Практическое занятие 8 **Вычеты**

8.1 Определение вычета

Пусть z_0 изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$, и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz.$$

Вычет функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

8.2 Вычисление вычетов

Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ можно найти либо непосредственно по определению

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz, \tag{8.1}$$

либо используя разложение в ряд Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \tag{8.2}$$

Рассмотрим вычисление вычетов в различных особых точках.

Вычисление вычетов функции относительно устранимой особой точки. Пусть z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть. Поэтому $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Вычисление вычетов функции относительно полюса. Пусть точка z_0 является <u>*простым полюсом*</u> функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\cdot f(z)\right]. \tag{8.3}$$

Если функция $f(z)$ есть частное двух аналитических в точке z_0 функций $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z_0)\neq 0$, $h(z)$ имеет простой нуль в точке z_0, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$, то точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} == \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{8.4}$$

Пусть точка z_0 является <u>*полюсом порядка* m</u> функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}}. \tag{8.5}$$

Вычисление вычетов функции относительно существенно особой точки. Пусть точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда для вычисления вычета функции $f(z)$ в этой точке непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Вычет функции $f(z)$ относительно *бесконечно удаленной точки* $z=\infty$ находится с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки. Поэтому вычет функции $f(z)$ относительно $z=\infty$ равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}\,. \tag{8.6}$$

Вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки может оказаться отличным от нуля.

Теорема 1 Если $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке расширенной плоскости □ , за исключением конечного числа изолированных особых точек, то

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0\,. \tag{8.7}$$

8.3 Логарифмический вычет

Логарифмической производной функции $f(z)$ называется функция

$$\left(\ln f(z)\right)' = \frac{f'(z)}{f(z)}\,. \tag{8.8}$$

Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется вычет в этой точке логарифмической производной $\left(\ln f(z)\right)'$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)'$.

Очевидно, что

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)' = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}\,. \tag{8.9}$$

Теорема 2 В нулях и полюсах функции $f(z)$, аналитической в области D, логарифмическая производная $\left(\ln f(z)\right)'$ имеет полюсы первого порядка. При этом в нуле функции $f(z)$ логарифмический вычет равен порядку нуля функции $f(z)$, а в полюсе равен порядку полюса функции $f(z)$, взятому со знаком минус.

Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в области D, Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области D и не проходящий через полюсы и нули функции $f(z)$. *Логарифмическим вычетом* относительно *контура* Γ называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\,.$$

Теорема 3 Если N_Γ – сумма кратностей нулей функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, P_Γ – сумма кратностей полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\Gamma - P_\Gamma\,. \tag{8.10}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется вычетом функции?
2 Как вычисляется вычет относительно:
а) устранимой точки;
б) простого полюса;
в) полюса порядка m ;
г) существенно особой точки;
д) бесконечно удаленной точки?
3 Что называется логарифмическим вычетом?
4 Как для мероморфной функции вычисляется логарифмический вычет по контуру?

Решение типовых примеров

1 Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z-4}{z^3 - z}$.

Решение. Изолированными особыми точками данной функции являются $z_1 = 0$ – полюс 2-го порядка и $z_2 = 1$ – простой полюс.

Для точки $z_2 = 1$ по формуле (8.4) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z-4}{z^3 - z} = \left.\frac{z-4}{\left(z^3 - z\right)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z-4}{3z^2 - 1}\right|_{z=1} = \frac{1-4}{3 \cdot 1 - 1} = -\frac{3}{2}.$$

Для точки $z_1 = 0$ по формуле (8.5) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z-4}{z^3 - z} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{z^2 \cdot (z-4)}{z^3 - z} \right)'' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{z-4}{z-1} \right)'' =$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{3}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z \to 0} \frac{-6}{(z-1)^3} = 6.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ находится по теореме 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(-\frac{3}{2} + 6 \right) = 4{,}5.$$

2 Вычислить вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Точка $z = 0$ является для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot z^n} + \cdots.$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = c_{-1} = 1$.

3 Найти сумму вычетов относительно всех полюсов функции

$$f(z) = \frac{z^6}{\left(z^2 + 4\right)^2 \left(z^2 + 1\right)^3}$$

Решение. Полюсами данной функции являются точки: $z_{1,2} = \pm 2i$ – полюса 2-го порядка, $z_{3,4} = \pm i$ – полюса 3-го порядка.

Для решения этого примера удобнее воспользоваться теоремой 1. Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\frac{1}{z}$.

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^6}{\left(z^2 + 4\right)^2 \left(z^2 + 1\right)^3} = -1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{z^6}{\left(z^2 + 4\right)^2 \left(z^2 + 1\right)^3} = 1.$$

4 Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

Решение. Изолированные особые точки функции $f(z)$ есть $z_1 = 0$; $z_2 = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z \to 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi},$$

то точка $z = 0$ – устранимая особая точка и поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\infty,$$

то точка $z=\frac{\pi}{4}$ – полюс.

Преобразуем функцию $f(z)$ к виду:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sin z^2}{z^2}}{z-\frac{\pi}{4}}=\frac{\varphi(z)}{z-\frac{\pi}{4}},$$

где $\varphi(z)=\frac{\sin z^2}{z^2}$ – аналитическая в точке $z=\frac{\pi}{4}$, при этом $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$. Значит, $z=\frac{\pi}{4}$ – простой полюс.

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ находится по теореме 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\left(0+\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}\right)=-\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

5 Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}$.

Решение. Изолированные особые точки функции есть $z=-3$ и $z=0$.

Точка $z=-3$ – простой полюс, по формуле (8.3) получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} f(z)=\lim_{z\to-3}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}\right)(z+3)=\lim_{z\to-3}\cos\frac{1}{z}=\cos\frac{1}{3}.$$

Точка $z=0$ – существенно особая точка функции. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$. Поскольку

$$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots,$$

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\ldots\right),$$

то

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3z}\left(\frac{1}{2!\cdot 3}-\frac{1}{4!\cdot 3^3}+\frac{1}{6!\cdot 3^5}-\ldots\right)+\frac{1}{z^2}c_{-2}+\ldots+.$$

Таким образом по формуле (8.2) находим

$$c_{-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot 2!}-\frac{1}{3^3\cdot 4!}+\frac{1}{3^5\cdot 6!}-\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

Значит,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

6 Найти вычеты функции в особых точках

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Решение. Особая точка функции $z=1$ есть полюс 2-го порядка. По формуле (8.5) находим

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}(z-1)^2\right)=\lim_{z\to1}\left(z^2\right)'=\lim_{z\to1}2z=2.$$

7 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функции $f(z)=\frac{\sin z}{z+1}$.

Решение. Точки вида $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, являются простыми нулями функции. Поэтому по теореме 2 логарифмический вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z_k=\pi k}\left(\ln f(z)\right)'=1.$$

Точка $z=-1$ есть простой полюс данной функции. По теореме 2 получим

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\ln f(z)\right)'=-1.$$

8 Найти логарифмический вычет функции $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ относительно окружности $|z|=\pi$.

Решение. В круге $|z|<\pi$ данная функция имеет два простых нуля $z=i$ и $z=-i$, а также семь полюсов 2-го порядка

$$z_k=k,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3.$$

По теореме 3 логарифмический вычет относительно окружности $|z|=\pi$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2-7\cdot2=-12.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти в особых точках вычеты функций

а) $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$;

б) $f(z)=\dfrac{tgz}{z^2-\dfrac{\pi}{4}z}$;

в) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

г) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

д) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$;

ж) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z+1}$;

и) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$;

к) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z+1)^2}$;

л) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$;

м) $f(z)=\dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$;

н) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$;

о) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$;

п) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$;

р) $f(z)=\cos z\sin\dfrac{1}{z}$;

с) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\dfrac{\pi}{2}z^2}$;

т) $f(z)=\cos\dfrac{2}{z-\pi}$;

у) $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$; б) $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{(1-\operatorname{ch} z)\operatorname{sh} z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\cos^3 z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\dfrac{z}{1+z^3}$. $|z|=2$; б) $f(z)=\operatorname{th} z$, $|z|=8$.

