$$= \operatorname{sh}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = 2.$$

Видно, что тригонометрические функции комплексной переменной могут принимать значения по модулю больше единицы.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Имеем $\operatorname{ch} i = \cos 1$. Тогда значение модуля функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$ равно

$$\left|\operatorname{ch} i\right| = \sqrt{\left(\cos 1\right)^2 + 0^2} = \cos 1,$$

а главное значение аргумента –

$$\arg\left(\operatorname{ch} i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{\cos 1}\right) = 0.$$

4 Найти все значения функции $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{z}$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа z воспользуемся формулой Муавра в показательной форме:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Так как показательная форма комплексного числа $z_0 = i$ равна $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, то $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$, $k = 0, 1$.

Тогда функция в точке $z_0 = i$ принимает два значения:

$$w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\pi}{4}i}, \ w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

5 Вычислить значения функции в точке:

а) $\operatorname{Ln}\left(-1\right)$; б) $\operatorname{Arctg}\left(1-i\right)$.

отрезках а) $\left[-1;1\right]$, б) $\left[0;1\right]$.

Решение.

а) функции $\varphi\left(x\right) = x$ и $\psi\left(x\right) = x^2$ являются ортогональными на отрезке $\left[-1;1\right]$, так как

$$\left(\varphi, \psi\right) = \int_{-1}^{1} x x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0;$$

б) функции $\varphi\left(x\right) = x$ и $\psi\left(x\right) = x^2$ не являются ортогональными на отрезке $\left[0;1\right]$, поскольку

$$\left(\varphi, \psi\right) = \int_{0}^{1} x \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

4 Доказать, что основная тригонометрическая система функций

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, ...\right)$$

на отрезке $\left[-l;l\right]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

Решение. Докажем, что система ортогональна. Имеем:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \cos\frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \cos\frac{(m+n)\pi x}{l} dx =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right|_{-l}^{l} = 0.$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \forall \ n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \forall \ n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n.$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}(1)^2dx=x\Big|_{-l}^{l}=2l,$$

то $\|1\|=\sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Big|_{-l}^{l}=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Разделим каждый член ортогональной на $[-l;l]$ системы на соответствующую ему норму. В результате получается ортонормированная на отрезке $[-l;l]$ *система функций:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},...,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},...\right).$$

5 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система многочленов Лежандра задается условием:

Примеры оформления решения

1 Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n=\dfrac{n^2+in-2i+4}{in^2-5n+4i}$; б) $z_n=n\,\mathrm{tg}\dfrac{i}{n}$.

Решение. а) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+in-2i+4}{in^2-5n+4i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1++\frac{i}{n}+\frac{-2i+4}{n^2}\right)}{n^2\left(i-\frac{5}{n}+\frac{4i}{n^2}\right)}=\frac{1}{i}=-i;$$

б) имеем

$$\lim_{n\to\infty}n\,\mathrm{tg}\frac{i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\frac{i}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}}\cdot\frac{i}{\cos\frac{i}{n}}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{i}{\cos\frac{i}{n}}=i.$$

2 Найти значение модуля функции $w=\sin z$ в точке $z_0=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=$

$=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\,\mathrm{sh}\,y\cos x$.

Отсюда

$$\mathrm{Re}(\sin z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y,$$

$$\mathrm{Im}(\sin z)=\mathrm{sh}\,y\cos x.$$

Тогда модуль функции $w=\sin z$ равен

$|\sin z|=\sqrt{\sin^2x\,\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2y\cos^2x}=$

$=\sqrt{\sin^2x\,\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2y\left(1-\sin^2x\right)}=$

$=\sqrt{\sin^2x\left(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{sh}^2y\right)+\mathrm{sh}^2y}=\sqrt{\sin^2x+\mathrm{sh}^2y}$.

Подставляя $z_0=\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, получим

$\left|\sin\left(\pi+i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\right|=\sqrt{\sin^2\pi+\mathrm{sh}^2\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)}=$

Раздел 2 Функции комплексной переменной

Тема 1 Функции комплексной переменной

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$; б) $z_n = n\sin\dfrac{i}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \sin z$; д) $w = \operatorname{sh} z$;

б) $w = \dfrac{\overline{z}}{i} + \dfrac{i}{\overline{z}}$; е) $w = i\,\overline{z} + 2z^2$;

в) $w = 2z - 1$; ж) $w = z + z^2$;

г) $w = z^{-1}$; и) $w = e^{-z}$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$; в) $w = \operatorname{th} z$, $z_0 = \pi i$;

б) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$; г) $w = 3^z$, $z_0 = 2 - i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = z + \sqrt[4]{z}$, $z_0 = -1$; б) $w = \dfrac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z} - i}$, $z_0 = i$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln} e$; д) $\operatorname{Ln}(-1-i)$; к) $\operatorname{Ln}(2+i)$;

б) $\operatorname{Arcsin} i$; е) $\operatorname{sh}\dfrac{\pi i}{3}$; л) $\operatorname{th}\pi i$;

