Лабораторная работа № 10
Непрерывность функции. Точки разрыва

Необходимые понятия и теоремы: различные определения непрерывности функции в точке, непрерывность слева, непрерывность справа, точка устранимого разрыва, точка разрыва первого рода, точка разрыва второго рода.

Литература: [1] с. 169 – 176, [2] с. 98 – 135 .

1 Известно, что функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ непрерывна в точке a, являющейся предельной для $D(f)$. Найти $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Пусть функция $y = g(x)$ определена в точке a. Можно ли находить $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, просто вычисляя значение функции $y = g(x)$ в точке a, если известно, что $y = g(x)$ не является непрерывной в точке a?

№	$f(x)$	$D(f)$	a	№	$f(x)$	$D(f)$	a
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1.1	$\dfrac{\cos(\arcsin\frac{x}{2})}{\sqrt{x+2}}$	$[-2;2]$	1	1.11	$\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{1+x}}}$	$\mathbb{R}$	7
1.2	$\log_2 \dfrac{18+\sqrt{x}}{x^2+4}$	$\mathbb{R}_+$	4	1.12	$\sin(\dfrac{2\sqrt{x^2+\pi x}}{\sqrt{3}}+\dfrac{x}{3})$	$[0;\frac{\pi}{2}]$	$\dfrac{\pi}{2}$
1.3	$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$	$\mathbb{R}_+$	1	1.13	$\ln\dfrac{x^4+x+1}{x^3+2}$	$\mathbb{R}_+$	1
1.4	$\arcsin\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$	$\mathbb{R}$	1	1.14	$\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1}{x^2+3}}$	$\mathbb{R}$	1
1.5	$\lg\dfrac{x^2+10x+1}{x^2+21}$	$\mathbb{R}_+$	2	1.15	$\dfrac{\sin(\arccos\frac{x}{2})}{\sqrt{x+2}}$	$[-2;2]$	1
1.6	$\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{x^2}}}$	$\mathbb{R}$	8	1.16	$\log_2\dfrac{98+\sqrt{x}}{x^3+9x}$	$\mathbb{R}_+$	4
1.7	$\sin(\dfrac{x}{3}+\sqrt{x^2+\pi x})$	$[0;\pi]$	π	1.17	$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{x}}}$	$\mathbb{R}_+$	9
1.8	$\ln\dfrac{x^2+6x+1}{x^2+7}$	$\mathbb{R}_+$	1	1.18	$\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$	$\mathbb{R}$	1

1	2	3	4	5	6	7	8
1.9	$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2}$	$\mathbb{R}$	1	1.19	$\lg\dfrac{x^2+10x+9}{\sqrt{x^2+3}}$	$\mathbb{R}_+$	1
1.10	$\arccos\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$	$\mathbb{R}$	1	1.20	$\dfrac{x^2+1}{x+2}$	$(-1;1)$	0

2 Для функции $y=f(x)$, с областью определения $\mathbb{R}$, точки a и положительных чисел ε_1 и ε_2 найти такие положительные δ_1 и δ_2, что для любых $x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Для произвольного положительного ε найти такое положительное δ, что для любых $x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Построить график функции $y=f(x)$ и проиллюстрировать геометрически процедуру поиска δ по заданному ε. Записать доказанное утверждение, используя понятие предела и понятие непрерывности функции в точке:

№	$f(x)$	a	ε_1	ε_2	№	$f(x)$	a	ε_1	ε_2
2.1	$2x+1$	1	0,5	0,1	2.11	$2x+1$	0,3	0,1	0,01
2.2	$0,5x+1$	2	0,1	0,01	2.12	$0,5x+1$	1	0,3	0,1
2.3	$3x-1$	1	0,3	0,1	2.13	$3x-1$	2	0,5	0,1
2.4	$12x-4$	0,3	0,5	0,1	2.14	$12x-4$	1	0,1	0,01
2.5	$x-3$	–1	0,1	0,01	2.15	$x-3$	1	0,3	0,1
2.6	$6x+2$	–2	0,3	0,1	2.16	$6x+2$	2	0,5	0,1
2.7	$0,3x+3$	–3	0,5	0,1	2.17	$0,3x+3$	1	0,1	0,01
2.8	$0,3x-1$	1	0,1	0,01	2.18	$0,3x-1$	–1	0,3	0,1
2.9	$2x+5$	2	0,3	0,1	2.19	$2x+5$	–2	0,5	0,1
2.10	$3x-5$	1	0,5	0,1	2.20	$3x-5$	–3	0,1	0,01

