Практическое занятие 3 **Дифференцирование сложной и неявной функции**

3.1 Дифференцирование сложной функции
3.2 Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением
3.3 Дифференцирование неявной функции, заданной системой уравнений

3.1 Дифференцирование сложной функции

Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u и v,

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v).$$

Тогда функция $f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ является *сложной* функцией двух независимых переменных u и v. Переменные x и y называются *промежуточными переменными.*

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), то сложная функция $f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ дифференцируема в точке (u,v) и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3.1}$$

Для функции $f(x,y,z)$ трех переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u, v, w:

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

частные производные сложной функции $f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Аналогично для функции n переменных, $n > 3$.

Для функции $f(x,y,z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функции независимой переменной t, сложная функция $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ является функцией одной переменной t. Производная

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{3.2}$$

сложной функции $f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ называется *полной производной.*

3.2 Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением

Рассмотрим уравнение

$$F(x,y,z) = 0.$$

Теорема 2 Пусть функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\exists\ (x_0;y_0;z_0) : F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

2) $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ и $F'_z(x,y,z)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0;z_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) существует единственная непрерывная функция $z = f(x,y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x,y,z) = 0$ и такая, что $f(x_0,y_0) = z_0$.

Если функция $F(x,y,z)$ в условиях теоремы 2 дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Если уравнение поверхности Ω задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то уравнение *касательной* плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+F'_y\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+F'_z\big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0 \tag{3.4}$$

и каноническое уравнение *нормали*:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{3.5}$$

3.3 Дифференцирование неявной функции, заданной системой уравнений

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, …, y_m есть

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1;x_2;\ldots;x_n), \\ y_2=f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m=f_m(x_1;x_2;\ldots;x_n), \end{cases} \tag{3.7}$$

и называется *совокупностью неявных функций*, определяемых системой уравнений (3.6).

Определитель

$$J=\frac{D(F_1;F_2;\ldots;F_m)}{D(y_1;y_2;\ldots;y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \tag{3.8}$$

составленный из частных производных, называется *якобианом (определителем Якоби)* функций F_1, F_2, …, F_m по переменным y_1, y_2, …, y_m.

Теорема 3 Пусть

1) функции F_1, F_2, …, F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0;y_1^0;y_2^0;\ldots;y_m^0)$,

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,\ldots,m$ непрерывны в P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, …, $F_m(P_0)=0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;\ldots;F_m)}{D(y_1;y_2;\ldots;y_m)}\right|_{P_0}\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки система уравнений (3.6) определяет единственную совокупность дифференцируемых неявных функций вида (3.7).

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, …, $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 3, якобиан отличен от нуля).

Пусть функции из системы (3.7) определены и дифференцируемы в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$, $m \le n$. Функция $y_k = f_k\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)$ называется *зависимой* в области G от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ... y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m), \qquad (3.9)$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Если ни одна из функций (3.7) не зависит от остальных, то функции (3.7) называются *независимыми* в G.

Теорема 4 (достаточное условие независимости) Пусть

1) функции (3.7) дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$*;*

2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в этой точке.

Тогда функции (3.7) независимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Следствие Если функции (3.7) зависимы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$*, то все якобианы* $\dfrac{D(y_1; y_2; ...; y_m)}{D\left(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n}\right)}$ *равны нулю в этой окрестности.*

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

2 Какая функция называется неявной? Приведите примеры неявных функций.

3 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x; y; z) = 0$.

4 Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x, y, z) = 0$.

5 Что называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений?

6 Что называется якобианом?

7 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

8 Какие функции называются зависимыми и независимыми?

9 Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

Решение типовых примеров

1 Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(x, y) = x \cdot \ln y$, где $x = 3u - v$; $y = u^2 + v^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3, \ \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \ \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \ \frac{\partial y}{\partial v} = 2v, \ \frac{\partial f}{\partial x} = \ln y, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}.$$

По формулам (3.1) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3\ln y + 2x\frac{x}{y} = 3\ln\left(u^2 + v^2\right) + 2u\frac{3u - v}{u^2 + v^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\ln y + 2v\frac{x}{y} = -\ln\left(u^2 + v^2\right) + 2y\frac{3u - v}{u^2 + v^2}.$$

2 Найти полную производную сложной функции $f(x, y, z) = x\sin y\cos z$, где $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; $z = -\sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y\cos z, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y\cos z, \ \frac{\partial f}{\partial z} = -x\sin y\sin z,$$

$$\frac{dx}{dx} = 1, \ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}, \ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

по формуле (3.2) получим:

$$\frac{df}{dx} = \sin y\cos z + x\cos y\cos z \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - x\sin y\sin z \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \sin\ln\left(x^2 + 1\right)\left(\cos\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2\sin\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + \frac{2x^2\cos\ln\left(x^2 + 1\right)\cos\sqrt{1 - x^2}}{x^2 + 1}.$$

3 Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую условию $f(1)=1$.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Проверим выполнение условий теоремы 2:

– $F(1,1)=0$;

– $F'_y(1,1)=\left(3y^2+2x\right)\big|_{(1;1)}=5\neq 0$;

– частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, являющаяся решением уравнения $y^3+2xy+x^4-4=0$ и удовлетворяющая условию $f(1)=1$.