Задания для домашней работы

1 Найти вычеты функций:

а) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

л) $f(z)=\dfrac{e^z}{\dfrac{1}{4}-\sin^2 z}$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$; м) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\dfrac{i}{2}\right)^2}$; н) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$;

г) $f(z)=e^{\frac{z^2+1}{z}}$; о) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}+z^3$;

д) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$; п) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\sin\dfrac{1}{z-1}$;

е) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$; р) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;

ж) $f(z)=\sin z\cos\dfrac{1}{z}$; с) $f(z)=e^z\sin\dfrac{1}{z}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)(z-3)^2}$; т) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z+2}$;

к) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)}$; у) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}+z^3$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$; б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{z^2}{\operatorname{ch} z-1-\dfrac{z^2}{2}}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций:

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$; б) $f(z)=\sin z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\cos z+\sin z$. $|z|=4$; б) $f(z)=\left(e^z-2\right)^2$, $|z|=8$.

Практическое занятие 9 **Приложения вычетов**

9.1 Вычисление интегралов
9.2 Суммирование рядов

9.1 Вычисление интегралов

Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Для вычисления интегралов комплексной переменной по замкнутому контуру используется основная теорема о вычетах.

Теорема 1 (основная теорема о вычетах) Если функция $f(z)$ является аналитической на границе Γ области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k). \qquad (9.1)$$

Вычисление интегралов от рациональных функций. Пусть $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n\ge m+2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sigma, \qquad (9.2)$$

где σ – сумма вычетов функции $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости $\{\, z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z\ge 0 \,\}$.

Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)\,dx$. Рассмотрим интеграл $\int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)\,dx$, где $R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования. С помощью замены

$$e^{ix} = z\,,\ dx = \frac{dz}{iz}\,,\ \cos x = \frac{z^2+1}{2z}\,,\ \sin x = \frac{z^2-1}{2i\,z}$$

данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции $F(z)$ комплексной переменной z по окружности $|z|=1$. К интегралу $\oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$ применима основная теорема о вычетах. Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = 2\pi\, i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} F(z). \qquad (9.3)$$

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Вычисление этих интегралов основано на следующей теореме.

Теорема 2 Пусть функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \ge 0$. Функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \ge 0 \,\}$ за исключением конечного числа изолированных точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. И пусть существуют такие положительные числа M, R_0, δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0$, имеет место оценка $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и вычисляется по формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),\ \operatorname{Im} z_k > 0\,. \qquad (9.4)$$

Интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$. Интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $\lambda > 0$ любое действительное число вычисляются с использованием леммы Жордана.

Лемма Жордана Пусть $g(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \ge 0 \,\}$, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где контур C_R – полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом R (рисунок 9. 1).

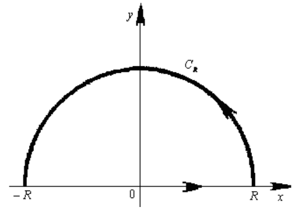

Рисунок 9. 1 – Рисунок к лемме Жордана

9.2 Суммирование рядов

Вычисление некоторых рядов с помощью теории вычетов основано на следующих теоремах.

Теорема 3 Пусть:

1) $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, …, z_n (отличных от целых чисел), *2) функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$. Тогда справедлива формула:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right]. \qquad (9.5)$$

Теорема 4 Пусть:

1) $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, ..., z_n (отличных от целых чисел),

2) функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$f(z)\le e^{a|\operatorname{Im} z|}\,\varepsilon(|z|)$ *при* $z\to\infty$, $z\in G_\rho$, $0\le a<\pi$,

$G_\rho = \mathrm{C}\setminus\{z|\ \ |z-z_1|\le\rho, |z-z_2|\le\rho, \ldots, |z-z_n|\le\rho\}$.

Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}. \qquad (9.6)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются интегралы по замкнутому контуру?

2 Как вычисляются несобственные интегралы?

3 Как вычисляются интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$?

