Задания к практическим занятиям

Раздел 1 Ряды Фурье

Тема 1 Ряды Фурье по ортогональным системам функций

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x^3$ и $\psi(x)=x^4+1$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, … на отрезке $[0;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Доказать, что система *многочленов Лежандра*, определяемая следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-n\right)^n,\ n=0,1,\ldots,$$

на отрезке $[-1;1]$ является ортогональной.

4 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

2 Вычислить норму функции $\varphi(x)=\sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\|\varphi\|^2=\int_0^\pi \sin^2 xdx=\left.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3 Проверить ортогональны ли функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на

– *подобие:* если $f(t)\doteq F(p)$ и $\lambda>0$, то

$$f(\lambda t)\doteq\frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right);$$

– *запаздывание:* если $f(t)\doteq F(p)$ и $\tau>0$, то

$$f(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}\cdot F(p);$$

– *опережение*: если $f(t)\doteq F(p)$, то

$$f(t+\tau)\doteq e^{p\tau}\left[F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right];$$

– *изображение периодической функции:* пусть оригинал $f(t)$ имеет период T и он может быть представлен в виде сходящегося ряда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_0(t-nT),$$

где $f_0(t)=\begin{cases}f(t) & \text{при } 0<t<T,\\ 0 & \text{при } t<0 \text{ и } t>T.\end{cases}$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_0(t-nt)\doteq F_0(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-pT}};$$

– *смещение*: если $f(t)\doteq F(p)$ и $a\in$ □ , то

$$e^{at}\cdot f(t)\doteq F(p-a);$$

– *дифференцирование оригинала*: если $f(t)\doteq F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t),\ldots$, $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то для любого $k=1,2,\ldots,n$

$$f^{(k)}(t)\doteq p^k\cdot F(p)-p^{k-1}\cdot f(0)-\ldots-f^{(k-1)}(0),$$

в частности $f'(t)\doteq p\cdot F(p)-f(0)$;

– *дифференцирование изображения:* если $f(t)\doteq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p)\doteq(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t),\ n=1,2,\ldots;$$

– *интегрирование оригинала:* если $f(t)\doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(z)dz\doteq\frac{1}{p}F(p);$$

– *интегрирование изображения*: если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^{\infty} F(\rho)d\rho$ сходится, то $\int_p^{\infty} F(\rho)d\rho \doteq \frac{f(t)}{t}$;

– пусть $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал непрерывный на $0 \le t < \infty$, $f(t) \doteq F(p)$ и несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ сходится. Тогда имеет место равенство $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{\infty} F(x)dx$.

1.4 Таблица оригиналов и изображений

Ниже приведены изображения некоторых функций:

$1 \doteqdot \frac{1}{p}$;

$e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a}$;

$t \doteqdot \frac{1}{p^2}$;

$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

$e^{at} \cdot t^n \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

$\sin wt \doteqdot \frac{w}{p^2+w^2}$;

$\cos wt \doteqdot \frac{p}{p^2+w^2}$;

$\operatorname{sh} wt \doteqdot \frac{w}{p^2-w^2}$;

$\operatorname{ch} wt \doteqdot \frac{p}{p^2-w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \frac{w}{(p-a)^2-w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2-w^2}$;

$t \cdot \sin wt \doteqdot \frac{2wp}{(p^2+w^2)^2}$;

$t \cdot \cos wt \doteqdot \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$;

$t \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \frac{2wp}{(p^2-w^2)^2}$;

$t \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \frac{p^2+w^2}{(p^2-w^2)^2}$;

$e^{at} \cdot \sin wt \doteqdot \frac{w}{(p-a)^2+w^2}$;

$e^{at} \cdot \cos wt \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2+w^2}$..

1 Сформулируйте необходимый признак существования изображения?

2 Сформулируйте теорему единственности оригинала?

3 Сформулируйте теорему Римана-Меллина.

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему о существовании изображения.

2 Сформулируйте и докажите свойства преобразования Лапласа.

3 Сформулируйте и докажите вторую теорему разложения.

Вопросы и задачи на понимание

В чем суть первой теоремы разложения?

1 Как связаны между собой преобразование Лапласа и преобразование Фурье?

2 Как используется преобразование Лапласа при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

3 Как используется преобразование Лапласа при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

4 При исследовании каких процессов используется операционное исчисление в электротехнике?

направлением обхода контура, то слагаемое $L_k i_{L_k}(0)$ следует брать со знаком «плюс», если же и $u_{C_k}(0)$ направлено по обходу контура, то результирующий знак слагаемого $\dfrac{u_{C_k}(0)}{p}$ должен быть «минус», так как начальная э. д. с. емкости всегда направлена навстречу начальному напряжению на обкладках конденсатора $u_C(0)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя операционное исчисление для расчета переходных процессов, в принципе можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. При исследовании переходных процессов в сложных и разветвленных электрических цепях (в последнем случае при ненулевых начальных условиях) наибольшее применение получили метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях, также в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме. При этом в разветвленной цепи непосредственно определяется только ток переходного режима в ветви, содержащей источник э. д. с. (вся цепь нереально сводится к простой неразветвленной цепи).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется такая последовательность операций: сначала определяются начальные условия, затем записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, что позволяет найти изображения искомых токов или напряжений. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы – мгновенные значения токов или напряжений переходного режима.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Какая функция называется оригиналом?
2 Какой интеграл называется изображением?
3 Какая операция называется преобразованием Лапласа?
4 Что называется обратным преобразованием Лапласа?

Формулировки теорем и формулы

Тема 2 Восстановление оригинала по изображению

2.1 Свертка функций.
2.2 Интеграл Дюамеля.
2.3 Теоремы разложения.
2.4. Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье.

2.1 Свертка функций

– *умножение изображений*: если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau \,;$$

– *теорема Бореля*: свертке оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_2(y) \cdot f_1(t-y)\, dy$$

соответствует произведение изображений

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p);$$

– *интеграл Дюамеля*: если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + f'(t) * g(t),$$

$$pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + g'(t) * f(t).$$

2.3 Теоремы разложения

Для восстановления оригинала $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ в простейших случаях используется таблица изображений. Дополнительное применение свойств изображений позволяет существенно расширить возможности восстановления оригинала по заданному изображению.

Теорема 1 (Римана-Меллина) Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста s_0, а $F(p)$ – ее изображение. Тогда в любой точке t непрерывности оригинала $f(t)$ справедлива формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

где интегрирование производится вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p=u$, $u>s_0$, *и интеграл понимается в смысле главного значения.*

Формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

является обратной к формуле $F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt$ и называется *обратным преобразованием Лапласа.*

В точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, правая часть формулы Римана-Меллина равна

$$\frac{1}{2}\big(f(t_0-0)+f(t_0+0)\big).$$

Непосредственное применение формулы обращения для восстановления оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ затруднительно. Для нахождения оригинала обычно пользуются теоремами разложения.

Теорема 2 (1-я теорема разложения) Если функция $F(p)$ *в окрестности точки* $p=\infty$ *может быть представлена в виде ряда Лорана*

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=c_0+c_1t+c_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots,\ t\ge 0$, *является оригиналом, имеющим изображение* $F(p)$:

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}\doteq\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=f(t).$$

Вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом.

бражение начальной э. д. с. емкости (включая знак «минус»), уравновешивающей начальное напряжение на обкладках конденсатора и направленной навстречу $u_C(0)$.

Операторное сопротивление $Z(p)=r+Lp+\frac{1}{pC}$ контура r, L и C получено из выражения комплекса полного сопротивления этого контура

$$Z=r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}$$

путем замены $i\omega$ на p, $i^2=-1$.

Закон Ома в операторной форме позволяет, непосредственно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. При рассмотрении переходных процессов в разветвленных и сложных электрических цепях необходимо использовать первый и второй законы Кирхгофа, которые имеют в операторной форме следующий вид:

первый закон – $\sum_{k=1}^{n}I_k(p)=0$;

второй закон – $\sum_{k=1}^{m}Z_k(p)I_k(p)=\sum_{k=1}^{l}F_k(p)$.

При составлении уравнений цепи по этим законам «правила знаков» остаются такими же, как и при расчете установившихся режимов в электрических цепях постоянного и переменного тока. В частности, если мгновенное значение тока переходного процесса $i_n(t)$ протекающего в ветви n, принято направленным к заданному узлу (для которого составляется уравнение по первому закону Кирхгофа), то изображение этого тока $I_n(p)$ берется с одним знаком (например, со знаком «плюс»). Если же ток $i_m(p)$ направлен от узла, то его изображение $I_m(p)$ берется с другим знаком (со знаком «минус»).

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо учитывать, что кроме внешних э. д. с. $e_k(t)=e_k$ в контурах, содержащих индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях, действуют еще и внутренние э. д. с. (начальные э. д. с.: самоиндукции и емкости). Причем, если направление $i_{L_k}(0)$ совпадает с

Так как направление источника э. д. с. $e = e(t)$, действующего в контуре r, L и C во время переходного процесса, совпадает с направлением обхода этого контура, то по второму закону Кирхгофа получаем уравнение:

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) = e.$$

Обозначим $i(p) = i \doteq I(p)$ – изображение тока переходного процесса в контуре; $e(p) = e \doteq E(p)$ – изображение внешней э. д. с., действующей в контуре.

Тогда уравнение цепи r, L и C в операторной форме примет вид:

$$rI(p) + L(pI(p) - i_L(0)) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Это уравнение можно записать так:

$$\left(r + Lp + \frac{1}{pC}\right)I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Откуда находится выражение для изображения тока переходного процесса в виде:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}}{r + Lp + \dfrac{1}{pC}}.$$

Полученная зависимость представляет собой закон Ома в операторной форме. Его можно записать так:

$$I(p) = \frac{F(p)}{Z(p)},$$

где $F(p) = E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение всех (внешних и внутренних) э. д. с., действующих в контуре; $Z(p) = r + Lp + \dfrac{1}{pC}$ – операторное сопротивление контура r, L и C; $-\dfrac{u_C(0)}{p}$ – изо-

Т е о р е м а 3 (2-я т е о р е м а р а з л о ж е н и я) Если $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ – рациональная правильная несократимая дробь, p_1, p_2, …, p_n – простые или кратные нули знаменателя $Q(p)$, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \doteq \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right]\cdot e^{p_k t} = f(t).$$

В частности, если знаменатель p_1, p_2, …, p_n – простые полюса, то функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Т е о р е м а 4 Пусть $F(p)$ – функция комплексной переменной p, обладающая свойствами:

1) $F(p)$ задана в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$ и удовлетворяет в ней условиям:

а) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$,

б) в области $\operatorname{Re} p \geq u > s_0$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg(p - s_0)$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = u$, $u > s_0$, несобственный интеграл $\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} |F(p)| dp$ сходится;

г) может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость C_p;

2) аналитическое продолжение функции $F(p)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq s_0$ удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)\cdot e^{p_k t},$$

где $t > 0$ *и* $p = p_k$ *– особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением* $F(p)$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re} p \le s_0$, $k = 1,2,\ldots,n$.

2.4. Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 и имеет конечное число экстремумов. Тогда для нее можно записать интеграл Фурье. При этом имеет место формула:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

где $\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$.

Учитывая, что в интеграле Лапласа параметр $p = u + i\omega$, $\operatorname{Re} p = u$, и для сходимости интеграла выбирается $u > s_0$, то можно записать:

$$F(p) = F(u+i\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ut}e^{-i\omega t}dt.$$

Сравнивая полученный интеграл Лапласа с преобразованием Фурье, видно, что изображение $F(u+i\omega) = F(p)$ есть прямое преобразование Фурье для функции $g(t) = f(t)\cdot e^{-ut}$.

щий коммутации в цепи, $i_L(0)$ и $u_C(0)$, определяют начальные условия переходного процесса. При расчете переходного процесса в электрической цепи эти условия необходимо выявить до выполнения всех остальных вычислений. Если все $i_L(0)$ и $u_C(0)$ равны нулю, то в цепи имеют место нулевые начальные условия, а токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. При ненулевых начальных условиях для определения знаков $i_L(0)$ и $u_C(0)$ надо задаться направлениями обхода контуров цепи, в которых будет происходить переходный процесс. Положительные знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ сохранятся, если их направления совпадают с направлением обхода контура. В противном случае знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ изменятся на противоположные. Здесь токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от тех значений, которые они имели в момент, непосредственно предшествующий коммутации (с учетом установленных знаков соответствующих величин).

Пусть в электрической цепи, изображенной на рисунке 3. 1, рубильник P переключается из положения 1 в положение 2. Тогда в контуре r, L и C возникнет переходный процесс. Примем, что его начальные условия ненулевые: $i_L(0) \ne 0$ и $u_C(0) \ne 0$. При направлениях тока в индуктивности и напряжения на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, показанных на рисунке 11, выбранном направлении обхода контура имеем $i_L(0) > 0$ и $u_C(0) > 0$.

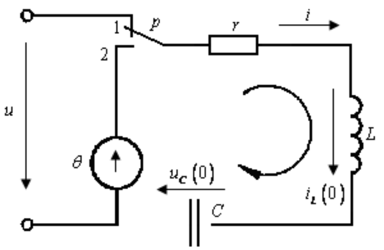

Рисунок 11 – Электрическая цепь

Возьмем направление мгновенного значения тока переходного процесса $i = i(t)$, совпадающие с направлением обхода контура.

Использование операционного исчисления в электротехнике. Методы операционного исчисления широко используются в электротехнике при исследовании переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами r, L и C, поскольку явления, происходящие в таких цепях, описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и их системами, которые легко решаются с помощью операционного исчисления.

Переходным процессом называется явление, наблюдающееся в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Переходные процессы возникают в электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с., различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров в цепи и т. д.). Эти процессы в электрических цепях всегда являются *электромагнитными*. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

При протекании переходных процессов в электрических цепях всегда выполняются законы коммутации (законы переходных процессов):

а) ток в индуктивности L не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) он сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0);$$

б) напряжение на емкости C не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) оно сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, непосредственно предшествую-

Тема 3 Приложения операционного исчисления

3.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.2 Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.3 Использование операционного исчисления в электротехнике

Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, $c_1, \ldots$, c_{n-1} – заданные числа, функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Для того чтобы найти решение $y(t)$ применим к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, т. е. от оригиналов $y(t)$ и $f(t)$ переходим к изображениям $Y(p)$ и $F(p)$ соответственно. В результате получается операторное уравнение:

$$a_0\left(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\left(pY - c_0\right) + a_n Y = F$$

Разрешая полученное операторное уравнение относительно $Y(p)$, находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)},$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$,

$$R_{n-1}(p) = c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) +$$
$$+ \ldots + c_{n-1} a_0 .$$

Полученное решение называется *операторным решением* искомого дифференциального уравнения.

Определяя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению $Y(p)$, получается искомое решение .

Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех $t \in \mathrm{R}$, а не только при $t \geq 0$.

При нулевых начальных условиях решение операторного уравнения примет вид $Y(p) = \dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Если $\tilde{y}(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 1$$

при начальных условиях $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$, то решением уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$ при тех начальных условиях является функция

$$y(t) = \int_0^t \tilde{y}'(\tau) f(t - \tau) d\tau \ .$$

Данная формула позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части.

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered} y_1' + a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n = f_1(t), \\ y_2' + a_{21} y_1 + \ldots + a_{2n} y_n = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n' + a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n = f_n(t), \end{gathered}$$

удовлетворяющая начальным условиям Коши

$$y_1(0) = c_1,\ y_2(0) = c_2,\ \ldots,\ y_n(0) = c_n,$$

где c_0, $c_1, \ldots$, c_n – заданные числа, функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$ вместе с их первыми производными и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y_k(t) \doteq Y_k(p)$, $f_k(t) \doteq F_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и учитывая правила дифференцирования оригинала, получим:

$$\begin{gathered} pY_1 - c_1 + a_{11} Y_1 + \ldots + a_{1n} Y_n = F_1(t), \\ pY_2 - c_2 + a_{21} Y_1 + \ldots + a_{2n} Y_n = F_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ pY_n - c_n + a_{n1} Y_1 + \ldots + a_{nn} Y_n = F_n(t), \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} (p + a_{11}) Y_1 + a_{12} Y_2 \ldots + a_{1n} Y_n = c_1 + F_1(t), \\ a_{21} Y_1 + (p + a_{21}) Y_1 + \ldots + a_{2n} Y_n = c_2 + F_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \ldots + (p + a_{nn}) Y_n = c_n + F_n(t). \end{gathered}$$

Данная система называется *системой операторных* уравнений.

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + p & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + p & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} + p \end{vmatrix}$$

есть определитель системы операторных уравнений и Δ_{km} – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении k-1 строки и m-го столбца. Если определитель $\Delta \neq 0$, то применяя правило Крамера, получим:

$$Y_k(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (F_i(p) + c_i) \Delta_{km}}{\Delta},\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Для нахождения решения исходной системы определяются оригиналы, соответствующие полученным изображениям.

Если определитель $\Delta = 0$, то система операторных уравнений решения не имеет, следовательно, и исходная система не имеет решения.

При помощи операционного исчисления можно находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнениями в частных производных, уравнений в конечных разностях, проводить суммирование рядов, вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.