Лабораторная работа № 10
Непрерывность функции. Точки разрыва

Необходимые понятия и теоремы: различные определения непрерывности функции в точке, непрерывность слева, непрерывность справа, точка устранимого разрыва, точка разрыва первого рода, точка разрыва второго рода.

Литература: [1] *\ с. 169 – 176, [2] *\ с. – .

1 Известно, что функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ непрерывна в точке a, являющейся предельной для $D(f)$. Найти $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пусть функция $y = g(x)$ определена в точке a. Можно ли находить $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, просто вычисляя значение функции $y = g(x)$ в точке a, если известно, что $y = g(x)$ не является непрерывной в точке a?

№	$f(x)$	$D(f)$	a	№	$f(x)$	$D(f)$	a
1.1	$\dfrac{\cos(\arcsin\frac{x}{2})}{\sqrt{x+2}}$	$[-2;2]$	1	1.11	$\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{1+x}}}$	$\mathbb{R}$	7
1.2	$\log_2\dfrac{18+\sqrt{x}}{x^2+4}$	$\mathbb{R}_+$	4	1.12	$\sin(\dfrac{2\sqrt{x^2+\pi x}}{\sqrt{3}}+\dfrac{x}{3})$	$[0;\frac{\pi}{2}]$	$\frac{\pi}{2}$
1.3	$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}$	$\mathbb{R}_+$	1	1.13	$\ln\dfrac{x^4+x+1}{x^3+2}$	$\mathbb{R}_+$	1
1.4	$\arcsin\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$	$\mathbb{R}$	1	1.14	$\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1}{x^2+3}}$	$\mathbb{R}$	1
1.5	$\lg\dfrac{x^2+10x+1}{x^2+21}$	$\mathbb{R}_+$	2	1.15	$\dfrac{\sin(\arccos\frac{x}{2})}{\sqrt{x+2}}$	$[-2;2]$	1
1.6	$\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{x^2}}}$	$\mathbb{R}$	8	1.16	$\log_2\dfrac{98+\sqrt{x}}{x^3+9x}$	$\mathbb{R}_+$	4
1.7	$\sin(\dfrac{x}{3}+\sqrt{x^2+\pi x})$	$[0;\pi]$	π	1.17	$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{x}}}$	$\mathbb{R}_+$	9
1.8	$\ln\dfrac{x^2+6x+1}{x^2+7}$	$\mathbb{R}_+$	1	1.18	$\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$	$\mathbb{R}$	1
1.9	$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2}$	$\mathbb{R}$	1	1.19	$\lg\dfrac{x^2+10x+9}{\sqrt{x^2+3}}$	$\mathbb{R}_+$	1

1.10	$\arccos\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$	$\mathbb{R}$	1	1.20	$\dfrac{x^2+1}{x+2}$	$(-1;1)$	0

2 Для функции $y=f(x)$, с областью определения $\mathbb{R}$, точки a и положительных чисел ε_1 и ε_2 найти такие положительные δ_1 и δ_2, что для любых $x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Для произвольного положительного ε найти такое положительное δ, что для любых $x\in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Построить график функции $y=f(x)$ и проиллюстрировать геометрически процедуру поиска δ по заданному ε. Записать доказанное утверждение, используя понятие предела и понятие непрерывности функции в точке:

№	$f(x)$	a	ε_1	ε_2	№	$f(x)$	a	ε_1	ε_2
2.1	$2x+1$	1	0,5	0,1	2.11	$2x+1$	0,3	0,1	0,01
2.2	$0,5x+1$	2	0,1	0,01	2.12	$0,5x+1$	1	0,3	0,1
2.3	$3x-1$	1	0,3	0,1	2.13	$3x-1$	2	0,5	0,1
2.4	$12x-4$	0,3	0,5	0,1	2.14	$12x-4$	1	0,1	0,01
2.5	$x-3$	–1	0,1	0,01	2.15	$x-3$	1	0,3	0,1
2.6	$6x+2$	–2	0,3	0,1	2.16	$6x+2$	2	0,5	0,1
2.7	$0,3x+3$	–3	0,5	0,1	2.17	$0,3x+3$	1	0,1	0,01
2.8	$0,3x-1$	1	0,1	0,01	2.18	$0,3x-1$	–1	0,3	0,1
2.9	$2x+5$	2	0,3	0,1	2.19	$2x+5$	–2	0,5	0,1
2.10	$3x-5$	1	0,5	0,1	2.20	$3x-5$	–3	0,1	0,01

3 Доказать непрерывность функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$, где $D(f)=\mathbb{R}$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon-\delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152)

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a

3.1	x^2-2	0	3.11	$3-2x^2$	1
3.2	$2x^2+3$	2	3.12	$8-4x^2$	0
3.3	$3x^2-2$	1	3.13	$2-x^2$	0
3.4	$3x^2-2$	3	3.14	$3-2x^2$	2
3.5	x^2-1	2	3.15	$8-4x^2$	1
3.6	x^2-2	4	3.16	$2-3x^2$	3
3.7	$2x^2+3$	0	3.17	$1-x^2$	2
3.8	$3x^2-2$	2	3.18	$2-3x^2$	2
3.9	$3x^2-2$	1	3.19	$1-x^2$	3
3.10	x^2-1	3	3.20	x^2	2

4 Построить график функции $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ и график функции $y=f(x)$, $x\in E$. Доказать непрерывность функции $y=f(x)$, $x\in E$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon-\delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152). Является ли непрерывной в точке a функция $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$? В обозначении предела и при формулировке утверждений о непрерывности обязательно указывайте область определения функции:

№	$f(x)$	E	a	№	$f(x)$	E	a
4.1	$\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$	$[0;3]$	0	4.11	$\begin{cases} x^2, & x<-1 \\ -x, & x\geq -1 \end{cases}$	$[-1;3]$	-1
4.2	$\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-2, & x\geq 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.12	$\begin{cases} x^2-2, & x<2 \\ x+1, & x\geq 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2
4.3	$\begin{cases} x, & x<-1 \\ x^2, & x\geq -1 \end{cases}$	$[-1;3]$	-1	4.13	$\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0
4.4	$\begin{cases} x, & x<2 \\ 2-x^2, & x\geq 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2	4.14	$\begin{cases} 2-x^2, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1

4.5	$\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-3, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0	4.15	$\begin{cases} x-3, x<-1 \\ x+1, x\ge -1 \end{cases}$	$[-1;0]$	-1
4.6	$\begin{cases} x+1, x<1 \\ 2-x^2, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.16	$\begin{cases} 2-x^2, x<2 \\ x+1, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;4)$	2
4.7	$\begin{cases} -x, x<-1 \\ -x^2, x\ge -1 \end{cases}$	$[-1;0]$	-1	4.17	$\begin{cases} -x^2, x<2 \\ -x, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;5]$	2
4.8	$\begin{cases} -x, x<2 \\ x^2-1, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;3]$	2	4.18	$\begin{cases} x^2-1, x<1 \\ -x, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1
4.9	$\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2-2, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1)$	0	4.19	$\begin{cases} 2-x^2, x<0 \\ x-1, x\ge 0 \end{cases}$	$[0;1]$	0
4.10	$\begin{cases} -x, x<1 \\ x^2+1, x\ge 1 \end{cases}$	$[1;+\infty)$	1	4.20	$\begin{cases} x+1, x<2 \\ x^2, x\ge 2 \end{cases}$	$[2;3]$	2

5 Для вычисления значения функции $y=f(x)$ в точке a значение аргумента a нашли с некоторой погрешностью Δx. В результате и значение функции оказалось получено с некоторой погрешностью Δf (то есть вместо $f(a)$ вычислили $f(a+\Delta x)$; погрешность значения функции Δf равна $f(a+\Delta x)-f(a)$, она зависит от погрешности Δx аргумента). Для указанных функции $y=f(x)$, $D(f)=R$ и точки a доказать, что погрешность Δf значения функции может быть сделана сколь угодно малой, если только погрешность аргумента Δx достаточно мала. Точнее, доказать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любых Δx, удовлетворяющих условиям $a+\Delta x\in D(f)$ и $|\Delta x|<\delta$, выполняется условие $|\Delta f|<\varepsilon$. Сформулировать определение непрерывности функции «на языке приращений».

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
5.1	$3+x-2x^2$	1	5.11	x^2+2x-2	0
5.2	$8+x-4x^2$	0	5.12	$2x^2+2x+3$	2
5.3	$2+x-x^2$	0	5.13	$3x^2+2x-2$	1
5.4	$3+x-2x^2$	2	5.14	$-x^2+2x-2$	3
5.5	$8+x-4x^2$	1	5.15	x^2+2x-1	2

5.6	$2+x-3x^2$	3	5.16	x^2+2x-2	4
5.7	$1+x-x^2$	2	5.17	$-2x^2+2x+3$	0
5.8	$2+x-3x^2$	2	5.18	$-x^2+x-4$	2
5.9	$1+x-x^2$	3	5.19	x^2+x-2	1
5.10	$1+x+x^2$	2	5.20	x^2-2x+3	1

6 Сформулировать определение непрерывности функции на языке окрестностей. Построить график функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Построить указанную окрестность $V(f(a))$ точки $f(a)$ и найти (сначала геометрически, а затем аналитически) такую окрестность $U(a)$ точки a, что $f(U(a)\cap D(f))\subset V(f(a))$:

№	$f(x)$	$D(f)$	a	$V(f(a))$	№	$f(x)$	$D(f)$	a	$V(f(a))$
6.1	$\frac{x-1}{x}$	$\mathbb{R}_-$	-3	$(1;2)$	6.11	$\frac{6x}{x+2}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$
6.2	$\frac{x+1}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;2)$	6.12	$\frac{x}{x-1}$	$(1;+\infty)$	2	$(1;3)$
6.3	$2x^2-5$	$\mathbb{R}$	2	$(2;4)$	6.13	$1+2x^2$	$\mathbb{R}$	2	$(4;6)$
6.4	$1-\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	4	$(-2;0)$	6.14	$1+\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$
6.5	$2\sqrt{-x}$	$\mathbb{R}_-$	-4	$(3;5)$	6.15	$\sqrt{x+1}$	$\mathbb{R}_+$	8	$(2;4)$
6.6	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2}$	$(1;3)$	6.16	$\frac{4}{x}$	$\mathbb{R}_+$	2	$(1;3)$
6.7	$\frac{x^2-9}{x-3}$	$(3;+\infty)$	1	$(3;5)$	6.17	$\frac{x^2-4}{x-2}$	$(2;+\infty)$	2	$(3;5)$
6.8	$\frac{3-x}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(1;3)$	6.18	$\frac{6-x}{x}$	$\mathbb{R}_+$	1	$(4;6)$
6.9	$\sqrt{x-3}$	$(3;+\infty)$	7	$(1;2)$	6.19	$\sqrt{x-1}$	$(1;+\infty)$	5	$(1;3)$
6.10	x^3-6	$\mathbb{R}$	2	$(1;3)$	6.20	$\frac{x+2}{x-1}$	$(1;+\infty)$	2	$(3;5)$

7. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$. Пусть $g(x)=\begin{cases} f(x) & при \quad x\neq a \\ A & при \quad x=a \end{cases}$. При каком значении A функция $g(x)$ будет непрерывна в точке a? Верно ли, что при всех других значениях A функция $g(x)$ будет иметь устранимый разрыв в точке a?

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
7.1	$\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$	1	7.11	$\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}}{7x-\pi}$	$\dfrac{\pi}{7}$
7.2	$\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$	$\dfrac{\pi}{2}$	7.12	$\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$	0
7.3	$\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$	0	7.13	$\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$	1
7.4	$\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$	$\dfrac{\pi}{3}$	7.14	$\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$	1
7.5	$\dfrac{\sin}{\ }$	2	7.15	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
7.6	$\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}$	0	7.16	$\dfrac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$	1
7.7	$\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}$	0	7.17	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x-1)}$	1
7.8	$\dfrac{x}{\sin 3x}$	0	7.18	$\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$	0
7.9	$\dfrac{2x-\pi}{\cos x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	7.19	$\dfrac{\sin^2(x-1)}{\sin^2 \pi x}$	1
7.10	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}$	–1	7.20	$\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$	0

8 Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x)\, при\, x<0 \\ h_2(x)\, при\, x\geq 0 \end{cases}$. (Здесь и далее $[x]$, $\{x\}$, $D(x)$ обозначают, соответственно, функции «целая часть», «дробная часть» и «функция Дирихле»).

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ или доказать, что этот предел не существует. Непрерывна ли функция $f(x)$ в точке 0? Если «нет», то является ли точка 0 точкой устранимого разрыва? Если «нет», то является ли точка 0 точкой разрыва первого рода? Является ли точка 0 точкой разрыва второго рода?

№	$h_1(x)$	$h_2(x)$	№	$h_1(x)$	$h_2(x)$
8.1	$\frac{x-\sin x}{x}$	$\operatorname{sgn} x+1$	8.11	$\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{sgn} x$
8.2	$(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}$	x^2-1	8.12	$\frac{1}{[x]}$	x^2-1
8.3	$\cos\frac{1}{x}$	x^2	8.13	$\sin\frac{1}{x}$	x^2
8.4	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$D(x)-1$	8.14	$\frac{\sin x}{x}$	$D(x)-1$
8.5	$\sin\frac{1}{x}$	$D(x)$	8.15	$\frac{\sin x}{x}$	$D(x)$
1.6	$\left[\frac{1}{x}\right]$	$\{x\}$	8.16	$\frac{x-\sin x}{x}$	$\{x\}$
8.7	$\frac{1}{[x]}$	$\{x\}+2$	8.17	$(1+x\ln 2)^{\frac{1}{x}}$	$\{x\}+2$
8.8	$\sin\frac{1}{x}$	$[x]$	8.18	$\cos\frac{1}{x}$	$[x]$
8.9	$\frac{\sin x}{x}$	$([x]+1)e$	8.19	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$([x]+1)e$
8.10	$\frac{\sin x}{x}$	$\operatorname{sgn} x$	8.20	$\left[\frac{1}{x}\right]$	$1+\operatorname{sgn} x$

9 Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x) & \text{при} \quad x<0 \\ h_2(x) & \text{при} \quad 0\le x<1 \\ h_3(x) & \text{при} \quad x\ge 1 \end{cases}$. Определить характер точек разрыва в точках 0 и 1 (или доказать непрерывность в этих точках) и построить график функции $f(x)$:

№	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$

9.1	$2x+1$	$\frac{1}{1-x}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$
9.2	$\operatorname{sgn} x$	$\ln(1-x)$	$2x+1$
9.3	$2x+1$	$(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$	$[x]$
9.4	$2x+1$	$\cos\frac{1}{x-1}$	x^2+1
9.5	$\sin\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$
9.6	$\sin\frac{1}{x}$	x^2+1	$[x]$
9.7	$\left[\frac{1}{x}\right]$	$2x+1$	$D(x)$
9.8	$\frac{1}{x}$	$\cos\frac{1}{x-1}$	$2x+1$
9.9	$2x+1$	$2x+1$	$[x]$
9.10	$\sin\frac{1}{x}$	$2x+1$	x^2+1
9.11	$D(x)$	$\frac{1}{x^2-1}$	x^2+1
9.12	$\sin\frac{1}{x}$	$\ln(1-x)$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.13	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$D(x)$	$[x]-1$
9.14	x^2+1	$\cos\frac{1}{x-1}$	$D(x)$
9.15	$D(x)$	$2x+1$	$[x]-1$
9.16	$\cos\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.17	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$\cos\frac{1}{x-1}$	$D(x)$
9.18	$\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$	$[x]$
9.19	$D(x)$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\operatorname{sgn}(x^2-1)$
9.20	$\frac{1}{x}$	$\cos\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{sgn}(x-1)$

10 Привести пример функции, которая определена всюду на R и имеет указанное свойство в точке a_1=0 и указанное свойство в точке a_2=1. Построить график этой функции:

№	Свойство в точке a_1	Свойство в точке a_2
10.1	Непрерывна	Устранимый разрыв
10.2	Непрерывна	Разрыв первого рода
10.3	Непрерывна	Разрыв второго рода
10.4	Непрерывна	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.5	Непрерывна	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.6	Устранимый разрыв	Непрерывна
10.7	Устранимый разрыв	Разрыв первого рода
10.8	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода
10.9	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.10	Устранимый разрыв	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.11	Разрыв первого рода	Непрерывна
10.12	Разрыв первого рода	Устранимый разрыв
10.13	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода
10.14	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.15	Разрыв первого рода	Разрыв второго рода, но непрерывна справа
10.16	Разрыв второго рода	Непрерывна
10.17	Разрыв второго рода	Устранимый разрыв
10.18	Разрыв второго рода	Разрыв первого рода
10.19	Разрыв второго рода	Разрыв второго рода, но непрерывна слева
10.20	Разрыв второго рода, но непрерывна слева	Разрыв второго рода, но непрерывна справа

Решение типовых примеров

1.20 Известно, что функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, непрерывна в точке a, являющейся предельной для $D(f)$. Найти $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$, $x \in (-1;1)$, $a = 0$.

Пусть функция $y = g(x)$ определена в точке a. Можно ли находить $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, просто вычисляя значение функции $y = g(x)$ в точке a, если известно, что $y = g(x)$ не является непрерывной в точке a?

Решение. Так как функция $y = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ непрерывна в точке 0, то её предел в этой точке равен значению: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{0^2+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Если известно, что $y = f(x)$ не является непрерывной в точке a, то $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D(f)}} f(x)$ не существует. (Напомним, что в определении предела функции в точке, принятом в [1], сама точка a не исключается. Так как функция $y = f(x)$ определена в точке a, то из существования предела следовало бы, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D(f)}} f(x) = f(a)$). Конечно, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \ne a, x \in D(f)}} f(x)$ может существовать, но и в этом случае его нельзя находить, «вычисляя значение функции $y = f(x)$ в точке a», так как из разрывности функции $y = f(x)$ в точке a следует, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \ne a, x \in D(f)}} f(x) \ne f(a)$

2.20 Для функции $y = f(x)$, с областью определения $\mathbb{R}$, точки a и положительных чисел ε_1 и ε_2 найти такие положительные δ_1 и δ_2, что для любых $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Для произвольного положительного ε найти такое положительное δ, что для любых $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Построить график функции $y = f(x)$ и проиллюстрировать геометрически процедуру поиска δ по заданному ε. Записать доказанное утверждение, используя понятие предела и понятие непрерывности функции в точке.

$$f(x) = 3x - 5,\ a = -3,\ \varepsilon_1 = 0{,}1,\ \varepsilon_2 = 0{,}01.$$

Решение. Неравенство $|(3x-5) - (3\cdot(\text{-}3) - 5)| < \varepsilon$ равносильно неравенству $|(x-(-3))| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, то из $|(x-(-3))| < \delta$ следует $|(3x-5) - (3\cdot(\text{-}3) - 5)| < \varepsilon$. Доказанное утверждение означает, что $\lim\limits_{x \to -3} (3x-5)$ существует (и равен $(3\cdot(\text{-}3) - 5) = -14$), иначе говоря, означает, что функция $y=3x-5$ непрерывна в точке (-3). Заметим, что в качестве искомого δ можно было взять и любое число, меньшее, чем $\frac{\varepsilon}{3}$.

3.20 Доказать непрерывность функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$, где $D(f)=\mathbb{R}$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon-\delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152), если $f(x)=x^2$, $a=2$.

Решение. Согласно определению непрерывности функции в точке ([1], с. 170), надо доказать лишь существование предела $\lim\limits_{x\to 2} x^2$. Учитывая, что данная функция определена в точке 2, из существования предела $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ будет следовать его равенство значению функции в точке 2. Итак, требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

Рассмотрим произвольное положительное ε и будем искать такое положительное δ, что $\forall x\in R$ из неравенства $|x\text{-}2|<\delta$ вытекает неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Подчеркнём: нам не требуется доказывать равносильность этих неравенств; достаточно доказать лишь логическое следование $\forall x\in R$ $|x-2|<\delta \quad\Rightarrow\quad |x^2-4|<\varepsilon$.

Неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$ вытекает из неравенства $|x+2|\cdot|x-2|<\varepsilon$, а это последнее – из высказывания $|x-2|<1 \;\wedge\; |x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$ (в самом деле, если $|x-2|<1$, то $1<x<3$ и, следовательно, $|x+2|<5$ и, следовательно, $|x+2|\cdot|x-2|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5}$).

Теперь понятно, какое можно взять δ. Положим $\delta=\min(1;\frac{\varepsilon}{5})$. Тогда

$$\forall x\in R\quad |x\text{-}2|<\delta \quad\Rightarrow\quad \forall x\in R\quad |x-2|<1 \;\wedge\; |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \forall x\in R\quad |x+2|\cdot|x-2|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5} \quad\Rightarrow\quad \forall x\in R\quad |x^2-4|<\varepsilon.$$

4.20 Построить график функции $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ и график функции $y=f(x)$, $x\in E$. Доказать непрерывность функции $y=f(x)$, $x\in E$ в точке a непосредственно по определению непрерывности ([1], с. 170) и $\varepsilon-\delta$ определению предела функции по Коши ([1], с. 152). Является ли непрерывной в точке a функция $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$? В обозначении предела и при формулировке утверждений о непрерывности обязательно указывайте область определения функции. $f(x)=\begin{cases} x+1, x<2 \\ x^2 \ \ , x\ge 2 \end{cases}$, $E=[2;3]$, $a=2$.

Решение. Напомним, что из $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X}} f(x)=A$ следует, что и по любому подмножеству E множества X (для которого a – точка прикосновения) предел существует и равен A: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)=A$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in R}} x^2=4$ и $[2;3]\subset R$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} x^2=4$. Так как заданная функция $f(x)=\begin{cases} x+1, x<2 \\ x^2 \ \ , x\ge 2 \end{cases}$ равна функции $y=x^2$ на $[2;3]$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[2;3]}} x^2=4=f(2)$. Это доказывает непрерывность функции $y=f(x)$, $x\in[2;3]$ в точке 2.

Отметим, что функция $f(x)=\begin{cases} x+1, x<2 \\ x^2 \ \ , x\ge 2 \end{cases}$, $x\in R$ разрывна в точке 2 (если бы $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\ne 2}} f(x)$ существовал и был равен $f(2)$, то и $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ существовал бы и был бы равен $f(2)$, то есть равен 4; легко видеть, что $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+1)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3\ne 4$.

5.20 Для вычисления значения функции $y=f(x)$ в точке a значение аргумента a нашли с некоторой погрешностью Δx. В результате и значение функции оказалось получено с некоторой погрешностью Δf (то есть вместо $f(a)$ вычислили $f(a+\Delta x)$; погрешность значения функции Δf равна $f(a+\Delta x)-f(a)$, она зависит от погрешности Δx аргумента). Для указанных функции $y=f(x)$, $D(f)=R$ и точки a доказать, что погрешность Δf значения функции может быть сделана сколь угодно малой, если только погрешность аргумента Δx достаточно мала. Точнее, доказать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любых Δx, удовлетворяющих условиям $a+\Delta x\in D(f)$ и $|\Delta x|<\delta$, выполняется условие $|\Delta f|<\varepsilon$. Сформулировать определение непрерывности функции «на языке приращений». $f(x)=x^2-2x+3,\ a=1$.

Решение. $\Delta f=((1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+2)-(1^2-3\cdot1+2)=$

$=\Delta x^2-\Delta x=\Delta x(\Delta x-1)$. При $|\Delta x|<1$ (то есть при $-1<\Delta x<1$) $(\Delta x-1)$ будет находиться в пределах от (-2) до 0 и, следовательно, $|\Delta f|=|\Delta x|\cdot|\Delta x-1|<2|\Delta x|$. Для заданного положительного ε положим $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ясно, что из $|\Delta x|<\delta$ (то есть из $|\Delta x|<\dfrac{\varepsilon}{2}$) следует $|\Delta f|<2|\Delta x|<2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Доказано, что $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta f=0$, то есть доказана непрерывность данной функции в данной точке.

6.20. Сформулировать определение непрерывности функции на языке окрестностей. Построить график функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Построить указанную окрестность $V(f(a))$ точки $f(a)$ и найти (сначала геометрически, а затем аналитически) такую окрестность $U(a)$ точки a, что $f(U(a)\cap D(f))\subset V(f(a))$.

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1},\ D(f)=(1;+\infty),\ a=2,\ V(f(a))=(3;5).$$

Решение. Удобнее представить функцию в виде

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}.$$

График этой функции получается из графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ растяжением в 3 раза вдоль оси Oy (получим $y=\dfrac{3}{x}$), сдвигом вправо на 1 единицу (получим $y=\dfrac{3}{x-1}$) и, наконец, сдвигом вверх на 1 единицу (получим $y=1+\dfrac{3}{x-1}$). Через концы интервала $(3;5)$ на оси Oy (центром этого интервала является значение функции $f(2)=2$), проведём прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с графиком функции. Через точки пересечения проведём прямые, параллельные оси Oy. На оси Ox получим искомую окрестность точки 2. Эта окрестность является интервалом $(1{,}75;2{,}5)$. (Концы

интервала легко найти, решая уравнения $1+\dfrac{3}{x-1}=3$ и $1+\dfrac{3}{x-1}=5$).
Обратим внимание, что точка 1 не является серединой интервала $(1,75;2,5)$, однако, этот интервал является окрестностью точки 2. Заметим также, что в качестве искомой окрестности точки 2 можно взять любую окрестность, содержащуюся в интервале $(1,75;\,2,5)$, например, симметричную окрестность $(1,75;\,2,25)$.