3 Доказать непрерывность функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, где $D(f) = \mathbb{R}$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon - \delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152)

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
3.1	$x^2 - 2$	0	3.11	$3 - 2x^2$	1
3.2	$2x^2 + 3$	2	3.12	$8 - 4x^2$	0
3.3	$3x^2 - 2$	1	3.13	$2 - x^2$	0
3.4	$3x^2 - 2$	3	3.14	$3 - 2x^2$	2
3.5	$x^2 - 1$	2	3.15	$8 - 4x^2$	1
3.6	$x^2 - 2$	4	3.16	$2 - 3x^2$	3
3.7	$2x^2 + 3$	0	3.17	$1 - x^2$	2
3.8	$3x^2 - 2$	2	3.18	$2 - 3x^2$	2
3.9	$3x^2 - 2$	1	3.19	$1 - x^2$	3
3.10	$x^2 - 1$	3	3.20	x^2	2

4 Построить график функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и график функции $y = f(x)$, $x \in E$. Доказать непрерывность функции $y = f(x)$, $x \in E$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon - \delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152). Является ли непрерывной в точке a функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$? В обозначении предела и при формулировке утверждений о непрерывности обязательно указывайте область определения функции:

№	$f(x)$	E	a	№	$f(x)$	E	a
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4.1	$\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-1, x \geq 0 \end{cases}$	$[0;3]$	0	4.11	$\begin{cases} x^2, x<-1 \\ -x, x \geq -1 \end{cases}$	$[-1;3]$	-1
4.2	$\begin{cases} x+1, x<1 \\ x^2-2, x \geq 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.12	$\begin{cases} x^2-2, x<2 \\ x+1, x \geq 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2

1	2	3	4	5	6	7	8
4.3	$\begin{cases} x, x<-1 \\ x^2, x\ge -1 \end{cases}$	$[-1;3]$	-1	4.13	$\begin{cases} x^2, x<0 \\ x+1, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0
4.4	$\begin{cases} x, x<2 \\ 2-x^2, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2	4.14	$\begin{cases} 2-x^2, x<1 \\ 2x, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1
4.5	$\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-3, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0	4.15	$\begin{cases} x-3, x<-1 \\ x+1, x\ge -1 \end{cases}$	$[-1;0]$	-1
4.6	$\begin{cases} x+1, x<1 \\ 2-x^2, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.16	$\begin{cases} 2-x^2, x<2 \\ x+1, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2
4.7	$\begin{cases} -x, x<-1 \\ -x^2, x\ge -1 \end{cases}$	$[-1;0]$	-1	4.17	$\begin{cases} -x^2, x<2 \\ -x, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;5]$	2
4.8	$\begin{cases} -x, x<2 \\ x^2-1, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;3]$	2	4.18	$\begin{cases} x^2-1, x<1 \\ -x, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1
4.9	$\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2-2, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0	4.19	$\begin{cases} 2-x^2, x<0 \\ x-1, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1]$	0
4.10	$\begin{cases} -x, x<1 \\ x^2+1, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.20	$\begin{cases} x+1, x<2 \\ x^2, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;3]$	2

5 Для вычисления значения функции $y=f(x)$ в точке a значение аргумента a нашли с некоторой погрешностью Δx. В результате и значение функции оказалось получено с некоторой погрешностью Δf (то есть вместо $f(a)$ вычислили $f(a+\Delta x)$; погрешность значения функции Δf равна $f(a+\Delta x)-f(a)$, она зависит от погрешности Δx аргумента). Для указанных функции $y=f(x)$, $D(f)=\mathbb{R}$ и точки a доказать, что погрешность Δf значения функции может быть сделана сколь угодно малой, если только погрешность аргумента Δx достаточно мала. Точнее, доказать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любых Δx, удовлетворяющих условиям $a+\Delta x\in D(f)$ и $|\Delta x|<\delta$, выполняется условие $|\Delta f|<\varepsilon$. Сформулировать определение непрерывности функции «на языке приращений».

