При $x \to 0$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o(1)$, при $x \to 1$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится, и функция $\Phi(y)$ является дифференцируемой. По теореме 10 имеем

$$\Phi'(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = z, \\ t = \operatorname{arctg} z \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Тема 3-4 Интегралы Эйлера, интеграл Фурье

1 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $n > 0$.

2 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^p dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$, $n > 0$.

3 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-2x}$, $x \geq 0$.

4 Найти преобразование Фурье функций:

Тогда

$$\iint\limits_G \left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G^*} \left(2r^4\cos^4\varphi + 3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r^4\sin^4\varphi\right) r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{G^*} r^5\left(2\cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi\right) dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \int\limits_0^{2\pi}\left(2\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi - \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right)d\varphi =$$

$$= \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{2} + \frac{3\left(1-\cos 4\varphi\right)}{8} - \frac{1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3\cos 4\varphi}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

6 Вычислить $\iint\limits_\Omega x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=16$, лежащая в первом октанте.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, $F'_z \neq 0$ $z \geq 0$. По условию, нормаль к внешней стороне образует угол $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = \frac{1}{2z}\left(2x, 2y, 2z\right) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right);$$

при этом $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$.

Тогда получим

$$\iint\limits_\Omega x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \iint\limits_G \left(x^2\cdot\frac{x}{z} + y^2\cdot\frac{y}{z} + z^2\right)dxdy =$$

$$=\iint_G\left(\frac{1}{z}\left(x^3+y^3\right)+z^2\right)dxdy=\iint_G\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+16-x^2-y^2\right)dxdy.$$

Область G – часть круга, лежащая в первой четверти: $x^2+y^2\le 16$, так как по условию $x\ge 0$, $y\ge 0$. Перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le r\le 4,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$$

якобиан отображения есть $J=r$.

Тогда

$$I=\iint_{G^*}r\left(\frac{r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi}{\sqrt{16-r^2}}+16-r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\iint_{G^*}\left(\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)+16r-r^3\right)drd\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)d\varphi\int_0^4\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^4 r\left(16-r^2\right)dr=$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\right)\int_0^4\frac{r^4dr}{\sqrt{16-r^2}}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{16r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=\left[\begin{array}{l}r=4\sin t\\ dr=4\cos tdt\\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4^4\cdot\sin^4 t\cdot 4\cos tdt}{4\cos t}+\frac{\pi}{2}\cdot\left(2\cdot 64-64\right)=$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2=\int_0^{+\infty}I\cdot e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx.$$

Так как $\left|ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}\right|\le de^{-c^2\left(1+x^2\right)}$ и интеграл $\int_0^{+\infty}\left(de^{-c^2\left(1+x^2\right)}\right)dx$ сходится, то интеграл $\int_0^{+\infty}ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $\left[c;d\right]\subset\left(0;+\infty\right)$ согласно признаку Вейерштрасса.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int_0^{+\infty}ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $\left[a;b\right]\subset\left(0;+\infty\right)$. Следовательно, повторный интеграл $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится и справедлива изменение порядка интегрирования:

$$I^2=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)}\Bigg|_0^{+\infty}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

7 Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f\left(x;y\right)=\frac{\operatorname{arctg}xy}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Интеграл $\Phi\left(y\right)=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ является несобственным, так как функция $f\left(x;y\right)$ не определена в точках $x=0$ и $x=1$.

б) для подынтегральной функции $f(x;y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, для которой

$$f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x\in[0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

5 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x)=-\cos x.$$

При $x\ge1$, $y\ge0$ для функции $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0,\qquad \frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

6 Вычислить интеграл Пуассона $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

Решение. Имеем

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\begin{bmatrix}t=xy,y>0,\\ dt=ydx\end{bmatrix}=y\int_0^{+\infty}e^{-x^2y^2}dx.$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot64\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2t)^2dt+32\pi=\frac{4\cdot64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos2t+\cos^2 2t\right)dt+$$

$$+32\pi=\frac{256}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4t\right)dt+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\left(\frac{3}{2}t-\sin2t+\frac{1}{8}\sin4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}+32\pi=64\pi+32\pi=96\pi.$$

7 Вычислить $\iint\limits_\Omega xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Решение. Зададим поверхность Ω параметрическими уравнениями

$$x=3zin\theta\cos\varphi,\ y=3\sin\theta\sin\varphi,\ z=3\cos\theta,$$

где $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le2\pi$.

Имеем:

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\sin^2\theta\cos\varphi;$$

$$\left|\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\sin^2\theta\sin\varphi;$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\cos\theta\sin\theta.$$

Тогда получим

$$\iint_\Omega xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(3\sin\theta\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\cos\varphi+$$

$$+(3\sin\theta\sin\varphi+3\cos\theta)9\sin^2\theta\sin\varphi+$$

$$+(3\cos\theta-3\sin\theta\sin\varphi)9\cos\theta\sin\theta)d\theta=$$

$$=27\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta =$$

$$=27\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = 54\pi\left(1-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 54\pi\cdot 1 = 54\pi .$$

8 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ и лежащей в первом октанте (рисунок 2. 16).

Р е ш е н и е. По определению

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} xdydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} zdxdy .$$

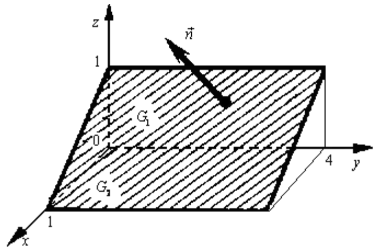

Рисунок 2. 16 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 8

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0;$$

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 0;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Интеграл $\iint\limits_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость Ω параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком “+”.

Тогда находим

$$= \int_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt = \int_1^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1} = \varepsilon .$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

4 Исследовать на равномерную сходимость интегралы

а) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ при $\alpha\in[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$ и $\alpha\in[0;+\infty)$;

б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$, $y\in\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. а) пусть $\alpha\in[\alpha_0;+\infty)$. Так как $e^{-\alpha x^2}\le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится равномерно по параметру α на $[\alpha_0;+\infty)$.

Пусть $\alpha\in(0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$, $\forall\, b>0$ возьмем $\eta_0=b$, $\eta_0'=b+1$, $\alpha_0=\frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int_{\eta_0}^{\eta_0'} \varepsilon^{-\alpha_0 x^2}dx = \int_b^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2}dx \ge e^{-\alpha_0(b+1)^2}\int_b^{b+1}dx = \frac{1}{e} = \varepsilon_0 .$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$;

Решение. Имеем:

$$\Phi'(y)=\int_0^y (2y+x)dx+\left(y^2+y^2+y^2\right)\cdot 1-\left(y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left(2xy-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y+3y^2=2y^2+\frac{y^2}{2}+3y^2=5{,}5y^2.$$

2 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy dx,\ y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Возьмем $\forall\ \varepsilon>0$. Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xy dx\right|\le\int_\eta^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\ \eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xy dx\right|<\varepsilon.$$

Согласно определению, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\mathbb{R}$.

3 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Покажем, что определение равномерной сходимости не выполняется. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{1}{e}$. Тогда $\forall\ b'\in(0;+\infty)$ $\exists\eta=b'$ и $y=\dfrac{1}{b'}$ такие, что

$$\int_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\begin{bmatrix} t=xy,\ y=\dfrac{t}{x}, \\ x=\dfrac{t}{y}, dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$\iint_{\Omega^+} zdxdy=\iint_{G_{xy}}(1-x)dxdy=\int_0^4 dy\int_0^1 (1-x)dx=2,$$

$$\iint_{\Omega^+} xdydz=\iint_{G_{yz}}(1-z)dydz=\int_0^4 dy\int_0^1 (1-z)dz=2.$$

Следовательно, $\iint_\Omega xdydz+ydzdx+zdxdy=4$.

Тема 14 Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса

1 По внешней стороне замкнутой поверхности Ω тела Q, заданного неравенствами $x^2+y^2\le z^2$, $0\le z\le 1$, вычислить интеграл $\iint_\Omega x^2zdydz+ydzdx+zdxdy$.

2 Вычислить $\iint_\Omega xdydz+ydzdx+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3 Вычислить $\oint_\Gamma (x+3y+2z)dx+(2x+z)dy+(x-y)dz$, где Γ – контур ΔABC с вершинами $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint_\Gamma \left(z^2-x^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy+\left(y^2-z^2\right)dz$ по контуру Γ, являющимся линией пересечения поверхностей $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=4$ и пробегаемый в положительном направлении ($z>0$).

5 Вычислить $\oint_\Gamma 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, где Γ – контур ΔABC: $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый в положительном направлении.

6 Вычислить $\iint_\Omega x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя полная поверхность конуса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=0$ $(0\le z\le 3)$.