7.20 **Н**айти $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$. Пусть $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\neq a\\ A & \text{при } x=a\end{cases}$. При каком значении A функция $g(x)$ будет непрерывна в точке a? Верно ли, что при всех других значениях A функция $g(x)$ будет иметь устранимый разрыв в точке a?

$$f(x)=\frac{tgx-\sin x}{x^3},\ a=0.$$

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin x}{x}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{\cos x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Так как $g(x)=f(x)$ при $x\neq 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$. Из этого следует, что $g(x)$ непрерывна в точке 0 тогда и только тогда, когда $g(x)=\dfrac{1}{2}$, то есть, когда $A=\dfrac{1}{2}$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x)$ существует и конечен, то при $A\neq\dfrac{1}{2}$ функция $g(x)$ будет иметь в точке устранимый разрыв.

8.20. Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x)\, при\, x<0 \\ h_2(x)\, при\, x\geq 0 \end{cases}$. (Здесь и далее $[x]$, $\{x\}$, $D(x)$ обозначают, соответственно, функции «целая часть», «дробная часть» и «функция Дирихле»).

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ или доказать, что этот предел не существует. Непрерывна ли функция $f(x)$ в точке 0? Если «нет», то является ли точка 0 точкой устранимого разрыва? Если «нет», то является ли точка 0 точкой разрыва первого рода? Является ли точка 0 точкой разрыва второго рода?

$$h_1(x)=\left[\frac{1}{x}\right],\ h_2(x)=1+\operatorname{sgn} x.$$

Решение. Найдём $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Так как $\forall x>0 \quad f(x)=1+\operatorname{sgn} x$, и $\forall x>0$ $1+\operatorname{sgn} x=2$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1+\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2=2$. Отметим, что этот предел не равен значению функции $f(x)$ в точке 0 ($f(0)=1+\operatorname{sgn} 0=1$): функция не является непрерывной справа.

Найдём $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$. Так как $\forall x<0 \quad f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$, то вопрос о существовании и величине предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ сводится к вопросу о существовании и величине предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[\frac{1}{x}\right]$. Так как $\forall x$ $\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$, то и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[\frac{1}{x}\right]=-\infty$. Итак, функция $f(x)$ в точке 0 имеет разрыв второго рода.

9.20. Пусть $f(x)=\begin{cases} h_1(x) & при & x<0 \\ h_2(x) & при & 0\leq x<1 \\ h_3(x) & при & x\geq 1 \end{cases}$. Определить характер точек разрыва в точках 0 и 1 (или доказать непрерывность в этих точках) и построить график функции $f(x)$, если $h_1(x)=\frac{1}{x}$, $h_2(x)=\cos\frac{1}{x-1}$, $h_3(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$.

Решение. Найдём односторонние пределы в точке 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty .$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos\frac{1}{x-1} \stackrel{1)}{=} \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x-1} \stackrel{2)}{=} \cos(-1) = \cos 1.$$

1) обосновывается существованием предела при $x \to 0$, стоящего справа от знака равенства;

2) после замены $\varphi = \dfrac{1}{x-1}$ используем тот факт, что $\lim\limits_{x\to\varphi_0} \cos x = \cos\varphi_0$; мы его уже использовали при вычислении пределов в лабораторной работе № 9, то есть мы уже пользовались непрерывностью функции $y = \cos x$ в произвольной точке φ_0.

Таким образом, точка 0 является точкой разрыва второго рода (один из односторонних пределов бесконечен). При этом точка 0 является точкой непрерывности справа.

Найдём односторонние пределы в точке 1 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} \cos\frac{1}{x-1} \text{ не существует.}$$

Действительно, последовательность $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{2n\pi}$ стремиться к 1, а соответствующая последовательность значений функции $f(\alpha_n) =$ $= \cos 2n\pi = 1$ стремиться к 1. Последовательность $\beta_n = 1 + \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ тоже стремиться к 1, а соответствующая последовательность значений функции $f(\beta_n) = \cos(2n+1)\pi = (-1)$ стремиться к (-1). Если бы $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<0}} f(x)$ существовал, то пределы этой функции по любым последовательностям, стремящимся к 1, были бы равны.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>0}} \operatorname{sgn}(x-1) = 1$$

Таким образом, точка 1также является точкой разрыва второго рода (один из односторонних пределов не существует). При этом точка 1 не является точкой непрерывности справа, так как предел справа не равен значению функции в этой точке ($f(1) = \operatorname{sgn}(1-1) = 0$).

Лабораторная работа № 11
Исследование функций на непрерывность

Необходимые понятия и теоремы: теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и композиции непрерывных функций, теорема о непрерывности обратной функции, понятие элементарной функции, теорема о непрерывности элементарных функций,

Литература: [1] с. 169 – 178; 185-195.

1 Используя непрерывность основных элементарных функций и теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, доказать непрерывность функции $f(x)$ во всех точках области определения $D(f)$:

№	$f(x)$	$D(f)$	№	$f(x)$	$D(f)$
1.1	$\dfrac{2^{2x}+3^{3x}}{2x^2+3x+4}$	R_+	1.11	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-x^3}{1+\ln x}$	$(\frac{1}{2};+\infty)$
1.2	$\dfrac{3\sin^2 x-\ln x^2}{x^2+3x+2}$	R_+	1.12	$\dfrac{1-\cos 2x}{\ln x^{(1+x)}}$	$(0;1)$
1.3	$\dfrac{3\sin^2 x-\sin\frac{\pi}{7}}{2x^2+1}$	R	1.13	$\dfrac{x^5-5x+1}{2+\sin(x+1)}$	R
1.4	$\dfrac{1+3\sin 2x}{\pi-\arcsin x}$	$[-1;1]$	1.14	$\dfrac{2\sin^2 x-\sin 1}{2x^2-1}$	$[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$
1.5	$\dfrac{x^4-4x+1}{2-\sin^2(x+1)}$	R	1.15	$\dfrac{2^{3x}+3^{2x}}{x^2+4x+5}$	R_+
1.6	$\dfrac{tgx-\sin x}{1+2^x-\sin^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$	1.16	$\dfrac{\ln x^2+\ln^2 x}{2+\cos x}$	R_+
1.7	$\dfrac{1-\cos x}{\ln x^{(1+x^2)}}$	R_+	1.17	$\dfrac{\sin^3 x+2\sin^2 x}{1+x^4}$	R
1.8	$\dfrac{\sin^3 x+\sin^2 x}{x^8+8}$	R	1.18	$\dfrac{tgx-\sin x}{3-\sin^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
1.9	$\dfrac{\sqrt[5]{x}-x^5}{1+2\ln x}$	$(1;+\infty)$	1.19	$\dfrac{1+3\sin 2x}{8-2\arccos x}$	$[-1;1]$
1.10	$\dfrac{\ln x^2+\ln^2 x}{2^x+\cos x}$	R_+	1.20	$\dfrac{2\sin^2 x-\ln x}{x^2+3x+2}$	R_+

2 Функции f_1 и f_2 являются композициями функций f и g в разном порядке. Найти функцию g. Выяснить, в каких точках функция f должна быть непрерывной и какому условию должно удовлетворять $f(a)$, чтобы по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций можно было сделать заключение о непрерывности в точке a функций f_1 и f_2:

№	$f_1(x)$	$f_2(x)$	№	$f_1(x)$	$f_2(x)$
2.1	$3^{f(x)}$	$f(3^x)$	2.11	$\dfrac{1}{1+f^2(x)}$	$f(\dfrac{1}{1+x^2})$
2.2	$\cos(f^2(x))$	$f(\cos x^2)$	2.12	$\lvert\sin f(x)\rvert$	$f(\lvert\sin x\rvert)$
2.3	$\ln(1+\lvert f(x)\rvert)$	$f(\ln(1+\lvert x\rvert))$	2.13	$f^2(x)$	$f(x^2)$
2.4	$\sin(f(x))$	$f(\sin x)$	2.14	$\cos^2(f(x))$	$f(\cos^2 x)$
2.5	$\sqrt{\lvert f(x)\rvert}$	$f(\sqrt{\lvert x\rvert})$	2.15	$e^{f(x)}$	$f(e^x)$
2.6	$\sin(1+f(x))$	$f(\sin(1+x))$	2.16	$\sqrt[4]{\lvert f(x)\rvert}$	$f(\sqrt[4]{\lvert x\rvert})$
2.7	$f^2(x)+1$	$f(x^2+1)$	2.17	$\sin(f^2(x))$	$f(\sin x^2)$
2.8	$2^{f(x)}+1$	$f(2^x+1)$	2.18	$\sqrt[3]{f^2(x)}$	$f(\sqrt[3]{x^2})$
2.9	$\sqrt{f^2(x)+1}$	$f(\sqrt{x^2+1})$	2.19	$\lvert\cos f(x)\rvert$	$f(\lvert\cos x\rvert)$
2.10	$\ln(1+f^2(x))$	$f(\ln(1+x^2))$	2.20	$\sqrt[3]{f(x)}$	$f(\sqrt[3]{x})$

3 Найти естественную область определения элементарной функции $f(x)$. Используя непрерывность основных элементарных функций и теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и композиции непрерывных функций, доказать непрерывность функции $f(x)$ во всех точках своей области определения :

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$2^{\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}}$	1.11	$\dfrac{\sqrt[3]{\sin 5x-\sin 1}}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$
1.2	$\dfrac{\sqrt{x^2}+\lvert 4x^2-1\rvert}{\sqrt{1+x^3}}$	1.12	$\ln\sqrt{\ln(x^2+x+1)}$
1.3	$\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$	1.13	$\ln(\ln(x^2-5x+6))$

1.4	$\dfrac{\sin\left\|x-\frac{\pi}{3}\right\|}{1-2\cos x+\cos^2 x}$	1.14	$\dfrac{1-\sqrt{2\sin x}}{1-\sin\sqrt{2x}}$
1.5	$\dfrac{\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{1-\left\|\sin(x-\frac{\pi}{2})\right\|}$	1.15	$\dfrac{\sqrt{x^2}+\|4x^2-1\|}{\sqrt{1-\|x\|^3}}$
1.6	$\dfrac{\sin^2(4x^2-1)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	1.16	$\dfrac{\ln(2^x+3^x)}{\sqrt{x^2+x+1)}}$
1.7	$\dfrac{x^2+\arcsin^2 x}{10+x^2-\arcsin^2 x}$	1.17	$\sqrt[3]{\dfrac{\sin\pi x}{\sin(x-1)}}$
1.8	$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}+\|4x^2-1\|}{\sqrt{1-\|x\|^5}}$	1.18	$\dfrac{\cos^2(4x^2-1)}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$
1.9	$\dfrac{\cos x}{\ln\left\|1-\sin(x-\frac{\pi}{2})\right\|}$	1.19	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
1.10	$\dfrac{\sqrt{x^2}+\|x^2-2x+1\|}{\sqrt{\|x\|+\|x^2-2x\|}}$	3.20	$\sqrt{\ln(x^2+x+1)}$

4 Используя односторонние пределы, доказать непрерывность функции $y=f(x)$ в точке a:

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
4.1	$\begin{cases} 2x^2-x, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x}{\pi(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	1	4.11	$\begin{cases} x^2+2, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x^3}{\sin\pi x}, & x>1 \end{cases}$	1
4.2	$\begin{cases} \dfrac{x-\pi}{\pi}, & x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos x}{2x-\pi}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{2}$	4.12	$\begin{cases} \sin\pi x+\cos\pi x, & x\le 1 \\ \dfrac{\arcsin(x-1)}{\arcsin(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	0
4.3	$\begin{cases} -\dfrac{5\cos x}{3}, & x\le\pi \\ \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}, & x>\pi \end{cases}$	π	4.13	$\begin{cases} 3x^2-x-1, & x\le 1 \\ \dfrac{\sin\pi x}{\pi\sin(1-x)}, & x>1 \end{cases}$	1