в) i^i; ж) 1^i; м) $(1-i)^{3-3i}$;

г) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; и) $\cos\pi i$; н) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^{-z} + 1 = 0$; б) $4\cos z + 5 = 0$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$; б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + \operatorname{sh} iz}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = \overline{z}$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n = 0,1,\ldots$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x) = e^x \in L_2[-1;1]$:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы:

$$c_0 = \frac{(f, P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2},\ c_1 = \frac{(f, P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2},\ c_2 = \frac{(f, P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\|P_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\|P_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right)^2 dx = \frac{2}{5}.$$

Тогда

$$c_0 = \frac{1}{2}(f, P_0(x)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right),$$

$$c_1 = \frac{3}{2}(f, P_1(x)) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{3}{e},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}(f, P_2(x)) = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx = \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией

$f(x)=e^x \in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x \sim \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{3}{e}x+\frac{5}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)+\ldots$$

Тема 2 Ряды Фурье по тригонометрической системе

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=5x-1$; в) $f(x)=|\sin 2x|$;

б) $f(x)=3x^2$; г) $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=2x+3x^2$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -x \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=6-2x$.

4 Разложить на промежутке $[0;\ln 2]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh}x$, доопределив ее на $[-\ln 2;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1.\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^\pi-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx dx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right) \quad \forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots;$$

б) продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^\pi+\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx dx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots.$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x dx = 0 ,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x \cos\frac{n\pi x}{l} dx = 0 ,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l} dx \right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi} .$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x) = x$ имеет вид:

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} .$$

Так как функция $f(x) = x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} = 0 .$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \forall x \in (-l;l).$$

4 Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам.

Решение. а) продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом, т. е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x) = |x|$.

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi ,$$

Примеры оформления решения

1 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рисунок 12)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

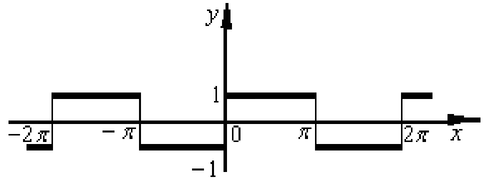

Рисунок 12 – График функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \int_0^{\pi} dx\right) = 0 ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx dx + \int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = 0 ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx + \int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x + \ldots\right).$$

На рисунках 13, 14, 15 изображены графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

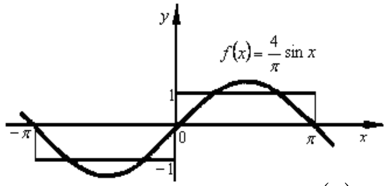

Рисунок 13 – График $S_1(x)$

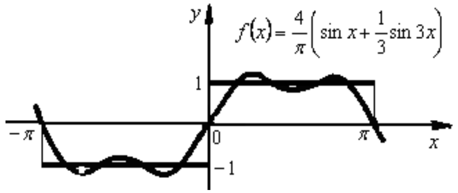

Рисунок 14 – График $S_2(x)$

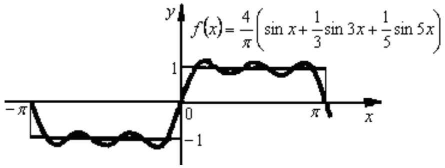

Рисунок 15 – График $S_3(x)$

Видно, как частичные суммы S_n, ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n\to\infty$.

2 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$ равенством $f(x)=|x|$.

Решение. Данная функция является чётной (рисунок 16), поэтому её ряд Фурье содержит только косинусы.

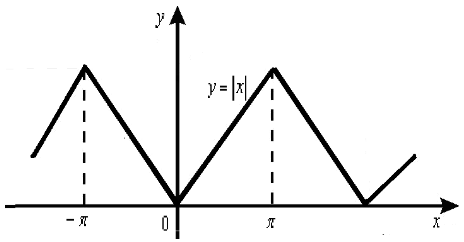

Рисунок 16 – График 2π периодичной функции $f(x)=|x|$

Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos(nx)dx=dv,\ v=\dfrac{1}{n}\sin(nx),\\ u=x,\ du=dx\end{array}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)=\frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\begin{cases}0,\ \text{если}\quad n=2k,k=1,2,...,\\ -\dfrac{4}{\pi n^2},\ \text{если}\quad n=2k+1,k=0,1,....\end{cases}$$

Следовательно,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

3 Для функции $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ (рисунок 17) записать ряд Фурье.

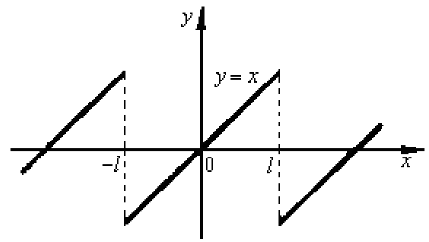

Рисунок 17– График $2l$ -периодической функции $f(x)=x$

Решение. Найдем коэффициенты Фурье: