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	7.19	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
7.10	0	$\sqrt[x]{1+2x-x^2}$	2	7.20	1	$\dfrac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{3x-2x^2-1}}$	1

8 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и определить характер точек разрыва (здесь $[x]$-функция «целая часть», $\{x\}$-функция «дробная часть», $D(x)$ - функция Дирихле) :

8.1	$\{\dfrac{1}{x}\}$	8.11	$\dfrac{[x]}{\{x\}}$
8.2	$\{\sin\dfrac{1}{x}\}$	8.12	$\operatorname{sgn}(\sin(\dfrac{1}{x}))$
8.3	$[2\sin\dfrac{1}{x}]$	8.13	$2^{[x]}$
8.4	$(-1)^{[x]}-\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$	8.14	$\{x\}D(x-\sqrt{2})$
8.5	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin\pi x)}{\{x\}}$	8.15	$\{x\}D(x-1)$
8.6	$x\operatorname{sgn}(\cos(\dfrac{1}{x}))$	8.16	$\{x-\sqrt{2}\}D(x)$
8.7	$\operatorname{sgn}(\cos(\dfrac{1}{x}))$	8.17	$\{x-1\}D(x)$
8.8	$[2\cos\dfrac{1}{x}]$	8.18	$\{x\}D(x)$
8.9	$\lvert\{x\}-\dfrac{1}{2}\rvert$	8.19	$x^2\operatorname{sgn}(\cos\dfrac{1}{x})+\lvert D(x)-\dfrac{1}{2}\rvert$
8.10	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\cos\pi x)}{\{x\}}$	8.20	$x^2\operatorname{sgn}(\cos\dfrac{1}{x})$

Решение типовых примеров

Задача 1.20 Функция $f_1(x)=\sin x$ непрерывна (это основная элементарная функция). Следовательно, $f_2(x)=\sin^2 x$ непрерывна (как произведение непрерывной f_1 на непрерывную f_1). Так как постоянная функция $f_3(x)\equiv 2$ непрерывна, то и $f_4(x)=2\sin^2 x$ непрерывна (как произведение непрерывной f_3 на непрерывную f_2). Функция $f_5(x)=\ln x$ непрерывна на R_+ (это основная элементарная функция). Следовательно, $f_6(x)=2\sin^2 x-\ln x$ непрерывна (как разность непрерывной f_4 и непрерывной f_5). Функция $f_7(x)=x^2+3x+2$ непрерывна (многочлены - основные элементарные функции). Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x-\ln x}{x^2+3x+2}$ непрерывна (как частное непрерывной f_6 и непрерывной f_7; очевидно , что во всех точках из R_+ знаменатель – функция f_7 – не равна нулю).

Задача 2.20 $g(x)=\sqrt[3]{x}$. Для непрерывности функции $\sqrt[3]{f(x)}$ в точке a надо потребовать непрерывность функции $f(x)$ в этой же точке a. Для непрерывности функции $f(\sqrt[3]{x})$ в точке a надо потребовать непрерывность функции $f(x)$ в точке $\sqrt[3]{a}$.

Задача 3.20 Функция $f_1(x)=x^2+x+2$ непрерывна (это многочлен – основная элементарная функция). Функция $f_2(y)=\ln y$ непрерывна (основная элементарная функция). Учитывая, что $\forall x\in R \quad x^2+x+2>1$ (легко найти минимум функции $f_1(x)=x^2+x+2$ и убедиться, что он больше единицы), заключаем: $\forall x\in R$ композиция функций f_1 и f_2 определена (так как $\forall x\in R \quad f_1(x)>0$) и непрерывна (по теореме о непрерывности композиции). Учитывая, что функция $f_3(z)=\sqrt{z}$ непрерывна (степенная функция является основной элементарной), а функция $z=\ln y=\ln(x^2+x+2)$ непрерывна и строго положительна (так как $x^2+x+2>1$), получаем, что функция $f(x)=f_3(\ln(x^2+x+2))=f_3(f_2(f_1(x)))$ определена $\forall x\in R$ и непрерывна (по теореме о непрерывности композиции).