4.4	$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2-x}, & x\le 0\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$	0	4.14	$\begin{cases}\cos^2(x-\dfrac{\pi}{6}), & x\le 0\\ \dfrac{2(1-\cos 3x)}{\sin^2 4x}, & x>0\end{cases}$	0
4.5	$\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & x\le\dfrac{\pi}{6}\\ \dfrac{\sqrt{3}-ctgx}{6x-\pi}, & x>\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$	$\dfrac{\pi}{6}$	4.15	$\begin{cases}\cos x-\sin\pi x, & x\le 2\\ \dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}, & x>0\end{cases}$	2
4.6	$\begin{cases}2^{x+5}, & x\le 0\\ \dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}, & x>0\end{cases}$	0	4.16	$\begin{cases}\dfrac{\pi(5-2x)}{\cos\pi x}, & x<2{,}5\\ 2x-3, & x\ge 2{,}5\end{cases}$	2,5
4.7	$\begin{cases}x^2-2, & x\le -1\\ \dfrac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}, & x>-1\end{cases}$	–1	4.17	$\begin{cases}\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}, & x>0\\ (x-1)^2, & x\le 0\end{cases}$	0
4.8	$\begin{cases}ctg^2(\dfrac{\pi}{3}+x^2), & x\le 0\\ \dfrac{x}{\sin 3x}, & x>0\end{cases}$	0	4.18	$\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x^2}{2\sin^4 x}, & x>0\\ \sin(x+\dfrac{\pi}{6}), & x\le 0\end{cases}$	0
4.9	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{x}, & x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi-2x}{\cos x}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$	$\dfrac{\pi}{2}$	4.19	$\begin{cases}\cos(x+\dfrac{\pi}{3}), & x\le 0\\ \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}, & x>0\end{cases}$	0
4.10	$\begin{cases}5\cos x, & x\le 0\\ \dfrac{\sin^2 5x}{x\arcsin 5x}, & x>0\end{cases}$	0	4.20	$\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$	0

5 Найти естественную область определения функции $y=f(x)$. Доказать непрерывность функции $y=f(x)$ во всех точках своей естественной области определения. Выяснить, является ли эта функция элементарной:

№	$f(x)$	№	$f(x)$
5.1	$\dfrac{\sqrt[3]{[x]^3-3x^2+2[x]}}{\sqrt{x-x^2}}$	5.11	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{\sqrt{\pi x-x^2}}$
5.2	$\dfrac{\cos(x\{x\})}{\sqrt{x-x^2}}$	5.12	$\sqrt[3]{\operatorname{sgn}(\cos x)+2\arccos x}$

5.3	$\dfrac{[x]\ln x}{\arcsin x}$	5.13	$\sqrt{(3+\arcsin x)\operatorname{sgn}(\cos x)}$
5.4	$\dfrac{\{x\}\ln x}{(1-x)\arccos x}$	5.14	$\dfrac{(-1)^{[x]}}{\ln(1+\cos^2 x)\sin \pi x}$
5.5	$\dfrac{[\frac{x-1}{2}](\sin^2 x+\cos x^2)}{\arccos x}$	5.15	$\dfrac{(-1)^{[x]}\sin \pi x}{\lvert (x-\pi)(x-3\pi)(x+4\pi)\rvert}$
5.6	$\dfrac{\{\frac{x-1}{2}\}(\sin^2 x+\cos x^2)}{\lg(1+x^2)\arccos x}$	5.16	$\dfrac{(-1)^{[x+\frac{1}{2}]}}{\ln(1+\cos^2 \pi x)\cos \pi x}$
5.7	$\dfrac{\{\frac{x+1}{2}\}\sqrt{1+\arccos^2 x}}{\sqrt[3]{x-1}}$	5.17	$\lvert\sin \pi x\rvert+(-1)^{[x+\frac{1}{2}]}\cos \pi x$
5.8	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin \pi x)}{\sqrt{2x-2x^2}}$	5.18	$\dfrac{(-1)^{\{x\}+2[x]-x}\sin \pi x}{x^3-2x^2+x}$
5.9	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin \pi x)}{\sqrt{3x-x^2-2}}$	5.19	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}+\operatorname{sgn}^2 x}{1-\cos\sqrt{x}}$
5.10	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{\sqrt{3\pi x-x^2-2\pi^2}}$	5.20	$\dfrac{\operatorname{sgn}^2 x}{x\sqrt{\lvert\cos x\rvert}}$

6 Проверить, использовалась ли непрерывность некоторой функции при вычислении пределов в лабораторной работе № 9, в задачах 3 и 4. Найти предел последовательности. Непрерывность какой функции (и в какой точке) использовалась при вычислении предела:

6.1	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{arctg\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$	6.11	$\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-1)$
6.2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)$	6.12	$\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-\sqrt{\cos\frac{1}{n}})$
6.3	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\sin^2\frac{1}{n}}$	6.13	$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\dfrac{n^2+n-1}{n^2-n+1}$
6.4	$\lim\limits_{n\to+\infty}\arcsin(1-n\sin\frac{1}{n})$	6.14	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n\ln\cos\frac{1}{n}}$

6.5 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\pi}}{arctg\dfrac{1}{n}}$

6.6 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\dfrac{1+n}{n})$

6.7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{n}}{\ln(1+\dfrac{1}{n})}$

6.8 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1)(\sqrt[n]{e}-1)$

6.9 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n^2+3)(\sqrt[n]{3}-1)}{n}$

6.10 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n\lg\cos\dfrac{1}{n}}$

6.15 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\dfrac{1}{n})}{\ln(1+\dfrac{2}{n})}$

6.16 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{3}{4n})^n$

6.17 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{2})$

6.18 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{2}{n})$

6.19 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{\cos\dfrac{1}{n}}}{1-\cos\sqrt{\dfrac{1}{n}}}$

6.20 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}})^n$

7 Найти область определения и исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

№	a	при $x\neq a$	при $x=a$	№	a	при $x\neq a$	при $x=a$
7.1	0	$\ln(1-\dfrac{\sin^3 x}{x})$	0	7.11	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$	$\dfrac{1}{2}$
7.2	0	$ctgx\ln(1-\sin x)$	2	7.12	0	$\dfrac{\ln(1-2\sin^4 x)}{x\sqrt{1-4x^2}}$	–2
7.3	0	$\sqrt[x^2]{\cos x\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{e}$	7.13	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4\sqrt{x}}$	0
7.4	0	$\sqrt[x]{1-x+x^2}$	2	7.14	1	$\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{\arcsin\sqrt{1-x^2}}$	1
7.5	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin x(1-\cos\sqrt{x})}$	$\dfrac{1}{2}$	7.15	0	$\ln(3-\dfrac{\sin 3x}{x})$	0

7.6	1	$\dfrac{\arcsin\sqrt[4]{x-x^2}}{\sqrt[4]{3-2x-x^2}}$	1	7.16	0	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1-\sqrt{x})$	$-\dfrac{1}{2}$
7.7	0	$\ln(1-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}})$	0	7.17	0	$\dfrac{\sqrt[x^2]{1+\sin x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$	e
7.8	0	$\dfrac{\sqrt[x^2]{1+2\sin x^2}}{\arccos 6x}$	–1	7.18	0	$\sqrt[x]{1-2x}$	e^{-2}
7.9	0	$\dfrac{\sqrt[x^4]{\cos x^2}}{1+arctgx}$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	7.19	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
7.10	0	$\sqrt[x]{1+2x-x^2}$	2	7.20	1	$\dfrac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{3x-2x^2-1}}$	1

8 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и определить характер точек разрыва (здесь $[x]$-функция «целая часть», $\{x\}$-функция «дробная часть», $D(x)$ - функция Дирихле) :

8.1	$\{\dfrac{1}{x}\}$	8.11	$\dfrac{[x]}{\{x\}}$
8.2	$\{\sin\dfrac{1}{x}\}$	8.12	$\operatorname{sgn}(\sin(\dfrac{1}{x}))$
8.3	$[2\sin\dfrac{1}{x}]$	8.13	$2^{[x]}$
8.4	$(-1)^{[x]}-\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$	8.14	$\{x\}D(x-\sqrt{2})$
8.5	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin\pi x)}{\{x\}}$	8.15	$\{x\}D(x-1)$
8.6	$x\operatorname{sgn}(\cos(\dfrac{1}{x}))$	8.16	$\{x-\sqrt{2}\}D(x)$
8.7	$\operatorname{sgn}(\cos(\dfrac{1}{x}))$	8.17	$\{x-1\}D(x)$
8.8	$[2\cos\dfrac{1}{x}]$	8.18	$\{x\}D(x)$
8.9	$\|\{x\}-\dfrac{1}{2}\|$	8.19	$x^2\operatorname{sgn}(\cos\dfrac{1}{x})+\|D(x)-\dfrac{1}{2}\|$
8.10	$\dfrac{\operatorname{sgn}(\cos\pi x)}{\{x\}}$	8.20	$x^2\operatorname{sgn}(\cos\dfrac{1}{x})$

Решение типовых примеров

Задача 1.20 Функция $f_1(x) = \sin x$ непрерывна (это основная элементарная функция). Следовательно, $f_2(x) = \sin^2 x$ непрерывна (как произведение непрерывной f_1 на непрерывную f_1). Так как постоянная функция $f_3(x) \equiv 2$ непрерывна, то и $f_4(x) = 2\sin^2 x$ непрерывна (как произведение непрерывной f_3 на непрерывную f_2). Функция $f_5(x) = \ln x$ непрерывна на R_+ (это основная элементарная функция). Следовательно, $f_6(x) = 2\sin^2 x - \ln x$ непрерывна (как разность непрерывной f_4 и непрерывной f_5). Функция $f_7(x) = x^2 + 3x + 2$ непрерывна (многочлены - основные элементарные функции). Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x - \ln x}{x^2 + 3x + 2}$ непрерывна (как частное непрерывной f_6 и непрерывной f_7; очевидно , что во всех точках из R_+ знаменатель – функция f_7 – не равна нулю).

Задача 2.20 $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Для непрерывности функции $\sqrt[3]{f(x)}$ в точке a надо потребовать непрерывность функции $f(x)$ в этой же точке a. Для непрерывности функции $f(\sqrt[3]{x})$ в точке a надо потребовать непрерывность функции $f(x)$ в точке $\sqrt[3]{a}$.

Задача 3.20 Функция $f_1(x) = x^2 + x + 2$ непрерывна (это многочлен – основная элементарная функция). Функция $f_2(y) = \ln y$ непрерывна (основная элементарная функция). Учитывая, что $\forall x \in R \quad x^2 + x + 2 > 1$ (легко найти минимум функции $f_1(x) = x^2 + x + 2$ и убедиться, что он больше единицы), заключаем: $\forall x \in R$ композиция функций f_1 и f_2 определена (так как $\forall x \in R \quad f_1(x) > 0$) и непрерывна (по теореме о непрерывности композиции). Учитывая, что функция $f_3(z) = \sqrt{z}$ непрерывна (степенная функция является основной элементарной), а функция $z = \ln y = \ln(x^2 + x + 2)$ непрерывна и строго положительна (так как $x^2 + x + 2 > 1$), получаем, что функция $f(x) = f_3(\ln(x^2 + x + 2)) = f_3(f_2(f_1(x)))$ определена $\forall x \in R$ и непрерывна (по теореме о непрерывности композиции).

Задача 4.20 Функция $f_1(x) = x^2 + 1$ непрерывна всюду, в частности, она непрерывна в точке 0. Поэтому её предел в точке 0 равен значению в этой точке (равен 1), а следовательно, и предел в точке 0 слева тоже равен 1. Предел функции $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке 0 равен 1 ,а следовательно, и предел в точке 0 справа тоже равен 1. Так как данная функция $f(x)$ равна $f_1(x)$ слева от 0, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_1(x) = 1$. Так как данная функция $f(x)$ равна $f_2(x)$ справа от 0, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x) = 1$. Из этого следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$, иначе говоря, следует, что $f(x)$ непрерывна в точке 0.

Задача 5.20. Точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции $\operatorname{sgn}^2 x$. Во всех других точках функция $\operatorname{sgn}^2 x$ равна 1 и, следовательно, непрерывна на $R_- \cup R_+$ (эта функция, конечно, не является непрерывной на R).

Так как функции $y = \cos x$ и $z = |y|$ непрерывны, то по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций, их композиция $z = |\cos x|$ также непрерывна. Так как функция $t = \sqrt{z}$ непрерывна, то и функция $t = \sqrt{|\cos x|}$ непрерывна (снова по теореме о непрерывности композиции).

Для доказательства непрерывности данной функции $f(x)$ осталось применить теорему о непрерывности произведения (получим непрерывность функции $x\sqrt{|\cos x|}$) а затем - теорему о непрерывности частного.

Функция $y = |x|$ является элементарной (она может быть представлена как композиция двух степенных (основных элементарных) функций $t = x^2$ и $y = t^{0,5}$. Функция $y = \operatorname{sgn}^2 x$ (числитель), конечно, не является элементарной (она не непрерывна в точке 0) , однако, во всех точках, где знаменатель $x\sqrt{|\cos x|}$ не равен нулю, числитель $\operatorname{sgn}^2 x$ равен единице и данная функция $y = f(x)$ может быть представлена в виде $y = \dfrac{1}{x\sqrt{|\cos x|}}$; она может быть получена из основных элементарных применением арифметических операций и композиций в конечном числе и, следовательно, является элементарной.