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
5.1	$3+x-2x^2$	1	5.11	x^2+2x-2	0
5.2	$8+x-4x^2$	0	5.12	$2x^2+2x+3$	2
5.3	$2+x-x^2$	0	5.13	$3x^2+2x-2$	1
5.4	$3+x-2x^2$	2	5.14	$-x^2+2x-2$	3
5.5	$8+x-4x^2$	1	5.15	x^2+2x-1	2
5.6	$2+x-3x^2$	3	5.16	x^2+2x-2	4
5.7	$1+x-x^2$	2	5.17	$-2x^2+2x+3$	0
5.8	$2+x-3x^2$	2	5.18	$-x^2+x-4$	2
5.9	$1+x-x^2$	3	5.19	x^2+x-2	1
5.10	$1+x+x^2$	2	5.20	x^2-2x+3	1

6 Сформулировать определение непрерывности функции на языке окрестностей. Построить график функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Построить указанную окрестность $V(f(a))$ точки $f(a)$ и найти (сначала геометрически, а затем аналитически) такую окрестность $U(a)$ точки a, что $f(U(a)\cap D(f))\subset V(f(a))$:

№	$f(x)$	$D(f)$	a	$V(f(a))$	№	$f(x)$	$D(f)$	a	$V(f(a))$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
6.1	$\frac{x-1}{x}$	$\mathbb{R}_-$	–3	$(1;2)$	6.11	$\frac{6x}{x+2}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$
6.2	$\frac{x+1}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;2)$	6.12	$\frac{x}{x-1}$	$(1;+\infty)$	2	$(1;3)$
6.3	$2x^2-5$	$\mathbb{R}$	2	$(2;4)$	6.13	$1+2x^2$	$\mathbb{R}$	2	$(4;6)$
6.4	$1-\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	4	$(-2;0)$	6.14	$1+\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$
6.5	$2\sqrt{-x}$	$\mathbb{R}_-$	–4	$(3;5)$	6.15	$\sqrt{x+1}$	$\mathbb{R}_+$	8	$(2;4)$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
6.6	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2}$	$(1;3)$	6.16	$\frac{4}{x}$	$\mathbb{R}_+$	2	$(1;3)$
6.7	$\frac{x^2-9}{x-3}$	$(3;+\infty)$	1	$(3;5)$	6.17	$\frac{x^2-4}{x-2}$	$(2;+\infty)$	2	$(3;5)$
6.8	$\frac{3-x}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$	6.18	$\frac{6-x}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(4;6)$
6.9	$\sqrt{x-3}$	$(3;+\infty)$	7	$(1;2)$	6.19	$\sqrt{x-1}$	$(1;+\infty)$	5	$(1;3)$
6.10	x^3-6	$\mathbb{R}$	2	$(1;3)$	6.20	$\frac{x+2}{x-1}$	$(1;+\infty)$	2	$(3;5)$

7. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$. Пусть $g(x)=\begin{cases} f(x) & при \quad x\neq a \\ A & при \quad x=a \end{cases}$. При каком значении A функция $g(x)$ будет непрерывна в точке a? Верно ли, что при всех других значениях A функция $g(x)$ будет иметь устранимый разрыв в точке a?

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
7.1	$\frac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$	1	7.11	$\frac{\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}{7x-\pi}$	$\frac{\pi}{7}$
7.2	$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	7.12	$\frac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$	0
7.3	$\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$	0	7.13	$\frac{\sin \pi x}{x-1}$	1
7.4	$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$	$\frac{\pi}{3}$	7.14	$\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$	1
7.5	$\frac{\sin}{\ }$	2	7.15	$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
7.6	$\frac{\sin^2 4x}{1-\cos x}$	0	7.16	$\frac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$	1

1	2	3	4	5	6
7.7	$\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}$	0	7.17	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x-1)}$	1
7.8	$\dfrac{x}{\sin 3x}$	0	7.18	$\dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$	0
7.9	$\dfrac{2x-\pi}{\cos x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	7.19	$\dfrac{\sin^2(x-1)}{\sin^2 \pi x}$	1
7.10	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}$	–1	7.20	$\dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$	0

8 Пусть $f(x) = \begin{cases} h_1(x)\, при\, x < 0 \\ h_2(x)\, при\, x \geq 0 \end{cases}$. (Здесь и далее $[x]$, $\{x\}$, $D(x)$ обозначают, соответственно, функции «целая часть», «дробная часть» и «функция Дирихле»).

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ или доказать, что этот предел не существует. Непрерывна ли функция $f(x)$ в точке 0? Если «нет», то является ли точка 0 точкой устранимого разрыва? Если «нет», то является ли точка 0 точкой разрыва первого рода? Является ли точка 0 точкой разрыва второго рода?

№	$h_1(x)$	$h_2(x)$	№	$h_1(x)$	$h_2(x)$
1	2	3	4	5	6
8.1	$\dfrac{x-\sin x}{x}$	$\operatorname{sgn} x + 1$	8.11	$\sin\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{sgn} x$
8.2	$(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}$	x^2-1	8.12	$\dfrac{1}{[x]}$	x^2-1
8.3	$\cos\dfrac{1}{x}$	x^2	8.13	$\sin\dfrac{1}{x}$	x^2
8.4	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$D(x)-1$	8.14	$\dfrac{\sin x}{x}$	$D(x)-1$
8.5	$\sin\dfrac{1}{x}$	$D(x)$	8.15	$\dfrac{\sin x}{x}$	$D(x)$
1.6	$\left[\dfrac{1}{x}\right]$	$\{x\}$	8.16	$\dfrac{x-\sin x}{x}$	$\{x\}$

1	2	3	4	5	6
8.7	$\dfrac{1}{[x]}$	$\{x\}+2$	8.17	$(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}$	$\{x\}+2$
8.8	$\sin\dfrac{1}{x}$	$[x]$	8.18	$\cos\dfrac{1}{x}$	$[x]$
8.9	$\dfrac{\sin x}{x}$	$([x]+1)e$	8.19	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$([x]+1)e$
8.10	$\dfrac{\sin x}{x}$	$\operatorname{sgn} x$	8.20	$\left[\dfrac{1}{x}\right]$	$1+\operatorname{sgn} x$

9 Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x) & \text{при} \quad x<0 \\ h_2(x) & \text{при} \quad 0\le x<1 \\ h_3(x) & \text{при} \quad x\ge 1 \end{cases}$. Определить характер точек разрыва в точках 0 и 1 (или доказать непрерывность в этих точках) и построить график функции $f(x)$:

№	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
1	2	3	4
9.1	$2x+1$	$\dfrac{1}{1-x}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$
9.2	$\operatorname{sgn} x$	$\ln(1-x)$	$2x+1$
9.3	$2x+1$	$(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$	$[x]$
9.4	$2x+1$	$\cos\dfrac{1}{x-1}$	x^2+1
9.5	$\sin\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x-1}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$
9.6	$\sin\dfrac{1}{x}$	x^2+1	$[x]$
9.7	$\left[\dfrac{1}{x}\right]$	$2x+1$	$D(x)$
9.8	$\dfrac{1}{x}$	$\cos\dfrac{1}{x-1}$	$2x+1$
9.9	$2x+1$	$2x+1$	$[x]$

1	2	3	4
9.10	$\sin\frac{1}{x}$	$2x+1$	x^2+1
9.11	$D(x)$	$\frac{1}{x^2-1}$	x^2+1
9.12	$\sin\frac{1}{x}$	$\ln(1-x)$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.13	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$D(x)$	$[x]-1$
9.14	x^2+1	$\cos\frac{1}{x-1}$	$D(x)$
9.15	$D(x)$	$2x+1$	$[x]-1$
9.16	$\cos\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.17	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\cos\frac{1}{x-1}$	$D(x)$
9.18	$\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$	$[x]$
9.19	$D(x)$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.20	$\frac{1}{x}$	$\cos\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$

10 Привести пример функции, которая определена всюду на R и имеет указанное свойство в точке $a_1=0$ и указанное свойство в точке $a_2=1$. Построить график этой функции:

№	Свойство в точке a_1	Свойство в точке a_2
1	2	3
10.1	Непрерывна	Устранимый разрыв
10.2	Непрерывна	Разрыв первого рода
10.3	Непрерывна	Разрыв второго рода
10.4	Непрерывна	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.5	Непрерывна	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.6	Устранимый разрыв	Непрерывна
10.7	Устранимый разрыв	Разрыв первого рода

1	2	3
10.8	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода
10.9	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.10	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.11	Разрыв первого рода	Непрерывна
10.12	Разрыв первого рода	Устранимый разрыв
10.13	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода
10.14	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.15	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.16	Разрыв второго рода	Непрерывна
10.17	Разрыв второго рода	Устранимый разрыв
10.18	Разрыв второго рода	Разрыв первого рода
10.19	Разрыв второго рода	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.20	Разрыв второго рода, но непрерывна слева	Разрыв второго рода, но непрерывна справа

Решение типовых примеров

1.20 Известно, что функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, непрерывна в точке a, являющейся предельной для $D(f)$. Найти $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$, $x \in (-1;1)$, $a = 0$.

Пусть функция $y = g(x)$ определена в точке a. Можно ли находить $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, просто вычисляя значение функции $y = g(x)$ в точке a, если известно, что $y = g(x)$ не является непрерывной в точке a?

Решение. Так как функция $y = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ непрерывна в точке 0, то её предел в этой точке равен значению: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{0^2+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Если известно, что $y = f(x)$ не является непрерывной в точке a, то $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in D(f)}} f(x)$ не существует. (Напомним, что в определении предела функции в точке, принятом в [1], сама точка a не исключается. Так как функция $y = f(x)$ определена в точке a, то из существования предела следовало бы, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D(f)}} f(x) = f(a)$). Конечно, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a, x \in D(f)}} f(x)$ может существовать, но и в этом случае его нельзя находить, «вычисляя значение функции $y = f(x)$ в точке a», так как из разрывности функции $y = f(x)$ в точке a следует, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a, x \in D(f)}} f(x) \neq f(a)$

2.20 Для функции $y = f(x)$, с областью определения $\mathbb{R}$, точки a и положительных чисел ε_1 и ε_2 найти такие положительные δ_1 и δ_2, что для любых $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Для произвольного положительного ε найти такое положительное δ, что для любых $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Построить график функции $y = f(x)$ и проиллюстрировать геометрически процедуру поиска δ по заданному ε. Записать доказанное утверждение, используя понятие предела и понятие непрерывности функции в точке.

$$f(x) = 3x - 5,\ a = -3,\ \varepsilon_1 = 0{,}1,\ \varepsilon_2 = 0{,}01.$$

Решение. Неравенство $|(3x - 5) - (3 \cdot (-3) - 5)| < \varepsilon$ равносильно неравенству $|(x - (-3))| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, то из $|(x - (-3))| < \delta$ следует $|(3x - 5) - (3 \cdot (-3) - 5)| < \varepsilon$. Доказанное утверждение означает, что $\lim\limits_{x \to -3}(3x - 5)$ существует (и равен $(3 \cdot (-3) - 5) = -14$), иначе говоря, означает, что функция $y = 3x - 5$ непрерывна в точке (-3). Заметим, что в качестве искомого δ можно было взять и любое число, меньшее, чем $\dfrac{\varepsilon}{3}$.

3.20 Доказать непрерывность функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, где $D(f) = \mathbb{R}$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon - \delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152), если $f(x) = x^2$, $a = 2$.

Решение. Согласно определению непрерывности функции в точке ([1], с. 170), надо доказать лишь существование предела $\lim\limits_{x \to 2} x^2$. Учитывая, что данная функция определена в точке 2, из существования предела

$\lim\limits_{x\to 2} x^2$ будет следовать его равенство значению функции в точке 2. Итак, требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Рассмотрим произвольное положительное ε и будем искать такое положительное δ, что $\forall x \in R$ из неравенства $|x\text{-}2| < \delta$ вытекает неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Подчеркнём: нам не требуется доказывать равносильность этих неравенств; достаточно доказать лишь логическое следование $\forall x \in R$ $|x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$.

Неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ вытекает из неравенства $|x+2| \cdot |x-2| < \varepsilon$, а это последнее – из высказывания $|x-2| < 1 \quad \wedge \quad |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ (в самом деле, если $|x-2| < 1$, то $1 < x < 3$ и, следовательно, $|x+2| < 5$ и, следовательно, $|x+2| \cdot |x-2| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5}$).

Теперь понятно, какое можно взять δ. Положим $\delta = \min(1; \dfrac{\varepsilon}{5})$. Тогда

$$\forall x \in R \quad |x\text{-}2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R \quad |x-2| < 1 \quad \wedge \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in R \quad |x+2| \cdot |x-2| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R \quad |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

4.20 Построить график функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ и график функции $y = f(x)$, $x \in E$. Доказать непрерывность функции $y = f(x)$, $x \in E$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon - \delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152). Является ли непрерывной в точке a функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$? В обозначении предела и при формулировке утверждений о непрерывности обязательно указывайте область определения функции. $f(x) = \begin{cases} x+1, x < 2 \\ x^2 \quad , x \geq 2 \end{cases}$, $E = [2;3]$, $a = 2$.

