Тема 1 Функции комплексной переменной

Практическое занятие 1 **Функции комплексной переменной**

1.1 Множества, кривые, области
1.2 Предел последовательности
1.3 Предел и непрерывность функции комплексной переменной
1.4 Основные элементарные функции комплексной переменной

1.1 Множества, кривые, области

Множество точек плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z_0 - z| \le \delta$, называется ε-*окрестностью* точки z_0:

$$U(\delta; z_0) = \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z_0 - z| \le \delta\ \}.$$

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R > 0$, называется R-*окрестностью* бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$U(R; \infty) = \{\ z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| > R > 0\ \}.$$

Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью*. Символы $x \pm i\infty$, $\pm\infty + iy$, $\infty e^{i\varphi}$ задают направления на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Точка z_0 называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если в любой окрестности точки z_0 расположено бесконечно много точек $z \in E$. Предельная точка z_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему.

Точка $z \in E$ называется *внутренней* точкой множества E, если существует такое $\delta > 0$, что окрестность $U(\delta; z)$ состоит только из точек множества E. Множество называется *открытым*, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется *граничной* точкой множества E, если при любом $\delta > 0$ окрестность $U(\ \delta, z_0)$ содержит точки $z \in E$ и точки $z \notin E$. Граничная точка множества E может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему. Совокупность всех граничных точек множества

называется *границей* множества. Множество E, содержащее свою границу, называется *замкнутым* и обозначается $\overline{E}$.

Пусть $t \in T \subset \mathbb{R}$. Если каждому значению $t \in T$ поставлено в соответствие $z \in \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве T задана комплекснозначная функция действительной переменной t: $z = z(t)$. Полагая $z(t) = x(t) + iy(t)$, можно считать, что задание функции $z(t)$ равносильно заданию на множестве T двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ переменной t. Очевидно, если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные функции, то и функция $z(t)$ является непрерывной. Графиком функции $z(t)$ является кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Точкой *самопересечения* кривой $z(t)$ называется точка z, для которой при $t_1 \ne t_2$ имеет место соотношение $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривой Жордана называется непрерывная кривая $z(t)$, $t \in T$, не имеющая точек самопересечения. *Замкнутой кривой* называется кривая Жордана, у которой конец совпадает с началом (совпадение начала и конца замкнутой кривой не считается точкой самопересечения). Кривая Жордана $z(t)$ называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно-дифференцируемы и $x_t'^2 + y_t'^2 \ne 0$ на множестве T. Кривая Жордана называется *кусочно-гладкой,* если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Множество E называется *связным* множеством, если две любые его точки можно соединить кривой Жордана, целиком лежащей в E. Связное открытое множество E называется *областью*.

Рисунок 1. 1 – Односвязная (а) и многосвязная (б) области

Область, ограниченная замкнутым контуром γ, обозначается D_γ. Область D называется *односвязной*, если любой замкнутый контур γ целиком лежащий в D, ограничивает область $D_\gamma \subset D$

(рисунок 1. 1, а). В противном случае область называется *многосвязной* (рисунок 1. 1, б).

Для многосвязной области D найдутся контуры γ_1, γ_2, …, γ_n, такие, что точки из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n} не входят в D. С помощью дополнительных разрезов l_1, l_2, ..., l_n многосвязная область преобразуется в односвязную (рисунок 1. 2), так как в области с разрезами любой замкнутый контур γ не будет содержать внутри себя точек из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n}.

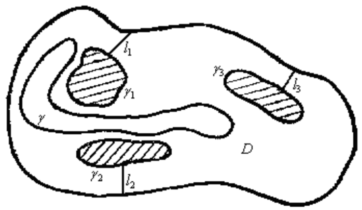

Рисунок 1. 2 – Многосвязная область D и ее разрезы l_1, l_2, l_3

Положительным направлением обхода границы области D считается то направление, при котором область D остается слева.