Задача 6.20.

$$(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n = ((1+(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1))^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}})^{n(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1)}.$$

Обозначим: $y_n = \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1$. Тогда $y_n \to 0$ при $n \to +\infty$ (здесь мы воспользовались тем, что $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to +\infty$, непрерывностью функции $\cos$ в нуле и определением непрерывности по Гейне).

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n}$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ (мы использовали замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и определение предела по Гейне) и

$$\lim_{n\to+\infty} ny_n = \lim_{n\to+\infty} n(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} n(-2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}) = \lim_{n\to+\infty} -2\frac{\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}{4(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2}) = -\frac{1}{2}\text{ т}$$

о $\lim\limits_{n\to+\infty}((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Последнее равенство требует обоснования. Перейдём от степенно-показательного выражения к показательному:

$((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n} = e^{\ln((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}})^{ny_n}} = e^{ny_n \ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}}$. Обозначим показатель через z_n и найдём его предел. При $n \to +\infty$ предел $(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}$ равен e. Поэтому предел $\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}$ равен $\ln e$ (здесь мы воспользовались непрерывностью логарифма в точке e), то есть равен 1. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} ny_n \ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} ny_n \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$. Итак, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\frac{1}{2}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{z_n} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (здесь мы воспользовались непрерывностью экспоненты в точке e).

Задача 7.20. Функция $f_1(x) = \sqrt[4]{1-x^2}$ определена при $1-x^2 \geq 0$, то есть при $|x| \leq 1$. При этих x имеем: $0 \leq 1-x^2 \leq 1$ и, следовательно, $0 \leq \sqrt[4]{1-x^2} \leq 1$

и, следовательно, функция $f_2(x)= \; =\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}$ определена. Функция $f_3(x)=\sqrt[4]{-2x^2+3x-1}$ определена при $-2x^2+3x-1\ge 0$, то есть при $0{,}5\le x\le 1$. Обе функции, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ определены при $0{,}5\le x\le 1$. Частное функций $f_2(x)$ и $f_3(x)$ определено только при $0{,}5<x<1$ (при $x=1$ и $x=0{,}5$ знаменатель $f_3(x)$ равен нулю), однако, при $x=1$ функция $f(x)$ специально доопределена: $f(1)=1$. Итак, областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(0{,}5;1]$.

Функция, заданная формулой $h(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{-2x^2+3x-1}}$, получена из обратной тригонометрической функции $\arcsin$ и степенных функций применением арифметических операций и композиций (конечное число раз), является элементарной и, следовательно, непрерывной в своей естественной области определения $(0{,}5;1)$. Поскольку $f(x)$ совпадает с $h(x)$ на интервале $(0{,}5;1)$, то и $f(x)$ непрерывна во всех точках этого интервала.

Осталось исследовать $f(x)$ на непрерывность в точке 1:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in D(f)\\ x\ne 1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}}\frac{\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{-2x^2+3x-1}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}}\frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{x-0{,}5})}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}}\frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}\cdot\frac{(\sqrt[4]{1+x})}{\sqrt[4]{x-0{,}5)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{(1+1)}}{\sqrt[4]{(1-0{,}5)}}\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in(0,5;1)}}\frac{\arcsin(\sqrt[4]{1-x}))(\sqrt[4]{1+x})}{(\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{1+x})}=[\text{замена: }\sqrt[4]{1-x}\cdot\sqrt[4]{1+x}=t\,]=$$

$$=\sqrt[4]{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\arcsin t}{t}=[\text{замена: }\arcsin t=u\,]=\sqrt[4]{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{u}{\sin u}=\sqrt[4]{2}\lim_{\substack{u\to 0\\ u\ne 0}}\frac{u}{\sin u}=\sqrt[4]{2}\,.$$

Предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in D(f)\\ x\ne 1}} f(x)$ существует, но не равен заданному значению функции в точке 1 и, следовательно, функция имеет в точке 1 устранимый разрыв.

Задача 8.20. Функция $y=\cos\frac{1}{x}$ непрерывна во всех точках своей области определения. Так как функция $z=\operatorname{sgn} y$ непрерывна всюду, кроме точки 0, то композиция этих функций – функция $z=\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ непрерывна всюду, кроме, возможно, тех точек, в которых $\cos\frac{1}{x}=0$ (и, конечно, кроме точки 0). Решаем уравнение: $\cos\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2\pi k}, k\in Z, k\neq 0$. Учитывая непрерывность функции $g(x)=x^2$, делаем вывод о непрерывности данной функции $f(x)=x^2\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ во всех точках, кроме точки 0 и, возможно, точек вида $\frac{1}{2\pi k}, k\in Z, k\neq 0$.

Заметим, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$ существует (и равен нулю) как предел произведения бесконечно малой при $x\to 0$ функции $g(x)=x^2$ на ограниченную $z(x)=\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})$. Следовательно, в точке 0 функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв.

Рассмотрим точку вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n\in N$.

Справа от этой точки (точнее, в правосторонней окрестности $(\frac{1}{2n\pi};\frac{1}{(2n-1)\pi})$) имеем: $\frac{1}{2n\pi}<x<\frac{1}{(2n-1)\pi})$ и, следовательно, $(2n-1)\pi<\frac{1}{x}<2n\pi$ и, следовательно, $\cos\frac{1}{x}<0$ и, следовательно, $\operatorname{sgn}(\cos\frac{1}{x})=-1$. Итак, в правосторонней окрестности $(\frac{1}{2n\pi};\frac{1}{(2n-1)\pi})$ точки $\frac{1}{2n\pi}$ имеем: $f(x)=-x^2$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2n\pi}\\ x>\frac{1}{2n\pi}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2n\pi}\\ x>\frac{1}{2n\pi}}}(-x^2)=-(\frac{1}{2n\pi})^2$.

Отметим, что мы использовали непрерывность функции $y=-x^2$. Таким образом, в рассматриваемой точке $\frac{1}{2n\pi}$ функция $f(x)$ имеет конечный предел справа (и он равен $-(\frac{1}{2n\pi})^2$).

Аналогично, рассматривая левостороннюю окрестность $(\frac{1}{(2n+1)\pi};\frac{1}{2n\pi})$ точки $\frac{1}{2n\pi}$, получим: в рассматриваемой точке $\frac{1}{2n\pi}$ функция $f(x)$ имеет конечный предел справа (и он равен $(\frac{1}{2n\pi})^2$).

Итак, в точках вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n \in N$ функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода.

В точках вида $(-\frac{1}{2n\pi})$, где $n \in N$ можно было бы провести исследование по аналогии с исследованием, проведённым в точках вида $\frac{1}{2n\pi}$, где $n \in N$. Однако, проще учесть чётность данной функции $f(x)$ и тот очевидный факт, что предел справа функции $f(x)$ в точке $(-\frac{1}{2n\pi})$ равен пределу слева в точке $\frac{1}{2n\pi}$, а предел слева в точке $(-\frac{1}{2n\pi})$, соответственно, пределу справа в точке $\frac{1}{2n\pi}$.

Лабораторная работа № 12

Производная и дифференциал функции: определения, геометрический смысл, физический смысл

Необходимые понятия и теоремы: дифференцируемость и дифференциал функции в точке, производная функции в точке, теорема о равносильности дифференцируемости и существования производной, теорема о дифференцируемости и непрерывности, касательная к графику функции, мгновенная скорость.

Литература: [1] с. 202 – 214, [2] с. – .

1 Повторите определение дифференцируемости функции в точке. Докажите непосредственно по определению, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Запишите дифференциал функции в виде $df = kh$:

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
1.1	$-x^2-2x+4$	1	1.11	$-3x^3-x^2-2x+4$	1
1.2	$-x^2+12x-4$	3	1.12	$3x^3-x^2+12x-4$	3
1.3	$-3x^2+5x-1$	2	1.13	x^3-3x^2+5x-1	2
1.4	$4x^2+5x+1$	-1	1.14	$2x^3-4x^2+5x+1$	-1
1.5	$3x^2+2x-3$	-3	1.15	x^3+3x^2+2x-3	-3
1.6	$2x^2-3x+4$	-2	1.16	$-3x^3+2x^2-3x+4$	-2
1.7	$2x^2-4x+3$	1	1.17	$-x^3+2x^2-3x+4$	1
1.8	$3x^2+4x-1$	3	1.18	$2x^3+3x^2+4x-1$	3
1.9	$-3x^2+5x+4$	2	1.19	$-x^3-3x^2+5x+4$	2
1.10	$3x^2+5x-4$	-1	1.20	$2x^3-3x^2+5x-4$	-1

2 Для функции $f(x)$ и точки x_0 из задания **1** найдите производную $f'(x_0)$ непосредственно по определению. Обратите внимание, что представление приращения функции $\Delta f = f(x_0+h)-f(x_0)$ в виде $\Delta f = kh + o(h)$, полученное в предыдущем задании, облегчает вычисление производной (то есть вычисление предела $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$). Повторите теорему о равносильности дифференцируемости функции в точке и существования конечной производной в этой точке. Запишите определение дифференцируемости и определение производной, используя символы Δx вместо h.

3 Для функции $f(x)$, точки x_0 и значений Δx, равных 1; -1; 0,5; -0,5; 0,1; -0,1; 0,05; -0,05; 0,01; -0,01; 0,005; -0,005; 0, 001; -0, 001, вычислите, используя EXCEL, приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Какое предположение можно сделать на основе полученных результатов о величине $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$? О производной $f'(x_0)$? О дифференциале df в точке x_0?

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
3.1	$tg 2x$	0	3.11	tgx	0
3.2	$\dfrac{3^x}{\ln 3}$	1	3.12	$\cos x$	$\dfrac{\pi}{6}$
3.3	$\sin x$	$\dfrac{\pi}{3}$	3.13	$\ln x$	1
3.4	$\ln(x+1)$	1	3.14	$\ln 2x$	4
3.5	$\cos x$	0	3.15	$tg 3x$	0
3.6	$\sin^2 x$	0	3.16	e^{x+1}	0
3.7	$\ln(x^2+1)$	-1	3.17	$\sin x^2$	0
3.8	xe^x	0	3.18	$\cos x^2$	0
3.9	e^x	0	3.19	$\cos^2 x$	0
3.10	$\dfrac{2^x}{\ln 2}$	1	3.20	$\sin 5x$	0

4 Используя EXCEL и разбивая отрезок $0;4$ на 1000 частей точками 0; 0,004; 0,008; 0,016;…;3,996;4

а) постройте график функции $f(x)$ на $0;4$

б) выберите свободную ячейку для коэффициента k, поместите в неё какое-нибудь число и постройте график функции $y = k(x - x_0) + f(x_0)$

в) изменяя содержимое указанной ячейки (то есть изменяя число k), обратите внимание на изменение положения прямой $y = k(x - x_0) + f(x_0)$, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$

г) подберите число k так, чтобы получающаяся прямая как можно лучше сливалась с графиком функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

д) какое предположение можно сделать на основе этого эксперимента о величине производной функции $f(x)$ в точке x_0 и о дифференциале функции $f(x)$ в точке x_0?

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
4.1	$4\cos\sqrt{\frac{x}{x+2}}$	1	4.11	$3\arccos\frac{x+1}{x+2}$	1
4.2	$\frac{2x+1}{\sqrt{x}+x+1}$	2	4.12	$3^{\sqrt{x^2+1}-3}$	2
4.3	$\pi^{x^2+\sqrt{x}-20}$	1	4.13	$2\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$	2
4.4	$2\ln\sqrt{1+\sqrt{x+9}}$	2	4.14	$2\sin((x-1)\sqrt{x+1})$	2
4.5	$\frac{\sin(x+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}}$	2	4.15	$3\arcsin\frac{x}{x+1}$	1
4.6	$(1,5)^{(x+1)\sqrt{x}}$	1	4.16	$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x^2}}$	2
4.7	$2arctg\frac{x+1}{x+2}$	2	4.17	$2^{\sqrt{x+2}}$	2
4.8	$\sqrt{x+1}\ln(x+1)$	2	4.18	$3\ln(1+2\sqrt{x+1})$	1
4.9	$(3x^2+1)\sin x$	1	4.19	$3x\sin(x^2+1)$	1
4.10	$\sin\sqrt{x}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$	1	4.20	$0,1x\sqrt{x^2+1}$	2

5 Пусть тело движется прямолинейно и равноускоренно по закону $s = s(t)$. Используя EXCEL, найти среднюю скорость тела на промежутке с концами t_0 и $t_0+\Delta t$, если Δt равно 1; -1; 0,5; -0,5; 0,1; -0,1; 0,05; -0,05; 0,01; -0,01; 0,005; -0,005; 0, 001; -0, 001. Найти производную функции $s(t)$ в точке t_0. Найти мгновенную скорость тела в момент t_0.

№	$s(t)$	t_0	№	$s(t)$	t_0
5.1	$4t^2+6t+6$	10	5.11	t^2-4t-3	15
5.2	$8t^2-4t+1$	5	5.12	$3t^2-6t+2$	3
5.3	$2t^2+2t+3$	15	5.13	$5t^2+2t-4$	2
5.4	$16t^2+t+1$	3	5.14	t^2-3t+4	10

5.5	$6t^2+2t+2$	2	5.15	$6t^2+6t-1$	5
5.6	$5t^2-3t+2$	10	5.16	$3t^2-5t+6$	15
5.7	$5t^2+2t+1$	5	5.17	$5t^2-3t+2$	3
5.8	$6t^2-3t+5$	15	5.18	$6t^2-t+5$	2
5.9	t^2+9t-1	3	5.19	t^2+8t+6	5
5.10	$3t^2+6t+6$	2	5.20	$\frac{9{,}8t^2}{2}+0{,}2\cdot t$	10

6 Может ли некоторая функция быть дифференцируемой в точке x_0 и не быть непрерывной в этой точке ? Может ли некоторая функция быть непрерывной в точке x_0 и не быть дифференцируемой в этой точке ? Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и не дифференцируема (не имеет производной) в этой точке:

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
6.1	$\begin{cases} 1-3x, & x<-1 \\ 2x^2+2, & x\ge -1 \end{cases}$	–1	6.11	$\begin{cases} 3-3x, & x<-1 \\ 2x^2+4, & x\ge -1 \end{cases}$	–1
6.2	$\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ 1-2x^2, & x>0 \end{cases}$	0	6.12	$\begin{cases} x+2, & x\le 0 \\ 2-x^2, & x>0 \end{cases}$	0
6.3	$\begin{cases} 12-2x, & x<3 \\ x^2-3, & x\ge 3 \end{cases}$	3	6.13	$\begin{cases} 5-x, & x<3 \\ x^2-7, & x\ge 3 \end{cases}$	3
6.4	$\begin{cases} x+12, & x\le 2 \\ x^2+10, & x>2 \end{cases}$	2	6.14	$\begin{cases} 2x-5, & x\le 2 \\ x^2-5, & x>2 \end{cases}$	2
6.5	$\begin{cases} 3x+1, & x<1 \\ x^2+3, & x\ge 1 \end{cases}$	1	6.15	$\begin{cases} 3x-3, & x<1 \\ x^2-1, & x\ge 1 \end{cases}$	1
6.6	$\begin{cases} -2+4x, & x<-1 \\ 5x-x^2, & x\ge -1 \end{cases}$	–1	6.16	$\begin{cases} 2-3x, & x<-1 \\ 2x^2+3, & x\ge -1 \end{cases}$	–1
6.7	$\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 3-2x^2, & x>0 \end{cases}$	0	6.17	$\begin{cases} x+2, & x\le 0 \\ 2-x^2, & x>0 \end{cases}$	0
6.8	$\begin{cases} 11-x, & x<3 \\ x^2-1, & x\ge 3 \end{cases}$	3	6.18	$\begin{cases} 11-x, & x<3 \\ x^2-1, & x\ge 3 \end{cases}$	3

6.9	$\begin{cases} 3x-6, x\le 2 \\ 4-x^2, x>2 \end{cases}$	2	6.19	$\begin{cases} 2x+2, x\le 2 \\ x^2+2, x>2 \end{cases}$	2
6.10	$\begin{cases} 5x+2, x<1 \\ 8-x^2, x\ge 1 \end{cases}$	1	6.20	$\begin{cases} x, \ x<1 \\ x^2, x\ge 1 \end{cases}$	1

7 Построить график функции $f(x)$. Провести секущую через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ для значения Δx, равного 1. Построить треугольник с вершинами $(x_0; f(x_0))$, $(x_0+1; f(x_0))$, $(x_0+1; f(x_0+1))$. Найти длины катетов этого треугольника и тангенс угла с вершиной $(x_0; f(x_0))$. Провести секущую через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ для значений Δx, равных 1; 0,5; 0,1. Провести касательную к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Используя EXCEL, вычислить угловые коэффициенты секущих для значений Δx, равных 1; 0,5; 0,1; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001; 0,0005; 0,0001. Найти производную функции $f(x)$ в точке x_0 (производную находить непосредственно по определению, вычисляя предел отношения приращения функции к приращению аргумента). Какой геометрический смысл имеет производная?

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
7.1	$\sin x$	0	7.11	e^x	1
7.2	$\ln x$	1	7.12	$\sqrt{x}$	4
7.3	$\cos x$	$\frac{\pi}{2}$	7.13	$\sin x$	$\frac{\pi}{3}$
7.4	x^3	1	7.14	$\ln x$	e
7.5	e^x	0	7.15	$\cos x$	$\frac{3\pi}{2}$
7.6	$\sqrt{x}$	1	7.16	x^3	1,5
7.7	$\sin x$	π	7.17	2^x	0
7.8	$\ln x$	2	7.18	$\sqrt{x}$	2,25
7.9	$\arccos\frac{x}{2}$	1	7.19	$\arcsin\frac{x}{2}$	1
7.10	x^3	0,5	7.20	$\cos x$	$\frac{\pi}{6}$

8 Найти углы, под которыми график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс:

№	$f(x)$	№	$f(x)$
8.1	x^3-2x^2+2x	8.11	x^3-2x^2-3x
8.2	x^3-5x^2+4x	8.12	x^3-3x^2-4x
8.3	x^3-6x^2+5x	8.13	x^3-4x^2-5x
8.4	x^3-5x^2+6x	8.14	x^3-7x^2+6x
8.5	x^3-6x^2+8x	8.15	x^3-8x^2+12x
8.6	x^3-7x^2+10x	8.16	x^3-9x^2+18x
8.7	x^3-7x^2+12x	8.17	x^3-10x^2+24x
8.8	x^3+x^2-2x	8.18	x^3-5x^2-6x
8.9	x^3-8x^2+15x	8.19	x^3-11x^2+30x
8.10	x^3-x^2-2x	8.20	x^3-4x^2+3x

9 Для функции $f(x)$ задачи 8 найти точки, в которых касательные к графику функции $f(x)$ параллельны оси абсцисс (при вычислении производных использовать правила «производная суммы равна сумме производных», «константу можно выносить за знак производной» и «$(x^n)'=nx^{n-1}$»). Используя информацию, полученную при решении задач 8 и 9, построить график функции $f(x)$.

10 Найти производные функций $\cos$ и $\sin$ в произвольной точке x_0 непосредственно по определению производной (см. решение задачи 7.20). Используя полученные формулы и правила вычисления производной суммы, произведения и частного функций, написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
10.1	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$	$\dfrac{\pi}{3}$	10.11	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1+\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{3}$
10.2	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$	$\dfrac{\pi}{6}$	10.12	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{1+\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{6}$
10.3	$\dfrac{2\sin x+\cos x}{\sin^2 x}$	$\dfrac{\pi}{4}$	10.13	$\dfrac{2\sin x+\cos x}{1+\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{4}$

10.4	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin 2x}$	$\dfrac{\pi}{4}$	10.14	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1+\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{4}$
10.5	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{\cos^2 x}$	0	10.15	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{1+\cos 2x}$	0
10.6	$\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x+\cos(x-\frac{\pi}{3})}$	$\dfrac{\pi}{3}$	10.16	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1+\sin^2 x}$	$\dfrac{\pi}{3}$
10.7	$\dfrac{\cos x}{\sin x+2\sin 2x}$	$\dfrac{\pi}{6}$	10.17	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{1+\sin^2 x}$	$\dfrac{\pi}{6}$
10.8	$\dfrac{\sin^2 x}{2\sin x+\cos x}$	$\dfrac{\pi}{4}$	10.18	$\dfrac{2\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}$	$\dfrac{\pi}{4}$
10.9	$\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}$	$\dfrac{\pi}{4}$	10.19	$\dfrac{\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1+\sin^2 x}$	$\dfrac{\pi}{4}$
10.10	$\dfrac{\cos^2 x}{\sin x+2\sin 2x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	10.20	$\dfrac{\sin x+2\sin 2x}{1+\sin^2 x}$	0

Решение типовых примеров

Задача 1.20 Найдём приращение функции $f(x)$ в точке $x_0=2$: $\Delta f = f(2+h)-f(2)$ $=((2+h)^3-3(2+h)^2+5\cdot(2+h)-4)$- $-(2\cdot(2)^3-3(2)^2+5\cdot(2)-4)=5\cdot h+(3h^2+h^3)$. Заметим, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+h^3}{h}=0$ и, следовательно, $3h^2+h^3=o(h)$. Поскольку нам удалось представить приращение функции в виде $\Delta f = k\cdot h+o(h)$, то $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=2$. При этом $df=5\cdot h$.

Задача 2.20 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h+o(h)}{h}$ =5.

Заметим, что и в общем случае дифференцируемой функции (то есть такой функции, у которой приращение представимо в виде $\Delta f = kh+o(h)$) производная вычисляется очень легко (она равна k).

Задача 3.20 Заметим, что $\dfrac{\sin 5\cdot(0+\Delta x)-\sin 5\cdot 0}{\Delta x}=\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$. В столбец A листа EXCEL, начиная с ячейки $A1$, введите указанные значения Δx. В ячейку $B1$ введите формулу =SIN(5*A1)/A1 и сделайте «заполнить вниз». Для ячеек столбца B выберите числовой формат и десять знаков после запятой. Вы увидите, что результаты будут быстро приближаться к числу 5.

Задача 4.20 В ячейку $A1$ листа EXCEL введите число 0. В ячейку $A2$ - формулу =A1+0,004. Выделите диапазон ячеек $A2:A1001$ и произведите заполнение вниз (выделять мышкой 1000 ячеек, конечно, можно, но очень неудобно). В ячейку $B1$ введите формулу для функции $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$, то есть формулу =A1*(A1^2+1)^0,5 , выделите диапазон ячеек $B1:B1001$ и заполните вниз. В ячейку $D1$ введите число k (например, число 1), в столбец C (от $C1$ до $C1001$) - значения функции $y=k(x-x_0)+f(x_0)$ таким же образом, как и для функции $f(x)$ (вам придётся вводить формулу =$D$1*(A1-2)+2*5^0,5). После этого можно сделать «ВСТАВИТЬ», «ДИАГРАММА», «ТОЧЕЧНАЯ» и построить графики по рядам $A$1:$A$1001 и $B$1:$B$1001, а также по рядам $A$1:$A$1001 и $C$1:$C$1001.

Задача 5.20 Из школьного курса физики известно, что при равноускоренном движении тело движется по закону $s(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0$, где a - ускорение, v_0- начальная скорость, s_0 - начальный путь. В нашем случае можно говорить о падении (ускорение примерно равно ускорению свободного падения) с начальной скоростью $v_0=0,2\,{}^{м}\!/_{сек}$**)**. Требуется найти скорость тела через 10 секунд после начала падения. Сначала мы вычисляем среднюю скорость, организуя вычисления в EXCEL так, как при решении задачи 3.20. Численный эксперимент показывает, что средняя скорость стремиться к 100 **(**${}^{м}\!/_{сек}$**)** при $\Delta t\to 0$. Вычислим производную. Поскольку правила вычисления производных ещё не изучались, то вычислять будем непосредственно по определению:

$$f'(10)=\lim_{h\to 0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{9,8(10+h)^2}{2}+0,2\cdot 10)-(\frac{9,8(10)^2}{2}+0,2\cdot 10)}{h}=100.$$

Мы ДОКАЗАЛИ, что производная при $t=10$ (то есть мгновенная скорость в момент 10 $сек$), действительно, равна 100.

Задача 6.20 Убедимся, что односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 равны $f(x_0)$. Это доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} x^2 = \lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x = \lim_{x\to 1} x = 1 = f(1)$$

Убедимся, что односторонние пределы отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ не равны между собой :

$$\lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{(1+\Delta x)-1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Это доказывает $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ не существует, то есть функция $f(x)$ не имеет производной (не дифференцируема) в точке x_0.