Решение. Напомним, что из $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in X}} f(x) = A$ следует, что и по любому подмножеству E множества X (для которого a – точка прикосновения) предел существует и равен A: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in E}} f(x) = A$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in R}} x^2 = 4$ и $[2;3]\subset R$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} x^2 = 4$. Так как заданная функция $f(x)=\begin{cases} x+1, x<2\\ x^2 \quad , x\ge 2\end{cases}$ равна функции $y=x^2$ на $[2;3]$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} x^2 = 4 = f(2)$. Это доказывает непрерывность функции $y=f(x),\ x\in[2;3]$ в точке 2.

Отметим, что функция $f(x)=\begin{cases} x+1, x<2\\ x^2 \quad , x\ge 2\end{cases}$, $x\in R$ разрывна в точке 2 (если бы $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\ne 2}} f(x)$ существовал и был равен $f(2)$, то и $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ существовал бы и был бы равен $f(2)$, то есть равен 4; легко видеть, что $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+1)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3\ne 4$.

5.20 Для вычисления значения функции $y=f(x)$ в точке a значение аргумента a нашли с некоторой погрешностью Δx. В результате и значение функции оказалось получено с некоторой погрешностью Δf (то есть вместо $f(a)$ вычислили $f(a+\Delta x)$; погрешность значения функции Δf равна $f(a+\Delta x)-f(a)$, она зависит от погрешности Δx аргумента). Для указанных функции $y=f(x)$, $D(f)=R$ и точки a доказать, что погрешность Δf значения функции может быть сделана сколь угодно малой, если только погрешность аргумента Δx достаточно мала. Точнее, доказать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любых Δx, удовлетворяющих условиям $a+\Delta x\in D(f)$ и $|\Delta x|<\delta$, выполняется условие $|\Delta f|<\varepsilon$. Сформулировать определение непрерывности функции «на языке приращений». $f(x)=x^2-2x+3,\ a=1$.

Решение. $\Delta f=((1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+2)-(1^2-3\cdot 1+2)=$

$=\Delta x^2-\Delta x=\Delta x(\Delta x-1)$. При $|\Delta x|<1$ (то есть при $-1<\Delta x<1$) $(\Delta x-1)$ будет находиться в пределах от (-2) до 0 и, следовательно, $|\Delta f|=|\Delta x|\cdot|\Delta x-1|<2|\Delta x|$. Для заданного положительного ε положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ясно, что из $|\Delta x|<\delta$ (то есть из $|\Delta x|<\dfrac{\varepsilon}{2}$) следует

$|\Delta f|<2|\Delta x|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Доказано, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$, то есть доказана непрерывность данной функции в данной точке.

6.20. Сформулировать определение непрерывности функции на языке окрестностей. Построить график функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Построить указанную окрестность $V(f(a))$ точки $f(a)$ и найти (сначала геометрически, а затем аналитически) такую окрестность $U(a)$ точки a, что $f(U(a)\cap D(f))\subset V(f(a))$.

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1},\ D(f)=(1;+\infty),\ a=2,\ V(f(a))=(3;5).$$

Решение. Удобнее представить функцию в виде

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}.$$

График этой функции получается из графика функции $y=\frac{1}{x}$ растяжением в 3 раза вдоль оси Oy (получим $y=\frac{3}{x}$), сдвигом вправо на 1 единицу (получим $y=\frac{3}{x-1}$) и, наконец, сдвигом вверх на 1 единицу (получим $y=1+\frac{3}{x-1}$). Через концы интервала $(3;5)$ на оси Oy (центром этого интервала является значение функции $f(2)=2$), проведём прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с графиком функции. Через точки пересечения проведём прямые, параллельные оси Oy. На оси Ox получим искомую окрестность точки 2. Эта окрестность является интервалом $(1,75;2,5)$. (Концы интервала легко найти, решая уравнения $1+\frac{3}{x-1}=3$ и $1+\frac{3}{x-1}=5$). Обратим внимание, что точка 1не является серединой интервала $(1,75;2,5)$, однако, этот интервал является окрестностью точки 2. Заметим также, что в качестве искомой окрестности точки 2можно взять любую окрестность, содержащуюся в интервале $(1,75;\ 2,5)$, например, симметричную окрестность $(1,75;\ 2,25)$.

7.20 Найти $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f(x)$. Пусть $g(x)=\begin{cases} f(x) & при \quad x\neq a\\ A & при \quad x=a\end{cases}$. При каком значении A функция $g(x)$ будет непрерывна в точке a? Верно ли, что при всех других значениях A функция $g(x)$ будет иметь устранимый разрыв в точке a?

$$f(x)=\frac{tgx-\sin x}{x^3},\ a=0.$$

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{\sin x}{x}\ \lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Так как $g(x)=f(x)$ при $x\neq 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$. Из этого следует, что $g(x)$ непрерывна в точке 0 тогда и только тогда, когда $g(x)=\frac{1}{2}$, то есть, когда $A=\frac{1}{2}$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} g(x)$ существует и конечен, то при $A\neq\frac{1}{2}$ функция $g(x)$ будет иметь в точке устранимый разрыв.

8.20. Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x)\, при\, x<0\\ h_2(x)\, при\, x\geq 0\end{cases}$. (Здесь и далее $[x]$, $\{x\}$, $D(x)$ обозначают, соответственно, функции «целая часть», «дробная часть» и «функция Дирихле»).

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ или доказать, что этот предел не существует. Непрерывна ли функция $f(x)$ в точке 0? Если «нет», то является ли точка 0 точкой устранимого разрыва? Если «нет», то является ли точка 0 точкой разрыва первого рода? Является ли точка 0 точкой разрыва второго рода?

$$h_1(x) = \left[\frac{1}{x}\right],\ h_2(x) = 1 + \operatorname{sgn} x.$$

Решение. Найдём $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Так как $\forall x > 0 \quad f(x) = 1 + \operatorname{sgn} x$, и $\forall x > 0$ $1 + \operatorname{sgn} x = 2$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 + \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2 = 2$. Отметим, что этот предел не равен значению функции $f(x)$ в точке 0 $(f(0) = 1 + \operatorname{sgn} 0 = 1)$: функция не является непрерывной справа.

Найдём $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$. Так как $\forall x < 0 \quad f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$, то вопрос о существовании и величине предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ сводится к вопросу о существовании и величине предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[\frac{1}{x}\right]$. Так как $\forall x \ \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, то и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[\frac{1}{x}\right] = -\infty$. Итак, функция $f(x)$ в точке 0 имеет разрыв второго рода.

9.20. Пусть $f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \textit{при} \quad x < 0 \\ h_2(x) & \textit{при} \quad 0 \le x < 1 \\ h_3(x) & \textit{при} \quad x \ge 1 \end{cases}$. Определить характер точек разрыва в точках 0 и 1 (или доказать непрерывность в этих точках) и построить график функции $f(x)$, если $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = \cos\frac{1}{x-1}$, $h_3(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$.

Решение. Найдём односторонние пределы в точке 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos\frac{1}{x-1} \overset{1)}{=} \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x-1} \overset{2)}{=} \cos(-1) = \cos 1.$$

1) обосновывается существованием предела при $x \to 0$, стоящего справа от знака равенства;

2) после замены $\varphi = \dfrac{1}{x-1}$ используем тот факт, что $\lim\limits_{x\to\varphi_0} \cos x = \cos\varphi_0$; мы его уже использовали при вычислении пределов в лабораторной работе № 9, то есть мы уже пользовались непрерывностью функции $y = \cos x$ в произвольной точке φ_0.

Таким образом, точка 0 является точкой разрыва второго рода (один из односторонних пределов бесконечен). При этом точка 0 является точкой непрерывности справа.

Найдём односторонние пределы в точке 1 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} \cos\frac{1}{x-1} \text{ не существует.}$$

Действительно, последовательность $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{2n\pi}$ стремиться к 1, а соответствующая последовательность значений функции $f(\alpha_n) =$ $= \cos 2n\pi = 1$ стремиться к 1. Последовательность $\beta_n = 1 + \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ тоже стремиться к 1, а соответствующая последовательность значений функции $f(\beta_n) = \cos(2n+1)\pi = (-1)$ стремиться к (-1). Если бы $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<0}} f(x)$ существовал, то пределы этой функции по любым последовательностям, стремящимся к 1, были бы равны.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} \operatorname{sgn}(x-1) = 1$$

Таким образом, точка 1также является точкой разрыва второго рода (один из односторонних пределов не существует). При этом точка 1 не является точкой непрерывности справа, так как предел справа не равен значению функции в этой точке ($f(1) = \operatorname{sgn}(1-1) = 0$).