1.2 Предел последовательности

Пусть дана последовательность комплексных чисел

$$\left(z_n\right),\ n = 1, 2, \dots .$$

Число a, $a \in \mathbb{C}$ называется *пределом* числовой последовательности $\left(z_n\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\left|z_n - a\right| < \varepsilon$:

$$a = \lim_{n\to\infty} z_n \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad \left|z_n - a\right| < \varepsilon .$$

Комплексное число $a = \infty$ называется *пределом* последовательности $\left(z_n\right)$, если $\forall\, R > 0$ найдется такой номер $N(R)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|z_n\right| > R$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \forall\, R > 0\ \exists\, N(R) : \forall n \ge N(R) \quad \left|z_n\right| > R .$$

Теорема 1 Для того чтобы существовал конечный предел $a = \alpha + i\beta$ последовательности $\left(z_n\right)$, $z_n = x_n + iy_n$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы последовательностей действительных чисел $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ и $a = r\,e^{i\varphi}$ показательные формы для $z_n = x_n + iy_n$ и $a = \alpha + i\beta$ соответственно.

Теорема 2 Для того чтобы существовал конечный предел $r\,e^{i\varphi}$, $r \ne 0$, последовательности $\left(r_n e^{i\varphi_n}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, а при соответствующем выборе области главных значений аргументов φ_n и φ существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Последовательность $\left(z_n\right)$ называется *ограниченной*, если существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $\left|z_n\right| \le M$.

Сходящиеся последовательности комплексных чисел обладают *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– сходящаяся последовательность ограничена;

– если последовательность $\left(z_n\right)$ сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \ \Rightarrow\ \exists M \in \mathbf{R} : \left|z_n\right| \le M ;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n + w_n\right) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n ;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n \cdot w_n\right) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n ;$$

– частное двух сходящихся последовательностей $\left(z_n\right)$ и

(w_n), $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n};$$

Теорема 3 (критерий Коши) Для того чтобы последовательность (z_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n>N(\varepsilon)$ и $p=1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$\left|z_{n+p}-z_n\right|<\varepsilon .$$

1.3 Предел и непрерывность функции комплексной переменной

Если каждому комплексному числу $z\in E$ $(z=x+iy)$ по правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w\in G$, $(w=u+iv)$, то говорят, что на множестве E задана *функция комплексной переменной* $w=f(z)$, переменная z называется *независимой переменной*, а w *– значением функции*.

Если каждому $z\in E$ соответствует одно значение $w\in G$, то функция $w=f(z)$ называется *однозначной*; в противном случае – *многозначной.* При этом множество E называется *областью* определения, а совокупность всех значений w, которые функция принимает на E, называется *множеством значений*.

Геометрически функция $w=f(z)$ представляет собой отображение области E плоскости $\mathbb{C}$ (Oxy) на некоторую область G плоскости $\mathbf{W}$ $(O^{*}uv)$ (рисунок 1. 3)

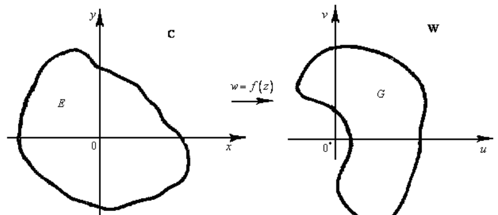

Рисунок 1. 3 – Геометрическая интерпретация функции $w=f(z)$

Обратное отображение множества G на множество E определяет *обратную* функцию $z=\varphi(w)$.

Если функция $w_1=f(z)$ отображает область E на область E_1, а функция $w=g(w_1)$ отображает область E_1 на область G, то *сложная* функция $w=g\big(f(z)\big)$ осуществляет отображение области E на G.

Функция $f(z)$ называется *однолистной* на множестве E, если она однозначна и в различных точках $z_1\neq z_2$ множества E принимает различные значения $f(z_1)\neq f(z_2)$.

Пусть $z=x+iy$ и $w=u+iv$. Тогда функция $f(z)$ может быть записана в виде:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

где $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ – действительная часть, $v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$ – мнимая часть.

Модуль функции $f(z)$ находится по формуле:

$$\left|f(z)\right|=\sqrt{u^2(x;y)+v^2(x;y)} .$$

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0\in\mathbb{C}$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Комплексное число A $(A\neq\infty)$ называется *пределом* функции $f(z)$ при $z\to z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$:

$$A=\lim_{z\to z_0}f(z)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall z\ \ 0<|z-z_0|<\delta \qquad |f(z)-A|<\varepsilon .$$

Комплексное число $A=\infty$, называется *пределом* функции $f(z)$ при $z\to z_0$, если для любого $R>0$ найдется такое $\delta(R)>0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)|>R$:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\Leftrightarrow \forall R>0\ \exists\delta(R)>0:\forall z\ \ 0<|z-z_0|<\delta \qquad |f(z)|>R .$$

Функция $\alpha(z)$ называется *бесконечно малой* при $z \to z_0$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Теорема 4 (критерий Коши) Для существования конечного предела A функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек z' и z'', принадлежащих области определения функции $f(z)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |z' - z| < \delta$ и $0 < |z'' - z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Теорема 5 Пусть функция $f(z) = u(x, y,) + iv(x, y)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $A = u_0 + iv_0$. Тогда для того, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$. Тогда имеют место соотношения:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} \text{ при } g(z) \neq 0.$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение конечного числа функций комплексной переменной, непрерывных в области D, является непрерывной функцией в этой области. Частное двух непрерывных

функций $f(z)$ и $g(z)$ в области D является непрерывной функцией в тех точках этой области, где $g(z) \neq 0$.

Если функция $w_1 = f(z)$ непрерывна в точке z_0 и функция $w = g(w_1)$ непрерывна в точке $w_1 = f(z_0)$, то сложная функция $w = g(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек z', $z'' \in D$, расстояние между которыми меньше δ ($|z' - z''| < \delta$), расстояние между соответствующими значениями функции $f(z')$ и $f(z'')$ меньше ε ($|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$).

Очевидно, что всякая равномерно непрерывная функция в области D является непрерывной функцией в этой области. Обратное утверждение верно не всегда: непрерывная функция в области D может и не обладать свойством равномерной непрерывности.

Теорема 6 (Кантора) Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то она равномерно непрерывна в этой области.

1.4 Основные элементарные функции комплексной переменной

Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются элементарными:

а) *дробно-рациональная* функция

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m},$$

$$a_i, b_j \in \square, \ i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, m, \ n, \ m \in \square,$$

частными случаями которой являются:

– *линейная* функция $az + b$;

– *степенная* функция z^n;

– *дробно-линейн*ая функция $\dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$;

– функция *Жуковского* $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$;

б) *показательная* функция e^z, для которой при $z=x+iy$ справедливо представление

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

и формулы Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z, \quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z;$$

в) *тригонометрические* функции:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все тригонометрические тождества для тригонометрических функций комплексного переменного аналогичны тождествам тригонометрических функций действительного переменного;

г) *гиперболические* функции:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Гиперболические и тригонометрические функции связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh} z=-i\cdot\sin iz, && \sin z=-i\operatorname{sh} iz,\\
&\operatorname{ch} z=\cos iz, && \cos z=\operatorname{ch} iz,\\
&\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz, && \operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz,\\
&\operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz, && \operatorname{ctg} z=i\operatorname{cth} iz.
\end{aligned}$$

Для гиперболических функций справедливы тождества, аналогичные тригонометрическим тождествам за исключением

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1;$$

д) *логарифмическая* функция

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z \quad \text{или}$$

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k), \ k\in\mathbb{Z},$$

которая является многозначной.
Значение функции, которое получается при $k=0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z;$$

е) *общая степенная* функция

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\operatorname{Ln} z}, \ \alpha\in\mathbb{C}, \ z\neq 0,$$

которая является многозначной, ее главное значение равно

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\cdot\ln z};$$

ж) *общая показательная* функция

$$a^z=e^{z\cdot\operatorname{Ln} a}, \ a\in\mathbb{C}\setminus\{0\},$$

которая является многозначной, и ее главное значение равно

$$a^z=e^{z\cdot\ln a};$$

и) *обратные тригонометрические* функции $\operatorname{Arc}\sin z$, $\operatorname{Arc}\cos z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные функции к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsinz}=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right), \quad \operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \quad \operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Функции являются многозначными, и их главные значения $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов;

к) *обратные гиперболические* функции $\operatorname{Arcsh} z$, $\operatorname{Arcch} z$, $\operatorname{Arcth} z$, $\operatorname{Arccth} z$ определяются как обратные функции к функциям $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \quad \operatorname{Arcch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad \operatorname{Arccth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Функции являются многозначными и их главные значения $\operatorname{arcsh} z$, $\operatorname{arcch} z$, $\operatorname{arcth} z$, $\operatorname{arccth} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется окрестностью точки z_0?

2 Дайте определение: а) предельной, б) внутренней, в) граничной точки множества $E \subset \mathbb{C}$.

3 Какое множество называется: а) открытым, б) замкнутым?

4 Какая функция называется комплекснозначной?

5 Какая кривая называется кривой Жордана?

6 Дайте определение связного множества.

7 Что называется областью комплексной плоскости?

8 Какая область называется: а) односвязной, б) многосвязной?

9 Какое направление обхода границы области называется положительным?

10 Сформулируйте определение числовой последовательности комплексных чисел.

11 Что называется пределом числовой последовательности комплексных чисел и какими свойствами он обладает?

12 Дайте определение функции комплексной переменной.

13 Какая функция называется: а) однозначной, б) многозначной, в) однолистной?

14 Как определяется действительная и мнимая части функции комплексной переменной?

15 Что называется пределом функции комплексной переменной?

16 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции комплексной переменной.

17 Какая функция комплексной переменной называется непрерывной а) в точке, б) в области?

18 Какая функция называется равномерно-непрерывной?

19 Какие функции комплексной переменной называются элементарными?

Решение типовых примеров

1 Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{n^2 + i\,n - 2i + 4}{i\,n^2 - 5n + 4i}$; б) $z_n = n \operatorname{tg}\dfrac{i}{n}$.

Р е ш е н и е. а) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + i\,n - 2i + 4}{i\,n^2 - 5n + 4i} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1 + + \dfrac{i}{n} + \dfrac{-2i+4}{n^2}\right)}{n^2\left(i - \dfrac{5}{n} + \dfrac{4i}{n^2}\right)} = \frac{1}{i} = -i;$$

б) имеем

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg}\frac{i}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{i}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{i}{n}}{\dfrac{i}{n}}\cdot\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = i.$$

2 Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Р е ш е н и е. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = \sin z = \sin\left(x+iy\right) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$$
$$= \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\left(\sin z\right) = \sin x \operatorname{ch} y,$$
$$\operatorname{Im}\left(\sin z\right) = \operatorname{sh} y \cos x.$$

Тогда модуль функции $w = \sin z$ равен

$$\left|\sin z\right| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y\left(1 - \sin^2 x\right)} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x\left(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y\right) + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

Подставляя $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, получим

$$\left|\sin\left(\pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\right| = \sqrt{\sin^2\pi + \operatorname{sh}^2\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)} =$$

$$= \operatorname{sh}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = 2 .$$

Видно, что тригонометрические функции комплексной переменной могут принимать значения по модулю больше единицы.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Имеем $\operatorname{ch} i = \cos 1$. Тогда значение модуля функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$ равно

$$\left|\operatorname{ch} i\right| = \sqrt{\left(\cos 1\right)^2 + 0^2} = \cos 1 ,$$

а главное значение аргумента –

$$\arg\left(\operatorname{ch} i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{\cos 1}\right) = 0 .$$

4 Найти все значения функции $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{z}$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа z воспользуемся формулой Муавра в показательной форме:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \; k = 0, 1, 2, ..., n-1 .$$

Так как показательная форма комплексного числа $z_0 = i$ равна $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, то $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$, $k = 0, 1$.

Тогда функция в точке $z_0 = i$ принимает два значения:

$$w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\pi}{4}i}, \; w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

5 Вычислить значения функции в точке:

а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\operatorname{Arctg}(1-i)$.