Задача 7.20

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} == \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{6}+\Delta x)-\cos(\frac{\pi}{6})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\frac{\pi}{6} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Задача 8.20 Найдём точки пересечения. Для этого решим уравнение $x^3-4x^2+3x=0$: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. Углом между кривой и прямой называется угол между прямой и касательной к этой кривой, проведённой в точке пересечения. Поскольку угловой коэффициент касательной равен производной функции в соответствующей точке, то наша задача сводится к вычислению производных в соответствующих точках : $f'(x_0) = 3x_0{}^2 - 8x_0 + 3$ (производную можно найти либо по правилам вычисления производных, известных вам из курса средней школы, либо по определению производной), $f'(0) = 3$, $f'(1) = -4$, $f'(3) = 6$. Заметим, что $f'(1)$ отрицательна, иначе говоря, отрицательным является тангенс угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox, и, соответственно, угол является тупым. Он равен $\pi - arctg4$ (угол между прямыми – касательной к графику и осью Ox - равен $arctg4$). Другие два угла равны $arctg3$ и $arctg6$.

Задача 9.20 Касательная параллельна оси абсцисс тогда и только тогда, когда её угловой коэффициент равен нулю. Поскольку угловой коэффициент касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ равен производной в x_0, нужно найти производную $f'(x)$ и решить уравнение $f'(x) = 0$.

Задача 10.20 Уравнение прямой, не параллельной оси Ox, имеет вид $y = kx + b$ (1). Так как касательная проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению $y = kx + b$ и, следовательно, $f(x_0) = kx_0 + b$. Отсюда получаем, что $b = f(x_0) - kx_0$ и уравнение (1) приобретает вид $y = k(x - x_0) + f(x_0)$. Для завершения решения задачи осталось найти угловой коэффициент касательной, то есть производную в точке x_0. Учитывая ограничение на использование правил вычисления производных, заметим, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и можно использовать правило о производной произведения), а $1 + \sin^2 x = 1 + \sin x \cdot \sin x$.

Лабораторная работа №13
Вычисление производных

Необходимые понятия и теоремы: формулы для производных основных функций; правила дифференцирования, связанные с арифметическими действиями над функциями; производная сложной функции; дифференциал; производная обратной функции; производная функции, заданной параметрически; производная функции, заданной неявно.

Литература: [1] с. 232 – 243, [2] с. 146 – 157.

1 Вычислить производные данных функций.

№	$y = f(x)$		$y = f(x)$
1.1	$а) y = 2x^5 + 3\sqrt{x^3}$; $б) y = (x^2 + 1)\sin x$; $в) y = \arcsin(x + 1)$; $г) y = \sin 3 + \cos 3x$	1.11	$а) y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{2}{x^3}$; $б) y = x^3 tgx$; $в) y = \log_2(x + 3)$; $г) y = ctg8 + tg(8 + x)$
1.2	$а) y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2}$; $б) y = x\ln x$; $в) y = arctg(2x + 3)$; $г) y = e^3 + \cos(3x + 1)$	1.12	$а) y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}$; $б) y = xtgx$; $в) y = \frac{1}{\ln x}$; $г) y = 2^{3-\sqrt{5}} + \arcsin(1 + x)$
1.3	$а) y = 8x^2 + \frac{1}{x}$; $б) y = (3x^2 + 2x + 1)e^x$; $в) y = \frac{1}{2}\arccos(2x)$; $г) y = \ln\pi + \sin(5x + 8)$	1.13	$а) y = \frac{4}{x^3} - 2x^5$; $б) y = (x^5 - 3)2^x$; $в) y = \frac{1}{tg(x+1)}$; $г) y = \sqrt{x - 3} + \sin 8$
1.4	$а) y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5}$; $б) y = +x^2 \cdot \cos x$; $в) y = -arcctg(x + 5)$; $г) \cos 2 + \sin 2x$	1.14	$а) y = 5x^3 - \frac{8}{x^2}$; $б) y = \sqrt{x}\cos x$; $в) y = \frac{1}{ctg(x+3)}$; $г) y = e^7 + \sqrt[3]{x + 1}$

1.5	$а)\, y=4x^3-\dfrac{7}{x^4};$ $б)\, y=(x^4+3)\sin x;$ $в)\, y=\ln(2x+5);$ $г)\, y=tg4+ctg4x$	1.15	$а)\, y=\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^5};$ $б)\, y=\dfrac{x}{2}\ln x;$ $в)\, y=\arcsin(1-x);$ $г)\, y=\sin 3+tg2x$
1.6	$а)\, y=\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{2}{x^3};$ $б)\, y=x^3 tgx;$ $в)\, y=\log_2(x+3);$ $г)\, y=ctg8+tg(8+x)$	1.16	$а)\, y=\sqrt{x^3}+\dfrac{6}{x^2};$ $б)\, y=x(1+tgx);$ $в)\, y=\arccos(2-3x);$ $г)\, y=\cos 3-\sin\dfrac{x}{3}$
1.7	$а)\, y=4\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2};$ $б)\, y=x tgx;$ $в)\, y=\dfrac{1}{\ln x};$ $г)\, y=2^{3-\sqrt{5}}+\arcsin(1+x)$	1.17	$а)\, y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[5]{x^2};$ $б)\, y=x^2(\sin x+1);$ $в)\, y=arctg(2-x);$ $г)\, y=tg\dfrac{1}{3}+ctg\dfrac{x}{3}$
1.8	$а)\, y=\dfrac{4}{x^3}-2x^5;$ $б)\, y=(x^5-3)2^x;$ $в)\, y=\dfrac{1}{tg(x+1)};$ $г)\, y=\sqrt{x-3}+\sin 8$	1.18	$а)\, y=7x^2-\sqrt[3]{x^8};$ $б)\, y=e^{x+3}(x^2+x+1);$ $в)\, y=\lg(2x+1);$ $г)\, y=\arcsin 2x+e^2$
1.9	$а)\, y=5x^3-\dfrac{8}{x^2};$ $б)\, y=\sqrt{x}\cos x;$ $в)\, y=\dfrac{1}{ctg(x+3)};$ $г)\, y=e^7+\sqrt[3]{x+1}$	1.19	$а)\, y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^7};$ $б)\, y=\dfrac{x+1}{3}tgx;$ $в)\, y=10^{3-2x};$ $г)\, y=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{2}{3}$
1.10	$а)\, y=\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^5};$ $б)\, y=\dfrac{x}{2}\ln x;$ $в)\, y=\arcsin(1-x);$ $г)\, y=\sin 3+tg2x$	1.20	$а)\, y=\dfrac{6}{x^4}-\sqrt{x^5};$ $б)\, y=(2x^3+3x-1)e^{2+x};$ $в)\, y=arcctg(3-2x);$ $г)\, y=tg8+\sin\dfrac{x}{4}$

2 Пользуясь правилами дифференцирования, вычислить производные данных функций.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
2.1	$y=\dfrac{\cos x}{tgx+ctgx}$	2.11	$y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
2.2	$y=\dfrac{\sin}{1+ctgx}$	2.12	$y=\dfrac{\cos x}{\cos x+1}$
2.3	$y=\dfrac{\cos x}{1+tgx}$	2.13	$y=\dfrac{xe^x}{x+1}$
2.4	$y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$	2.14	$y=\dfrac{x+1}{e^x}$
2.5	$y=\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$	2.15	$y=\dfrac{x\sin x}{x^2+x+1}$
2.6	$y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$	2.16	$y=\dfrac{(x+2)\cos x}{1-\sin x}$
2.7	$y=\dfrac{x^2+tgx}{x^2-tgx}$	2.17	$y=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$
2.8	$y=\dfrac{x^2+2x+5}{\sqrt{x}}$	2.18	$y=\dfrac{x^2+1}{arcctgx}$
2.9	$y=\dfrac{x\ln x}{x+1}$	2.19	$y=\dfrac{1+\ln x}{\sqrt{x}+1}$
2.10	$y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$	2.20	$y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x}$

3 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислить производную функции $y=f(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$y=\log_2^3(2x+3)$	3.11	$y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$
3.2	$y=\cos\dfrac{1}{\ln(3x+7)}$	3.12	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x)$
3.3	$y=3^{arctg(2x+\pi)}$	3.13	$y=2^{\sin x^2}$

3.4	$y=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{3x}}$	3.14	$y=3^{tg^2(5x+\sqrt{2})}$
3.5	$y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{\sqrt{2x}}$	3.15	$y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$
3.6	$y=arctgtg^2x$	3.16	$y=\ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x}{2})$
3.7	$y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$	3.17	$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$
3.8	$y=\frac{2}{7}\ln(\sqrt{x^7}+\sqrt{1+x^7})$	3.18	$y=arctg\frac{1+x}{1-x}$
3.9	$y=tg^2x+\ln\cos^2 x$	3.19	$y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$
3.10	$y=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$	3.20	$y=\ln(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}})$

4 Найти производную функции $y = f(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
4.1	$y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$	4.11	$y=x^3\arccos-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$
4.2	$y=\frac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{2}}$	4.12	$y=\ln(1+e^x)+2e^{-x/2}arctge^{x/2}$
4.3	$y=4\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$	4.13	$y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$
4.4	$y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$	4.14	$y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{17}}$
4.5	$y=\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{x-1}+\ln\frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$	4.15	$y=arctg\frac{\sqrt{2tgx}}{1-tgx}$
4.6	$y=\ln\frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$	4.16	$y=\frac{\cos x}{2+\sin x}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2tg^{x/2}+1}{\sqrt{3}}$
4.7	$y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$	4.17	$y=\frac{5^x(2\sin 2x+\cos 2x\cdot\ln 5)}{4+\ln^2 5}$
4.8	$y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$	4.18	$y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\frac{x+2}{5}}$
4.9	$y=6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$	4.19	$y=\frac{(1+x)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$
4.10	$y=\frac{1}{2}\sqrt{1/x^2-1}-\frac{\arccos x}{2x^2}$	4.20	$y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})+\arcsin e^{-5x}$

5 Найти производную. Записать дифференциал $df(x)$.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
5.1	$y=\sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$	5.11	$y=tg^2x+\ln\cos^2 x$
5.2	$y=\frac{e^{x^3}}{1+x^3}$	5.12	$y=\ln\frac{\sqrt{2}+thx}{\sqrt{2}-thx}$
5.3	$y=\arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$	5.13	$y=\frac{1}{\sin 5}\ln(tgx+ctg5)$
5.4	$y=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$	5.14	$y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$
5.5	$y=e^{\sin x}(x-\frac{1}{\cos x})$	5.15	$y=\log_2\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
5.6	$y=-e^{3x}/(3sh^3x)$	5.16	$y=\arcsin\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$
5.7	$y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$	5.17	$y=\frac{1-8ch^2x}{4ch^4x}$
5.8	$y=\frac{tg^2x}{tgx^2}$	5.18	$y=\ln^3(5x+\sqrt{1+25x^2})$
5.9	$y=\cos^4 x\cdot\cos 4x-\frac{1}{\cos 4x}$	5.19	$y=\frac{e^{x^2}}{1+x^2}$
5.10	$y=x\cos x+\sin 3\ln\sin(x-3)$	5.20	$y=arctg\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$

6 Используя метод логарифмического дифференцирования, найти производную.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
6.1	$y=\frac{(1+x)^5\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^4}}$	6.11	$y=\frac{x^2+3}{x^2+1}\cdot\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$
6.2	$y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}\cdot\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}}$	6.12	$y=\frac{(x-1)^5\cdot(2x+1)^4}{\sqrt{(x+2)^3}}$
6.3	$y=\frac{x\cdot(x-1)^3}{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+x)^3}$	613.	$y=\frac{(2x-1)^2\cdot(5x+1)^3}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$

6.4	$y=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$	614	$y=\frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^5\cdot(x+4)^8}$
6.5	$y=\frac{x(x-1)^2(x-2)^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$	6.15	$y=\frac{(x^2+1)\sqrt[3]{x^2}}{(x-1)^2(x+\sqrt{2})}$
6.6	$y=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\cdot\frac{x}{x^2+1}}$	6.16	$y=\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-3)^2}{\sqrt{x+5}}}$
6.7	$y=\sqrt[5]{\frac{x^2+1}{(x-3)^3}\cdot\frac{(x-2)^3}{(x+1)^4}}$	6.17	$y=\frac{(x-1)^2(x-2)^3\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$
6.8	$y=\frac{\sqrt[3]{(x-7)^4}}{x(x+1)^2(x+2)^3}$	6.18	$y=\frac{(x-3)^7\cdot\sqrt{3x+1}}{x\cdot(x+1)^9}$
6.9	$y=\frac{(x-2)^4}{(x+3)^2}\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}}$	6.19	$y=\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\frac{(x+2)^2}{x}$
6.10	$y=\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x+2}\cdot\frac{(x-1)^4}{(x+1)^2}}$	6.20	$y=\sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}}$

7 Найти производную показательно-степенной функции, используя метод логарифмического дифференцирования.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
7.1	$y=(\sin x)^{\cos x}$	7.11	$y=(\cos x)^{\sin x}$
7.2	$y=x^{x^2}$	7.12	$y=(\ln x)^x$
7.3	$y=x^{\ln x}$	7.13	$y=x^{3/\ln x}$
7.4	$y=x^{2^x}$	7.14	$y=(ctg3x)^{2e^x}$
7.5	$y=(x^2+1)^{\cos x}$	7.15	$y=(\ln x)^{3x}$
7.6	$y=(\sin x)^{e^x}$	7.16	$y=(x^2-1)^{shx}$
7.7	$y=(x^3+4)^{tgx}$	7.17	$y=(\cos 5x)e^x$
7.8	$y=(tgx)^{4e^x}$	7.18	$y=x^{\sin x^3}$
7.9	$y=(\arcsin)\, e^x$	7.19	$y=x^{\arcsin x}$
7.10	$y=(\ln x)^x$	7.20	$y=(2x)^{\sqrt{x}}$

8 Показать, что для данной функции $f(x)$ в окрестности точки y_0 существует $(f^{-1}(y))'$. Найти производную функции, обратной к функции $y=f(x)$, в указанной точке y_0.

№	y_0	$f(x)$	№	y_0	$f(x)$
8.1	6/5	$y = x + \frac{1}{5}x^5$	8.11	5	$y = x^2 + \frac{4}{x^2}, x > 0$
8.2	1	$y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$	8.12	-12	$y = \frac{1}{3}x^3 + x$
8.3	$-1/2$	$y = 2x - \frac{\cos x}{2}$	8.13	$5\sqrt{2}$	$y = x^3 + 3x$
8.4	0	$y = 2x^2 - x^4, x > 1$	8.14	π	$y = x - \frac{1}{2}\sin x$
8.5	3/4	$y = 2x^2 - x^4, 0 < x < 1$	8.15	2,5	$y = x^2 + \frac{1}{x^2}, x > 1$
8.6	1	$y = x + \ln x$	8.16	3	$y = 2x + x^5$
8.7	1	$y = 2x + e^x$	8.17	0	$y = x + 2arctgx$
8.8	4/5	$y = \frac{x^2}{1+x^2}, x > 0$	8.18	0	$y = x + \frac{1}{2}\sin 2x$
8.9	-3	$y = x^3 + 2x$	8.19	3	$y = x^2 + \frac{2}{x^2}, x < -1$
8.10	30	$y = (2x-5)^5 - 2$	8.20	0	$y = x + \arcsin x^3$

9 Вычислить производную y'_x функции, заданной параметрически, при $t \in (a;b)$.

№	$x(t),\ y(t)$	$(a;b)$
9.1	$x = ctg(2e^t),\ y = \ln tge^t$	$(-\infty;0)$
9.2	$x = \arcsin(\sin t),\ y = \arccos(\cos t)$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
9.3	$x = (t-1)^2 \cdot (t-2),\ y = (t-1)^2 \cdot (t-3)$	$(1;\frac{5}{3})$
9.4	$x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\ y = e^{2t} \cdot \sin^2 t$	$(0;+\infty)$

9.5	$x=e^{2t}\cdot\cos^2 t,\ y=tg\sqrt{1+t}$	$(0;\frac{\pi}{2})$
9.6	$x=\sqrt{1-t^2},\ y=a\sin^3 t$	$(0;1)$
9.7	$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$	$(0;\pi)$
9.8	$x=\ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}},\ y=\sqrt{1-t^2}$	$(-1;1)$
9.9	$x=\ln(ctgt),\ y=1/\cos^2 t$	$(0;\frac{\pi}{2})$
9.10	$x=\arcsin\sqrt{1-t^2},\ y=(\arccos t)^2$	$(0;1)$
9.11	$x=\sqrt{2t-t^2},\ y=\arcsin(t-1)$	$(0;1)$
9.12	$x=(1+\cos^2 t)^2,\ y=\cos t/\sin^2 t$	$(0;\frac{\pi}{2})$
9.13	$x=\sqrt{2t-t^2},\ y=1\big/\sqrt[3]{(t-1)^2}$	$(0;1)$
9.14	$x=\ln tgt,\ y=1\big/\sin^2 t$	$(0;\frac{\pi}{2})$
9.15	$x=(\arcsin t)^2,\ y=t\big/\sqrt{1-t^2}$	$(0;1)$
9.16	$x=(1+\ln t)\big/t^2,\ y=(3+2\ln t)/t$	$(2;+\infty)$
9.17	$x=arctge^{t/2},\ y=\sqrt{e^t+1}$	$(-\infty;+\infty)$
9.18	$x=\arccos\frac{1}{t},\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\frac{1}{t}$	$(1;+\infty)$
9.19	$x=2tgt,\ y=2\sin^2 t+\sin 2t$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
9.20	$x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$(-\infty;+\infty)$

10 Вычислить $y'(x_0)$ для функции $y(x)$, удовлетворяющий данному уравнению $F(x,y)=0$.

№	$F(x,y)=0$	№	$F(x,y)=0$
10.1	$x^3+y^3-\frac{9}{2}xy=0, x_0=1, y>0$	10.11	$xy+\ln y=1, x_0=0$
10.2	$x^2+y^2=4e^x, x_0=0, y>0$	10.12	$x^4+y^4-2xy=0, x_0=1, y>0$
10.3	$x^2-5y^2+4xy-1=0, x_0=1, y>0$	10.13	$xarctgy=ye^x, x_0=0$
10.4	$x^2+xy+y^2=3, x_0=0, y<0$	10.14	$(1-x)y=x^3e^y, x_0=0$
10.5	$ye^y-xe^x=y(x-1), x_0=0$	10.15	$x^2+2y^2+4x-4y=0, x_0=0, y>1$
10.6	$e^y+xy=e, x_0=0$	10.16	$x^2+y^2-2x+6y=0, x_0=0, y>-3$
10.7	$e^{xy}+x^2+y^3=2, x_0=1$	10.17	$y^4-4x^4-6xy=0, x_0=1, y>0$
10.8	$y^5+y^3+y-x=0, x_0=3$	10.18	$xe^y+ye^x=1, x_0=0$
10.9	$y+e^y+\sin(x^2y)=1, x_0=0$	10.19	$x^2\sin y+y=\pi, x_0=0$
10.10	$x^2+y^2-6x+10y-11=0, x_0=0, y>0$	10.20	$3x^4-y^5+2xy=0, x_0=-1$

Решение типовых примеров

1.20 Вычислить производные данных функций

а) $y=\frac{6}{x^4}-\sqrt{x^5}$; в) $y=arcctg(3-2x)$;

б) $y=(2x^3+3x-1)e^{2+x}$; г) $y=tg8+\sin\frac{x}{4}$.

Решение

а) Так как $y=\dfrac{6}{x^4}-\sqrt{x^5}=6x^{-4}-x^{5/2}$, то

$$y'=6\cdot(-4)x^{-4-1}-\frac{5}{2}x^{5/2-1}=-24x^{-5}-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}};$$

б) $y=(2x^3+3x-1)e^{2+x}$. Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$y'=(2x^3+3x-1)'\cdot e^{2+x}+(2x^3+3x-1)\cdot(e^{2+x})'=$$

$$=(6x+3)\cdot e^{2+x}+(2x^3+3x-1)\cdot e^{2+x}=e^{2+x}\cdot(2x^3+9x+2);$$

в) $y=arcctg(3-2x)$.

$$y'=-\frac{1}{1+(3-2x)^2}\cdot(3-2x)'=-\frac{1}{1+9-12x+4x^2}\cdot(-2)=$$

$$=\frac{2}{10-12x+4x^2}=\frac{1}{5-6x+2x^2};$$

г) $y=tg8+\sin\dfrac{x}{4}$. Воспользуемся формулой производной сложной функции.

Так как $tg8$ — постоянная, то $(tg8)'=0$. Тогда

$$y'=\left(\sin\frac{x}{4}\right)'=\cos\frac{x}{4}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}.$$

2.20 Пользуясь правилами дифференцирования, вычислить производную данной функции

$$y=\frac{x\sin x+\cos x}{x}$$

Решение Воспользуемся формулой производной частного:

$$y'=\frac{(x\sin x+\cos x)'\cdot x-(x\sin x+\cos x)\cdot x'}{x^2}=$$

$$=\frac{(\sin x+x\cos x+\cos x)\cdot x-x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{\cos x\,(x^2+x-1)}{x^2}.$$

3.20 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, вычислить производную функции

$$y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Решение

$$y'=\frac{1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-1/x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=$$

$$=\frac{-1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{1-1/x}}\cdot\left(x^{-1/2}\right)'=\frac{-1}{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\cdot\frac{-1}{2x^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{2x\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x-1}}.$$

4.20 Найти производную

$$y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})+\arcsin e^{-5x}$$

Решение

Воспользуемся правилом дифференцирования. Получим

$$y'=\frac{1}{e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}}\cdot\left(5e^{5x}+\frac{10e^{10x}}{2\sqrt{e^{10x}-1}}\right)+\frac{-5e^{-5x}}{\sqrt{1-e^{-10x}}}=$$

$$=\frac{5e^{5x}}{e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}}\cdot\left(1+\frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{10x}-1}}\right)-\frac{5}{e^{5x}\cdot\sqrt{1-e^{-10x}}}=$$

$$=\frac{5e^{5x}}{\sqrt{e^{10x}-1}}-\frac{5}{\sqrt{e^{10x}-1}}=\frac{5(e^{5x}-1)}{\sqrt{e^{10x}-1}}.$$

5.20 Найти производную. Записать дифференциал $df(x)$

$$y=arctg\,\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Решение Так как

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)-\sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}}}{1-2\sqrt{x}+x+1-x}=$$

$$=\frac{-\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}+1-x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}\cdot 2\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{-\sqrt{x}+x+1-x}{4\sqrt{x-x^2}\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{x-x^2}},$$

то дифференциал $dy=\dfrac{1}{4\sqrt{x-x^2}}dx$.

6.20 Используя метод логарифмического дифференцирования, найти производную

$$y=\sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}}$$

Решение Заметим, что

$$\ln y=\frac{4}{5}\ln(x+1)-\frac{1}{5}\ln(2x+3)+\ln(x^2+x+1)-7\ln(x-3).$$

Продифференцируем обе части равенства по x, учитывая, что $y=y(x)$. Получим

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{4}{5(x+1)}-\frac{2}{5(2x+3)}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{x-3}.$$

Теперь

$$y'=y\left(\frac{4}{5(x+1)}-\frac{2}{5(2x+3)}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{x-3}\right).$$

7.20 Найти производную показательно-степенной функции, используя метод логарифмического дифференцирования

$$y=(2x)^{\sqrt{x}}$$

Решение

I способ $\qquad \ln y=\sqrt{x}\cdot\ln(2x)=\sqrt{x}(\ln 2+\ln x),$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sqrt{x})'(\ln 2+\ln x)+\sqrt{x}\cdot(\ln 2+\ln x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(2x)+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln(2x)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}.$$

Теперь $y'=y\cdot\dfrac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}=(2x)^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}$.

II способ Воспользуемся основным логарифмическим тождеством.

Тогда $y=e^{\ln(2x)^{\sqrt{x}}}=e^{\sqrt{x}\ln(2x)}$. Теперь

$$y'=e^{\sqrt{x}\ln(2x)}\cdot(\sqrt{x}\ln(2x))'=(2x)^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(2x)+\sqrt{x}\cdot\frac{2}{2x}\right)=(2x)^{\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\ln(2x)}{2\sqrt{x}}.$$

9.20 Вычислить производную y'_x функции, заданной параметрически, при $t\in(a;b)$.

$$x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ t\in(-\infty;+\infty)$$

Решение Так как

$$x'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$y'(t)=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\cdot\frac{-\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\cdot\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

то $y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\operatorname{sgn} t.$

10.20 Вычислить $y'(x_0)$ для функции $y(x)$, удовлетворяющий уравнению $3x^4-y^5+2xy=0,$ если $x_0=-1.$

Решение Продифференцируем обе части данного равенства, учитывая, что y есть функция от x:

$$12x^3-5y^4y'+2(y+x\cdot y')=0.$$

Выразим из этого равенства y':

$$y'(2x-5y^4)=-12x^3-2y,$$

$$y'=\frac{12x^3+2y}{5y^4-2x}.$$

Для нахождения y_0, подставим в данное уравнение $x=x_0=-1$:

$$3-y^5-2y=0.$$

Так как слева – монотонная функция, то уравнение может иметь не более одного решения. Очевидно, это $y_0=1$.

Тогда $y'(-1)=\frac{-12+2}{5+2}=-\frac{10}{7}.$