4 В чем суть леммы Жордана? Для каких интегралов она используется?

5 В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\oint\limits_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}$, где $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}: |z-1-i|=2\}$.

Решение. В круге $|z-1-i|<2$ данная функция имеет полюс 3-го порядка в точке $z_1=1$, простые полюса порядка в точках $z_{2,3}=\pm i$. Точка $z=-i$ не принадлежит кругу $|z-1-i|<2$. Согласно теореме 1 получим:

$$\oint\limits_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}=2\pi i\cdot\left[\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}+\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right)'+\frac{1}{(i-1)^3(i+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(z^2+1)^2-2z\cdot2\cdot(z^2+1)\cdot2z}{(z^2+1)^4}+\frac{1}{2i\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(z^2+1)(z^2+1-4z^4-4z^2)}{(z^2+1)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(1-4z^4-z^2)}{(z^2+1)^4}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4}-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3}\right]=-\frac{\pi}{2}(1+i).$$

2 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z-1}{z^2+2z-3}dz$, где

$$\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{1}{2}\right|=1\right\}.$$

Решение. Контур Γ интегрирования есть окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $z=\frac{1}{2}$.

Найдем особые точки функции: $z^2+2z-3=0$, $z_1=1$, $z_2=-3$. Точка $z_2=-3$ лежит вне области, ограниченной контуром Γ, а $z_1=1$ находится внутри области. Определим характер точки $z_1=1$:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{(z-1)(z+3)}=\frac{\frac{e^z-1}{z+3}}{z-1}=\frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где $\varphi(z)=\frac{e^z-1}{z+3}$ – аналитическая функция, $\varphi(1)=\frac{e-1}{4}\neq 0$.

Значит, точка $z=1$ – простой полюс.

Тогда вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\lim_{z\to 1}f(z)(z-1)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z-1}{(z-1)(z+3)}(z-1)=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{e^z-1}{z+3}=\frac{e-1}{4}.$$

По теореме 1 имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z-1}{z^2+2z-3}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=2\pi i\frac{e-1}{4}=\pi i\frac{e-1}{2}.$$

3 Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+9)^2}$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)^2}$, которая на действительной оси (при $z=x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс 2-го порядка в точке $z=3i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{z^2}{(z^2+9)^2}=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+3i)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+3i)^3}=\frac{1}{12i}.$$

Тогда с учетом (9.2) получим:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{12i}=\frac{\pi}{12}.$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty<x<+\infty$. Аналитическое продолжение этой функции в верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im}z\geq 0$) есть функция $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$, являющаяся аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z=i$ (полюса 3-го порядка). На действительной оси полюсов нет. При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0 > 1$ имеет место оценка:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| < \frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 2:

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{1}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

5 Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$.

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}.$$

Видно, если $z = x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x) = \dfrac{x\sin 2x}{x^2+9}$.

Рассмотрим контур C_R (рисунок 9. 1) При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| \le \dfrac{R}{R^2+9}$. Следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$.

Значит, по лемме Жордана $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}dz = 0$.

Так как точка $z = 3i$ является простым полюсом, то вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9} = \lim_{z\to 3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) = \frac{1}{2}e^{-6}.$$

Для любого $R > 3$ по теореме 1 имеем

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx + \int_{C_R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-6} = \pi ie^{-6}.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx = \pi ie^{-6}.$$

Отделяя слева и справа действительные и мнимые части, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx = \pi e^{-6}.$$

6 Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Имеем:

$$z = e^{ix};\ dx = \frac{dz}{iz}:\ \cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Тогда

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Найдем особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+1}$:

$$z^2+4z+1 = 0;$$

$$z_1 = -2+\sqrt{3};\ z_2 = -2-\sqrt{3}$$

Точка z_1 лежит в круге $|z| < 1$, а точка z_2 – вне круга. Тогда по формуле (9.3) получим:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{i}2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}}\frac{1}{z^2+4z+1}=$$

$$=4\pi\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\frac{\left(z-\sqrt{3}+2\right)}{\left(z-\sqrt{3}+2\right)\left(z+\sqrt{3}+2\right)}=$$

$$=4\pi\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\frac{1}{z+\sqrt{3}+2}=\frac{4\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

7 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbb{C}$, кроме точек $z_1=-2i$ и $z_2=2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)},$$

то $\frac{1}{z^2+4}=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$.

Применяя теорему 3, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=-\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right]=$$

$$=-\pi\left[\lim_{z\to-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}+\lim_{z\to 2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right]=-\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot 2}+\frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot 2}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}2\pi.$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\ldots+\frac{1}{(-2)^2+4}+\frac{1}{(-1)^2+4}+\frac{1}{0^2+4}+\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2^2+4}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}-\frac{1}{8}.$$

Искомая сумма данного ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{\pi}{4}\operatorname{cth}2\pi-\frac{1}{8}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$;

б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$;

в) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

е) $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$;

л) $\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

м) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos zdz}{z^2-4}$;

н) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$;

о) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$;

п) $\oint\limits_{|z|=1}z\operatorname{tg}\pi zdz$;

р) $\oint\limits_{|z+1|=4}\frac{zdz}{e^z+3}$;

ж) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

с) $\oint\limits_{|z-i+2|=2} \frac{1-\cos^2 z}{z^2+z-2}dz$;

и) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$;

т) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z\sin z}{z^2+5z-6}dz$;

к) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\sin z dz}{(z-1)^5}$;

у) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z^2}dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$;

л) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\,dx}{2+\sin x}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos x}{2+\sin x}dx$;

м) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin 2x\,dx}{8+\sin x}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

о) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\ dx}{x^2-2x+10}$;

п) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$;

е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xdx}{x^2+9}$;

р) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3\sin 2xdx}{(1+x^2)^2}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-4\cos x+4}$;

с) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$;

и) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+4}{(x^2+2x+10)^2}dx$;

т) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)^2}{(x^2+9)^3}dx$;

к) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$;

у) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+4)^2}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cos\alpha k}{k^2+9}$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2\sin\frac{1}{z}dz$;

л) $\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{z\cos z}{z^2-2z-8}dz$;

б) $\oint\limits_{|z-i+1|=2} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2+3z+2}$;

м) $\oint\limits_{|z-1+i|=4} \frac{\cos z\,dz}{z^2-6z+9}$;

в) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z\sin z}{z^2+5z-6}dz$;

н) $\oint\limits_{|z-1+i|=4} \frac{e^{3z}}{z^2+iz}dz$;

г) $\oint\limits_{|z-i-1|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+4}dz$;

о) $\oint\limits_{|z-i-2|=3} \frac{e^{\frac{1}{(z+3)}}}{z^2-6z+9}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=2} (z+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz$;

п) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{z}+e^{z^2}\sin\frac{1}{z^2}\right)dz$;

е) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$;

р) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$;

ж) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2dz}{\sin^3 z\cos z}$;

с) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1}$, $\Gamma: x^2+y^2=2x$;

и) $\oint\limits_{|z-5-3i|=6} \frac{e^{3z}}{z^2-18z+81}dz$;

т) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-1)^2}dz$;

к) $\oint\limits_{|z-1|=5} \dfrac{e^{z^2}}{z^2+4z+4}dz$; у) $\oint\limits_{|z|=1} z^5 \sin\dfrac{1}{z^3}dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos x\,dx}{4+2\sin x+\cos x}$; л) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos x\,dx}{3-2\sin x+\cos x}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{(1-\sin 2x)dx}{\sin x+\cos x+2}$; м) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin 2x\,dx}{5+2\sin x}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2xdx}{(x^2+8x+25)^2}$; н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x+1}{(x^2+9)^2}dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$; о) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$;

д) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; п) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$;

е) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+9}dx$; р) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin 2x\,dx}{x^2+8x+25}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos 2xdx}{1-6\cos x+9}$; с) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+2\cos x}$;

и) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)^2}$; т) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^4dx}{(x^2+1)^4}$;

к) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^3\sin 2x}{(1+x^2)^2}dx$; у) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k+9)^2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\cos\alpha k}{k^2+4}$.