Решение. а) имеем $z_0 = -1$; $|z_0| = 1$; $\arg z_0 = \pi$.

Тогда

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki = i\pi + 2\pi ki = i\pi\left(1+2k\right), \; k \in \mathbb{Z} ;$$

б) по свойствам обратных тригонометрических функций имеем

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(2i-1) .$$

Для числа $2i-1$ модуль и главное значение аргумента есть

$$|2i-1| = \sqrt{5} ,$$

$$\arg(2i-1) = \pi - \operatorname{arctg} 2 .$$

Найдем

$$\operatorname{Ln}(2i-1) = \ln\sqrt{5} + i\left(\pi - \operatorname{arctg} 2\right) + 2k\pi i =$$

$$= \ln\sqrt{5} - i\operatorname{arctg} 2 + \left(2k+1\right)\pi i , \; k \in \mathbb{Z} .$$

Тогда

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{i}{2}\ln\sqrt{5} + \frac{\pi}{2}\left(2k+1\right), \; k \in \mathbb{Z} .$$

6 Найти область однолистности функции $w = z^2$.

Решение. Возьмем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ две различные точки z_1 и z_2, заданные в показательной форме:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \; z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} .$$

Из условия однолистности

$$r_1^2 e^{2i\varphi_1} = r_2^2 e^{2i\varphi_2}$$

находим $r_1 = r_2$, $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, при $k = 0$ получим $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. $z_1 = z_2$.

Так как $z_1 \neq z_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Таким образом, область однолистности функции $w = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π.

7 Вычислить предел $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos^2 z}{\operatorname{ch} iz} = \left[\operatorname{ch} iz = \cos z\right] = \lim_{z \to 0} \frac{\cos^2 z}{\cos z} = \lim_{z \to 0} \cos z = 1 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \frac{i^n}{n}$; б) $z_n = n\sin\frac{i}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \sin z$; д) $w = \operatorname{sh} z$;

б) $w = \frac{\overline{z}}{i} + \frac{i}{\overline{z}}$; е) $w = i\overline{z} + 2z^2$;

в) $w = 2z - 1$; ж) $w = z + z^2$;

г) $w = z^{-1}$; и) $w = e^{-z}$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$; в) $w = \operatorname{th} z$, $z_0 = \pi i$;

б) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$; г) $w = 3^z$, $z_0 = 2 - i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = z + \sqrt[4]{z}$, $z_0 = -1$; б) $w = \frac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z} - i}$, $z_0 = i$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln} e$; д) $\operatorname{Ln}(-1-i)$; к) $\operatorname{Ln}(2+i)$;

б) $\operatorname{Arcsin} i$; е) $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{3}$; л) $\operatorname{th}\pi i$;

в) i^i; ж) 1^i; м) $(1-i)^{3-3i}$;

г) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; и) $\cos\pi i$; н) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^{-z} + 1 = 0$; б) $4\cos z + 5 = 0$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$; б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + \operatorname{sh} iz}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = \overline{z}$.

Задания для домашней работы

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \frac{n + 2i}{3n + 7i}$; б) $z_n = \frac{\operatorname{sh} in}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \operatorname{ch}(z - i)$; г) $w = 2i - z + iz^2$;

б) $w = \operatorname{tg} z$; д) $w = \frac{z + i}{i - \overline{z}}$;

в) $w = z^2 - 1$; е) $w = e^{\overline{z}}$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \sin z$, $z_0 = \pi + i\ln 2$;

б) $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$.

в) $w = 10^z$, $z_0 = i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$, $z_0 = -i$; б) $w = \sqrt{i + \sqrt{z}}$, $z_0 = -1$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln}(-i)$; г) $\operatorname{Ln}(2-i)$; ж) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $i^{\frac{1}{i}}$; д) $(-2+i)^i$; и) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$;

в) $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3}$; е) $\operatorname{Arccos} i$; к) $\operatorname{ctg}\pi i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^z + i = 0$; б) $\sin z = \pi i$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$; б) $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = |z|\operatorname{Re} z$.