РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти область определения D и множество значений E функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ определена, если $4-x^2>0$, т.е. если $|x|<2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f)=\{x\in\mathbf{R} \mid |x|<2\}=(-2;2).$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ge\dfrac{1}{2}$ для всех x из области определения, то множество значений есть

$$E(f)=\left\{y \,\middle|\, y\ge\frac{1}{2}\right\}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

2. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

Решение. По определению:

$$f(x)\ \textit{ограничена сверху на}\ (0;1)\ \Leftrightarrow$$
$$\exists M\in\mathbf{R}:\forall x\in(0;1)\Rightarrow f(x)\le M\ .$$

Построим отрицание для этого определения:

$$f(x)\ \textit{неограничена сверху на}\ (0;1)\ \Leftrightarrow$$
$$\forall M\in\mathbf{R}:\exists x\in(0;1)\Rightarrow f(x)>M\ .$$

Возьмем $x=\dfrac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\dfrac{1}{1+|M|}\right)=1+|M|>M$ для любого M.

Следовательно, существует такое число $x\in(0;1)$, что $f(x)>M$.
Поэтому функция неограничена.

3. Определить, какая из данных функций четная, нечетная
1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$, 2) $f(x)=x^2+5x$, 3) $f(x)=2^x+2^{-x}$?

Решение.

1. Изменим знак аргумента, тогда получим:

$$f(-x)=(-x)^2\cdot\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=-x^2\cdot\sqrt[3]{x}-2\sin x=-f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

2. Здесь

$$f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x.$$

Таким образом, эта функция общего вида.

3. Имеем

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^{x}=f(x).$$

4. Найти период функции $y=\cos 3x+\cos 4x$.

Решение. Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$, а функция $\cos 4x$ – период $T_2=\dfrac{2\pi}{4}$. Поскольку $3T_1=4T_2=2\pi$, то число 2π является периодом данной функции.

5. Показать, что функция $y=3x+2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y=3x+2$ $\forall x\in\mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную.

Решив уравнение $y=3x+2$ относительно x, получим

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-2}{3}.$$

Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 1.

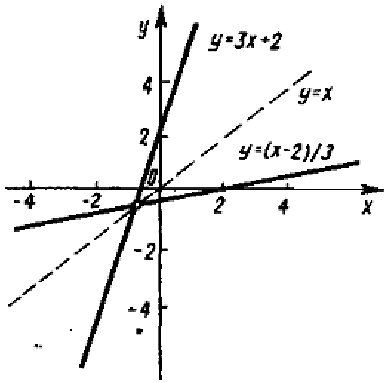

Рис.1.

6. Построить график функции $y = \begin{cases} 2 - x, \text{ если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$

Решение. При $x < 3$ функция представляется лучом прямой $y = 2 - x$, при $x \ge 3$ – параболой $y = 0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 2.

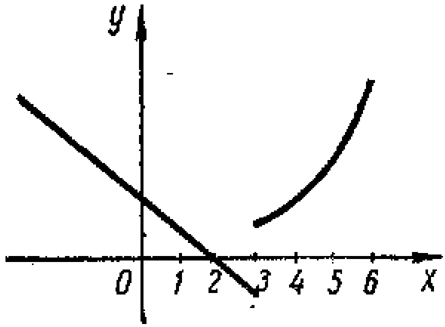

Рис.2.

7. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (рис. 3) не определена в точке $x_0 = 1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n \ne 1 \;\; \forall n \in \mathbf{N}$, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

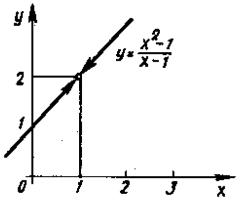

Рис.3.

Образуем последовательность $f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} \;\; \forall n \in \mathbf{N}$. Так как $x_n \ne 1$, то $f(x_n) = x_n + 1 \;\; \forall n \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = 2 .$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

8. Доказать, что функция

$$y(x) = \cos x$$

не имеет предела при $x \to +\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x \to +\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n > 0,\ x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0):\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A .$$

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, что последовательность $(\cos x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Положим $x_n = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и последовательность $\cos x_n = (1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

9. Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Решение. Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon$. Известно, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; 0)$ выполняется неравенство $|\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

10. Докажите, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \ge 0, \\ 0, \text{если } x < 0 \end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x \to 0$.