4 Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Решение. Обозначим через $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$. Имеем:

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\ F'_y=\frac{2y}{b^2}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

5 Найти частные производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $e^{-xy}-2z+e^z=0$.

Решение. Обозначим $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$. Частные производные этой функции равны:

$$F'_x=-ye^{-xy},\ F'_y=-xe^{-xy},\ F'_z=-2+e^z.$$

По формулам (3.3) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

6 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0,1,1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или

$$2y+3z-5=0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-0}{0}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{6}$ или

$$\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7 Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases}u+v-x=0,\\ u-yv=0.\end{cases}\qquad(3.10)$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=u+v-x,\\ F_1(x,y,u,v)=u-yv.\end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$J=\frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -y\end{vmatrix}=-y-1,$$

при этом $J\neq 0$ при $y\neq -1$.

Дифференцированием равенств (3.10) находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных:

$$\begin{cases} du+dv=dx,\\ u-ydv-vdy=0.\end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y\neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},$$

$$dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем:

$$d^2u=\frac{(dydx+dvdy)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{\left(dydx+\dfrac{dx-vdy}{1+y}dy\right)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{(1+y)dxdy+dxdy-vdy^2-ydxdy-vdy^2}{(1+y)^2}=\frac{2(dxdy-vdy^2)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v=\frac{-dvdy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{dx-vdy}{1+y}dy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=\frac{-dxdy+vdy^2-dxdy+vdy^2}{(1+y)^2}=$$

$$=-\frac{2(dxdy-vdy^2)}{(1+y)^2}=-d^2u.$$

8 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=cv. \qquad (3.11)$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\neq 0$$

при $u\neq 0$.

Дифференцированием равенств (3.11) находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv,$$

$$dy=\sin v\,du+u\cos v\,dv,$$

$$dz=c\,dv.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv=\frac{\cos v\,dy-\sin v\,dx}{u}.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{c}{u}(\cos v\,dy-\sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}.$$

9 Доказать, что функции $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Р е ш е н и е. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J=\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_2.$$

В точке $(0,0)$ якобиан равен нулю $\left.\dfrac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(0;0)}=0$. Для любой точки (x_1,x_2), где $x_1\neq x_2$, из окрестности точки $(0,0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\dfrac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(x_1,x_2)}\neq 0$. Согласно теореме 3.4, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $(0,0)$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если

а) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

б) $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, где $y=e^x$.

3 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

4 Дана дифференцируемая функция $z=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2+y^2-2xy+4x-6y-3=0$, $M(-1;1)$;

б) $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, $M(3;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $xy-4x+6y-14=0$, $M(-1;2)$;

б) $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$, $M(1;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases}7x^2+y^2-3z^2+1=0,\\ 4x^2+2y^2-3z^2=0.\end{cases}$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$$

10 Найти dz, если $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$, $z=uv$.

Задания для домашней работы

1 Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если

а) $z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{u}{v}$, где $v=\operatorname{ctg}^2 x$, $u=\operatorname{tg}^2 x$;

б) $z=x^y$, $x=\ln t$, $y=\sin t$.

2 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$, где $y=4x+1$.

3 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $z=u^2+v^2$, где $u=x+y$, $v=x-y$;

б) $z=u^2\ln v$, где $u=\dfrac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

4 Дана дифференцируемая функция $=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z = \frac{u}{v}$, где $u = x^2 + y$, $v = xy$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, $M(1;1)$;

б) $x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$, $M(2;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$, $M(1;-1)$;

б) $e^y - x + y + 3 = 0$, $M(4;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 3z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Найти dy, dz, $d^2 y$, $d^2 z$.