Задача 4.20 Функция $f_1(x)=x^2+1$ непрерывна всюду, в частности, она непрерывна в точке 0. Поэтому её предел в точке 0 равен значению в этой точке (равен 1), а следовательно, и предел в точке 0 слева тоже равен 1. Предел функции $f_2(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке 0 равен 1 ,а следовательно, и предел в точке 0 справа тоже равен 1. Так как данная функция $f(x)$ равна $f_1(x)$ слева от 0, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_1(x)=1$. Так как данная функция $f(x)$ равна $f_2(x)$ справа от 0, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x)=1$. Из этого следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=1=f(0)$, иначе говоря, следует, что $f(x)$ непрерывна в точке 0.

Задача 5.20. Точка $x=0$ не принадлежит области определения функции $\operatorname{sgn}^2 x$. Во всех других точках функция $\operatorname{sgn}^2 x$ равна 1 и, следовательно, непрерывна на $R_-\cup R_+$ (эта функция, конечно, не является непрерывной на R).

Так как функции $y=\cos x$ и $z=|y|$непрерывны, то по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций, их композиция $z=|\cos x|$ также непрерывна. Так как функция $t=\sqrt{z}$ непрерывна, то и функция $t=\sqrt{|\cos x|}$ непрерывна (снова по теореме о непрерывности композиции).

Для доказательства непрерывности данной функции $f(x)$ осталось применить теорему о непрерывности произведения (получим непрерывность функции $x\sqrt{|\cos x|}$) а затем - теорему о непрерывности частного.

Функция $y=|x|$ является элементарной (она может быть представлена как композиция двух степенных (основных элементарных) функций $t=x^2$ и $y=t^{0,5}$. Функция $y=\operatorname{sgn}^2 x$ (числитель), конечно, не является элементарной (она не непрерывна в точке 0) , однако, во всех точках, где знаменатель $x\sqrt{|\cos x|}$ не равен нулю, числитель $\operatorname{sgn}^2 x$ равен единице и данная функция $y=f(x)$ может быть представлена в виде $y=\dfrac{1}{x\sqrt{|\cos x|}}$; она может быть получена из основных элементарных применением арифметических операций и композиций в конечном числе и, следовательно, является элементарной.

Задача 6.20.

$$(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n = ((1+(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1))^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}})^{n(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1)}.$$

Обозначим: $y_n = \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1$. Тогда $y_n \to 0$ при $n \to +\infty$ (здесь мы воспользовались тем, что $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to +\infty$, непрерывностью функции $\cos$ в нуле и определением непрерывности по Гейне).

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n}$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ (мы использовали замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и определение предела по Гейне) и

$$\lim_{n\to+\infty} ny_n = \lim_{n\to+\infty} n(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1) = \lim_{n\to+\infty} n(-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}) = \lim_{n\to+\infty} -2\frac{\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}{4(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2}) = -\frac{1}{2} \text{ т}$$

о $\lim\limits_{n\to+\infty}((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Последнее равенство требует обоснования. Перейдём от степенно-показательного выражения к показательному:

$((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n} = e^{\ln((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n}} = e^{ny_n\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}}$. Обозначим показатель через z_n и найдём его предел. При $n \to +\infty$ предел $(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}$ равен e. Поэтому предел $\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}$ равен $\ln e$ (здесь мы воспользовались непрерывностью логарифма в точке e), то есть равен 1. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} ny_n\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} ny_n \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$. Итак, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\frac{1}{2}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{z_n} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (здесь мы воспользовались непрерывностью экспоненты в точке e).

Задача 7.20. Функция $f_1(x) = \sqrt[4]{1-x^2}$ определена при $1-x^2 \ge 0$, то есть при $|x| \le 1$. При этих x имеем: $0 \le 1-x^2 \le 1$ и, следовательно, $0 \le \sqrt[4]{1-x^2} \le 1$

и, следовательно, функция $f_2(x) = \quad = \arcsin\sqrt[4]{1-x^2}$ определена. Функция $f_3(x) = \sqrt[4]{-2x^2+3x-1}$ определена при $-2x^2+3x-1 \geq 0$, то есть при $0{,}5 \leq x \leq 1$. Обе функции, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ определены при $0{,}5 \leq x \leq 1$. Частное функций $f_2(x)$ и $f_3(x)$ определено только при $0{,}5 < x < 1$ (при $x=1$ и $x=0{,}5$ знаменатель $f_3(x)$ равен нулю), однако, при $x=1$ функция $f(x)$ специально доопределена: $f(1)=1$. Итак, областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(0{,}5;1]$.

Функция, заданная формулой $h(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{-2x^2+3x-1}}$, получена из обратной тригонометрической функции $\arcsin$ и степенных функций применением арифметических операций и композиций (конечное число раз), является элементарной и, следовательно, непрерывной в своей естественной области определения $(0{,}5;1)$. Поскольку $f(x)$ совпадает с $h(x)$ на интервале $(0{,}5;1)$, то и $f(x)$ непрерывна во всех точках этого интервала.

Осталось исследовать $f(x)$ на непрерывность в точке 1:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in D(f)\\ x\neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} \frac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{-2x^2+3x-1}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} \frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{x-0{,}5})} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} \frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})} \cdot \frac{(\sqrt[4]{1+x})}{\sqrt[4]{x-0{,}5)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1+1)}}{\sqrt[4]{(1-0{,}5)}} \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} \frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x}))(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})} = [\text{замена: } \sqrt[4]{1-x}\cdot\sqrt[4]{1+x} = t] =$$

$$= \sqrt[4]{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\arcsin t}{t} = [\text{замена: } \arcsin t = u] = \sqrt[4]{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{u}{\sin u} = \sqrt[4]{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{u}{\sin u} = \sqrt[4]{2}.$$

Предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in D(f)\\ x\neq 1}} f(x)$ существует, но не равен заданному значению функции в точке 1 и, следовательно, функция имеет в точке 1 устранимый разрыв.

Задача 8.20. Функция $y=\cos\frac{1}{x}$ непрерывна во всех точках своей области определения. Так как функция $z=\operatorname{sgn} y$ непрерывна всюду, кроме точки 0, то композиция этих функций – функция $z=\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ непрерывна всюду, кроме, возможно, тех точек, в которых $\cos\frac{1}{x}=0$ (и, конечно, кроме точки 0). Решаем уравнение: $\cos\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2\pi k}, k\in Z, k\neq 0$. Учитывая непрерывность функции $g(x)=x^2$, делаем вывод о непрерывности данной функции $f(x)=x^2\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ во всех точках, кроме точки 0 и, возможно, точек вида $\frac{1}{2\pi k}, k\in Z, k\neq 0$.

Заметим, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ существует (и равен нулю) как предел произведения бесконечно малой при $x\to 0$ функции $g(x)=x^2$ на ограниченную $z(x)=\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$. Следовательно, в точке 0 функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв.

Рассмотрим точку вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n\in N$.

Справа от этой точки (точнее, в правосторонней окрестности $(\frac{1}{2n\pi};\frac{1}{(2n-1)\pi})$) имеем: $\frac{1}{2n\pi}<x<\frac{1}{(2n-1)\pi})$ и, следовательно, $(2n-1)\pi<\frac{1}{x}<2n\pi$ и, следовательно, $\cos\frac{1}{x}<0$ и, следовательно, $\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})=-1$. Итак, в правосторонней окрестности $(\frac{1}{2n\pi};\frac{1}{(2n-1)\pi})$ точки $\frac{1}{2n\pi}$ имеем: $f(x)=-x^2$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2n\pi}\\ x>\frac{1}{2n\pi}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2n\pi}\\ x>\frac{1}{2n\pi}}}(-x^2)=-(\frac{1}{2n\pi})^2$.

Отметим, что мы использовали непрерывность функции $y=-x^2$. Таким образом, в рассматриваемой точке $\frac{1}{2n\pi}$ функция $f(x)$ имеет конечный предел справа (и он равен $-(\frac{1}{2n\pi})^2$).

Аналогично, рассматривая левостороннюю окрестность $(\frac{1}{(2n+1)\pi};\frac{1}{2n\pi})$ точки $\frac{1}{2n\pi}$, получим: в рассматриваемой точке $\frac{1}{2n\pi}$ функция $f(x)$ имеет конечный предел справа (и он равен $(\frac{1}{2n\pi})^2$).

Итак, в точках вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n \in N$ функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода.

В точках вида $(-\frac{1}{2n\pi})$, где $n \in N$ можно было бы провести исследование по аналогии с исследованием, проведённым в точках вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n \in N$. Однако, проще учесть чётность данной функции $f(x)$ и тот очевидный факт, что предел справа функции $f(x)$ в точке $(-\frac{1}{2n\pi})$ равен пределу слева в точке $\frac{1}{2n\pi}$, а предел слева в точке $(-\frac{1}{2n\pi})$, соответственно, пределу справа в точке $\frac{1}{2n\pi}$.