Решение. Положим $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\forall \delta > 0$ существуют $x \ge 0$ и $x < 0$ такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Для $x < 0$ имеем

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} .$$

Значит,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \ 0 < |x - x_0| < \delta :\ \ |f(x) - 1| \ge \varepsilon_0 .$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти область определения следующих функций:

1) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x-2}$,

2) $y = \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$,

3) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-9}} - \sqrt{\sin x}$.

2. Исследовать на ограниченность следующие функции:

1) $y = \dfrac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, **2)** $y = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbf{R}$.

3. Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

1) $y = |x| - 5\ln(x^2+1)$, **2)** $y = x^3 + 3\sin x$,

3) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

4. Найти период следующих функций:

1) $y = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$,

2) $y = \sin|x|$.

5. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$, **2)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$,

3) $\lim\limits_{n\to 1}(2x-4) = -2$, **4)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-1) = -1$.

6. Доказать, что функция $y(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

7. Докажите, что число 1 не является пределом функции $f(x)$ при $x \to 0$, если

$$f(x) = \sin x.$$

8. Приведите пример функции, удовлетворяющей условию:

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$,

2) $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$.

9. Приведите пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=0$, но их сумма, произведение, разность; частное имеет предел в точке $x=0$.

10. Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$.

Найдите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x)$, $n\in \mathbf{N}$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+1\right)\left(q(x)-2\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-q(x)}{q^2(x)+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}$.

11. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+\dfrac{1}{x}+3x-2\right)$, **2)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$, **4)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}{x^2-3x+1}$, **6)** $\lim\limits_{x\to 2}\lg\left(4x-1+\sqrt{2x+5}\right)$,

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{2x-7}\right)^x$.

12. Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x+1)}$ найти:

1) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; **2)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; **3)** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти область определения следующих функций:

1) $y = \log_3\left(x^2 - 9\right) + \arcsin(x - 6)$**,**

2) $y = \ln(\sin x)$**,**

3) $y = \dfrac{2x^2 + 3}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$**.**

2. Исследовать на ограниченность следующие функции:

1) $y = \dfrac{5}{x + 2}$ на $(-4;4)$,

2) $y = \dfrac{\sin x}{e^x + 1}$ на $\mathbf{R}$.

3. Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

1) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$**,** **2)** $y = 2x^4 + 5\cos x - 3$**,**

3) $y = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^x + 1}$**.**

4. Найти период следующих функций:

1) $y = \cos 4x + \sin 5x$,

2) $y = |\cos 2x|$.

5. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 2} 3x = 6$ **, 2)** $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ **,**

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3} = 1$ **, 4)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 4) = +\infty$**.**

6. Докажите, что функция:

$$y(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

не имеет предела в точке 0.

7. Приведите пример функции, удовлетворяющей условию: $f(x)$ не имеет предела в точке $x = 2$, но функция $|f(x)|$ имеет предел в этой точке.

8. Приведите пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x = 1$, но их сумма, произведение, разность, частное имеет предел в точке $x = 1$.

9. Известно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = B$.

Найдите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+q^2(x)\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\sin x}{q^2(x)+\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos f(x)$.

10. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^3+2\cos x\right)$, **2)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, **4)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 2}\sin x\left(4x^2+1\right)$, **6)** $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

Практическое занятие 4
БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ МФУНКЦИИ

1. Определение и свойства бесконечно малых функций.
2. Замечательные пределы.
4. Сравнение асимптотического поведения функций.

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 .$$

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция.

3. Произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция.

4. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

5. Частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция.

6. Если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. 2) Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при

$x \to x_0$ – бесконечно малая.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = e, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^\infty\right) = e.$$

Под ***асимптотикой***, или ***асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки*** $x_0 \in \mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,$$

то они называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***.

Обозначается: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x) \in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ ***ограничена***, т.е. $O(1)$ – множество ограниченных функций при $x \to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ то они называются ***эквивалентными*** (***асимптотически равными)*** при $x \to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ или $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то при $x \to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x) \sim \operatorname{arctg} \alpha(x)$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1, \ \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n} \alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е. если при $x \to x_0$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то говорят, что $\alpha(x)$ является ***бесконечно малой функцией более высокого порядка*** по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\neq 0$, $k>0$, то $\alpha(x)$ называется функцией ***k-го порядка малости*** по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \alpha(x)=o(\beta(x)),\ \alpha(x)\sim\beta(x) \text{ при } x\to x_0$$

называются ***асимптотическими оценками***.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение бесконечно малой функции.
2. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
3. Докажите первый замечательный предел.
4. Докажите второй замечательный предел.
5. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, 4) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$, 5) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$, 6) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$, 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, 8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx}=$$
$=1\cdot b=b$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=$[введем новую переменную $y=2x$]=

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2=e^2.$$

4. $$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=[2y=x]=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

5. $$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y}=[3y=x]=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=3\cdot 1=3.$$

6. $$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1+\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

8) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)}=[x-5=t]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

1) $\alpha(x)=\sin(x-2)$ при $x\to 2$,

2) $\alpha(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$,

3) $\alpha(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2. С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$, **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-2x^5}{5x+3x^3+x^4}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\sin^2 x-\operatorname{arctg} 2x}$

3. Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$

7) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$, 8) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{e^{3t}-1}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$ 12) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^2}{x^2-4}\right)$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

1) $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$

2) $\alpha(x)=\cos x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$,

3) $\alpha(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2. С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{1-\cos 2x}$, **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-7x+6}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$, **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$,

5) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$, **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^6}}{\ln(1+3x)}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$

3. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$, **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 10x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{\sin^2 3x}$, **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$

7) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3t}{\sqrt{1-2t}-1}$ **8)** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-2t}-1}{3t}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$ **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$,

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, **12)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$.

Практическое занятие 5
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Определение непрерывности функции.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Непрерывность монотонной функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется ***разрывной в точке*** x_0, а точка x_0 – ***точкой разрыва***.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 (***по Коши***), если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ – приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 1.

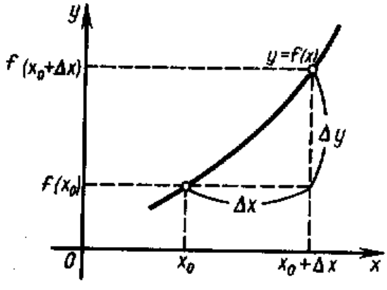

Рис.1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется ***непрерывной слева (справа)*** в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$$f(x) \text{ \textit{непрерывна справа в точке} } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \text{ \textit{непрерывна слева в точке} } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 (***по Гейне***), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x_0)$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in U(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется ***непрерывной на множестве*** X.

Если $X = [a;b]$, то для непрерывности функции на $[a;b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $\mathrm{C}[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x)\neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется ***точной верхней (нижней) гранью*** функции $y=f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x\in X \quad f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$);

2) для любого числа $M^{'}<M$ ($m^{'}>m$) найдется такая точка $x^{'}\in X$, что $f\left(x^{'}\right)>M^{'}$ ($f\left(x^{'}\right)<m^{'}$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y=f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут

$$\sup_X f(x)=+\infty,$$

если снизу, $\inf\limits_X f(x)=-\infty$.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=A$, но $f(x_0)\neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\neq x_0,\\ A, \text{ если } x=x_0,\end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f_1(x)=A=f_1(x_0),$$

т.е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет ***непрерывной слева***, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ – ***непрерывной справа***.

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется ***скачком*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** 2***-го рода (устранимого разрыва)*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел.:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty.$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на числовой прямой*** $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x \in \mathbf{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbf{R}$, для которой $Q(x) \neq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1 (устойчивость знака непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:*

$$f(x):\ f(a)f(b) < 0 \ \Rightarrow\ \exists x_0 \in (a;b):\ f(x_0) = 0.$$

3. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c \in [a;b]$, что $f(c) = C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M = f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x),\ m = f(x_2) = \inf_{[a;b]} f(x).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте определения непрерывной функции.
2. Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.
3. Дайте определение точек разрыва.
4. Какие точки называются точками разрыва функции?
5. Дайте определение точек устранимого разрыва и точек разрыва 1 и 2 рода.
6. Перечислите основные свойства непрерывных функций: о непрерывности сложной функции, основных элементарных функций, об устойчивости знака непрерывной функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Доказать непрерывность функции $y = ax + b$.

Решение.

Функция $y = ax + b$ определена при всех значениях x, т.е. $\forall x \in \mathbf{R}$. Фиксируем некоторое значение x_0 из этого множества.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ $|y(x) - y(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |ax - ax_0| = |a| \cdot |x - x_0|$.

Как только $|x - x_0| < \delta$, то $|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta$.

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon .$$

2. Исследовать на непрерывность сложные функции

1) $y = e^{-\frac{1}{x}}$, 2) $y = \sin x^4$.

Решение.

1. Функция $y = e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y = -\frac{1}{x}$ и $f = e^y$. Так как функция $y = -\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, то наша функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как

композиция непрерывных функций.

2. Функция $y=\sin x^4$ является композицией функций $y=\sin z$ и $z=x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y=\sin x^4$ также непрерывна при всех x.

3. Доопределите функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0.

Решение. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

4. Докажите, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(0,1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1=x^3$, $f_2=-4x$, $f_3=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=-1<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль: $f(x_0)=0$. Поэтому x_0 – корень уравнения.

5. Найти точки разрыва функции $y=E(x)$, где $E(x)$ – целая часть числа, и построить график.

Решение. Функция $E(x)$ определена следующим образом: если $x=n+q$, где n – целое число, а $0\leq q\leq 1$, то $E(x)=n$, т.е. функция равна целой части числа. Областью определения данной функции является множество $\mathbf{R}$. Функция $E(x)$ терпит разрыв при каждом целочисленном значении x. Действительно, пусть $x_0 = n$, тогда $E(x_0) = n$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} E(x) = n - 1$, а $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} E(x) = n$. Причем каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода.

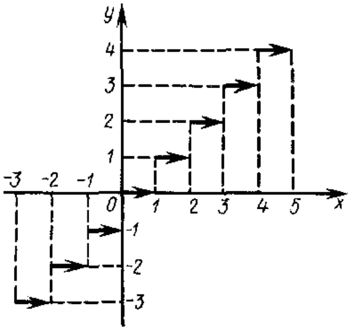

Рис.5.

Во всех точках $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ функция $E(x)$ является непрерывной как постоянная.

6. Определить точки разрыва функции $y = e^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Данная функция не определена в точке $x = 1$.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{2}{x-1}} = +\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x = 1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Докажите непрерывность следующих функций:

1) $y = x^2$ **; 2)** $y = x^3$**; 3)** $y = \sqrt{x}$ **.**

2. Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 = 1$, исключая саму точку x_0. Доопределите функцию f задав $f(x_0)$так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0, если

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ **; 2)** $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{x-1}$**.**

3. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y = x\sin\dfrac{1}{x}$.

4. Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } \ x<0,\\ x+1, \text{ при } \ 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } \ 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } \ x\ge 3?\end{cases}$$

5. Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

1) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$ **; 2)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$**.**

6. Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(1,2)$.

7. Исследовать функцию $y=\dfrac{|x|}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

8. Найти точки разрыва функций и установить их тип:

1) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$,

2) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$,

3) $y=\sin\dfrac{1}{x}$,

4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$,

5) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$,

6) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } \ x<1\\ 3x+2, \text{ если } \ x\ge 1\end{cases}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Доказать непрерывность функции

1) $y=\sqrt[3]{x}$ **; 2)** $y=\sin x$ **; 3)** $y=\cos x$**.**

2. Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопредеите функцию f задав $f(x_0)$так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0, если

1) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ **, 2)** $f(x)=(1-x)\operatorname{ctg}\pi x$ **.**

3. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

4. Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=0$, чтобы функция $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ в этой точке была непрерывна:

5. Докажите, что уравнение $x^4-2{,}15x+0{,}95=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(1,2)$.

6. Исследовать функцию

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

на непрерывность и построить график.

7. Найти точки разрыва функций и установить их тип:

1) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ **, 2)** $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$ **, 3)** $y=\ln|\sin x|$ **, 4)** $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ **.**

8. Изобразите схематически график какой-либо функции, которая в точке $x_0=3$:

1) непрерывна;

2) имеет конечный предел, но не непрерывна;

3) имеет бесконечный предел; не имеет предела;

4) непрерывна слева и имеет конечный предел справа, но не непрерывна справа;

5) имеет конечные пределы и слева, и справа, но не непрерывна ни слева, ни справа;

6) непрерывна слева и имеет бесконечный предел справа;

7) непрерывна слева и не имеет предела справа;

8) имеет бесконечный предел слева и не имеет предела справа;

9) не имеет предела ни слева, ни справа.