9 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = a \cos u \operatorname{ch} v, \ y = b \sin u \operatorname{ch} v, \ z = c \operatorname{sh} v.$$

10 Найти dz, если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

Практическое занятие 4 **Частные производные и дифференциалы высших порядков**

4.1 Частные производные высших порядков
4.2 Дифференциалы высших порядков
4.3 Формула Тейлора для функции двух переменных

4.1 Частные производные высших порядков

Пусть функция $f(x, y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(x, y)$ в точке $(x; y)$ и обозначаются:

$f''_{xx}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$f''_{xy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$f''_{yx}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$f''_{yy}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Если производные второго порядка являются непрерывными функциями, то их можно дифференцировать по переменным x и y. Получим частные производные третьего порядка и т. д. Частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной* n*-го порядка* и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, … называются *смешанными производными*.

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема 1 имеет место и для функции любого числа переменных.

4.2 Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Выражение вида:

$$df=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy,$$

называется *дифференциалом первого порядка* функции $f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $(x;y)\in D(f)$, если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается:

$$d^2 f=d(df).$$

Аналитическое выражение для $d^2 z$ имеет вид:

$$d^2 f= f''_{xx}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)dy^2. \qquad (4.1)$$

Аналогично для *дифференциала третьего порядка* $d^3 f$:

$$d^3 f=d\left(d^2 f\right)=$$

$$=f'''_{xxx}(x,y)dx^3+3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy+3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2+3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k *раз непрерывно дифференцируемой* в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Аналитическое выражение для дифференциала n-го порядка кратко записывается в виде символической формулы:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z, \qquad (4.2)$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Если $f(x,y)$ дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx\neq\Delta x$, $dy\neq\Delta y$. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

4.3 Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема 2 (Тейлора) Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $(x_0;y_0)\in D(f)$. Тогда справедлива формула Тейлора::

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+R_n,$$

где $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$, $x_0<\xi<x$; $y_0<\eta<y$.

Следствие. При условиях теоремы 2 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+o(\rho^n),$$

где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Если в формуле Тейлора положить $x_0=y_0=0$, то имеет место *формула Маклорена*:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(0,0)+R_n .$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Вопросы для самоконтроля

1 Как находятся частные производные высших порядков?
2 Что называется смешанной производной?
3 Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
4 Сформулируйте теорему Тейлора.
5 Какой вид имеет формула Маклорена?

Решение типовых примеров

1 Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbf{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos\left(x^2+y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\mathbf{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Видно, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4^2x\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right).$$

2 Найти частные производные второго порядка функции

$$u=xyz-e^{x+y}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbf{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz-e^{x+y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz-e^{x+y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3 Найти dz и d^2z, если $z=\ln(x-y)+\sqrt{xy}$.

Решение. Так как

$$z'_x=\frac{1}{x-y}+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y=\frac{-1}{x-y}+\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y},$$

то

$$dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда по формуле (4.1) дифференциал второго порядка равен:

$$d^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy-$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

4 Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=2^{xy}$.

Решение. Для любой точки $P(x,y)\in U(\varepsilon;P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+o(\rho^2).$$

С учетом $dx=x-1$, $dy=y-1$ имеем:

$f(P_0)=2$,

$$df(P_0)=f'_x(P_0)dx+f'_y(P_0)dy=$$

$$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(x-1)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-1)\right)\Big|_{P_0}=$$

$$=2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1),$$

$$d^2f(P_0)=f''_{xx}(P_0)dx^2+2f''_{xy}(P_0)dxdy+f''_{yy}(P_0)dy^2=$$

$$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$$

$$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\Big)\Big|_{P_0}=$$

$$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2.$$

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$

$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;

б) $z=y^x$;

в) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$;

г) $z=xe^{-xy}$;

д) $z=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

е) $u=\ln(x+y+z)$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=x^3y+xy^2-2x+3y-1$ в точке $M(3;2)$.

3 Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\cos\dfrac{y}{x}\arccos\dfrac{x}{y}$.

4 Найти дифференциал второго порядка функции:

а) $z=x^3y^3$;

б) $z=e^{xy}$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z=x^4-y^4+x^2y^2$;

б) $z=\sin(x+\cos y)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y-4.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$.

Задания для домашней работы

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z=x^5+y^5-5x^3y^3$;

в) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

б) $z=\dfrac{\cos y^2}{x}$;　　　　　　　　г) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=2x^3y^2-xy+4x-2y-5$ в точке $M(1;-1)$.

3 Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=x\sin(2x+3y)$.

4 Найти дифференциал второго порядка от функций:

а) $z=\dfrac{x}{x+y}$;　　　　　　　　б) $z=\ln xy$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z=x^3y-xy^3$;　　　　　　　　б) $z=\cos\left(2x+e^y\right)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y)=x^3-2y^3+3xy.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=e^y\cos x$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$.