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=25$.

8 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx - x^2dy + z^2dz$, где Γ – линия пересечения параболоида $x^2+z^2=1-y$ с координатными плоскостями.

9 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, где Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=9$, $x+y+z=0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z-1=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рисунок 2. 17).

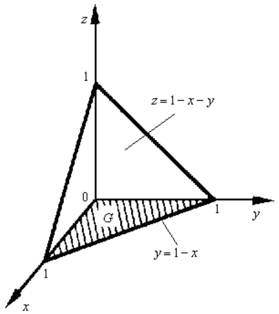

Рисунок 2. 17 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 1

Р е ш е н и е. Используя формулу Остроградского-Гаусса, имеем

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V}(1+1+1)dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy = 3\int_0^1\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right)dx =$$

$$=3\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 Вычислить

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1-3 Собственные и несобственный интегралы, зависящие от параметра,

1 Найти производные функций:

а) $F(x)=\int\limits_{x}^{x^2} e^{-xy^2}dy$; в) $F(x)=\int\limits_{0}^{x}(x+y)f(y)dy$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}f(\alpha x)dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_a^b x^y dy$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ -\infty < x < +\infty.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax\cos bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx$, $a>0$, $ac-b^2>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$, $\alpha>0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти производную функции

$$\Phi(y)=\int\limits_0^y\left(x^2+y^2+xy\right)dx.$$

$$C=\iint_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\right)dS=\iint_{\Omega}(2x-1)\cos\gamma\,dS=\iint_{G_{xy}}(2x-1)\,dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi,\ J=r, \\ 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r\left(2r\cos\varphi-1\right)dr=-4\pi .$$

11 Проверить, является ли потенциальным векторное поле

$$\vec{a}=2xyz\cdot\vec{i}\,++x^2z\cdot\vec{j}+x^2y\cdot\vec{k} .$$

Решение. Ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix}=\left(x^2-x^2\right)\vec{i}+\left(2xy-2xy\right)\vec{j}+\left(2xz-2xz\right)\vec{k}\equiv 0 .$$

Следовательно, заданное поле потенциально.

12 Проверить, являются ли соленоидальными следующие поля:

а) $\vec{a}_1=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{k}$;

б) $\vec{a}_2=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(3y^2+1\right)\cdot\vec{k}$.

Решение. а) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_1=z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2\equiv 0 .$$

Значит, поле $\vec{a}_1(M)$ соленоидально;

б) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_2=-2y+3y^2+1\not\equiv 0 .$$

Значит, поле $\vec{a}_2(M)$ не является соленоидальным.

$$I=\iint_{\Omega}\left(e^{2y}+x\right)dydz+\left(x-2y\right)dzdx+\left(y^2+3z\right)dxdy ,$$

где Ω – внешняя сторона поверхности шара

$$(x-1)^2+y^2+(z+5)^2=9 .$$

Решение. Имеем:

$P(x,y,z)=e^{2y}+x$; $Q(x,y,z)=x-2y$; $R(x,y,z)=y^2+3z$.

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1-2+3=2 .$$

По формуле Остроградского-Гаусса получим

$$I=2\iiint_{Q}dxdydz=2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=72\pi ,$$

так как $\iiint_{Q}dxdydz$ численно равен объему шара радиуса $R=3$.

3 Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma}x^2y^3dx+dy+zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,x^2+y^2=R^2,\ z=0\right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу (рисунок 2. 18)

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2 ,\quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0 ,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0 ,$$

по формуле Стокса, получаем

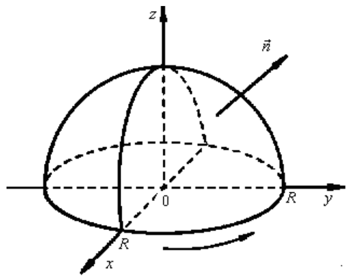

Рисунок 2. 18 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 3

$$\oint_{\Gamma^+} x^2y^3dx + dy + zdz = -3\iint_{\Omega^+} x^2y^2dxdy = -3\iint_G x^2y^2dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi,\\ J=r.\end{array}\right] = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,dr =$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R r^5dr = -\frac{R^6}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi =$$

$$=-\frac{R^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi = -\frac{R^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

4 Вычислить

$$I=\oint_{\Gamma}(x+y)dx+(x-z)dy+(y+z)dz$$

по контуру, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

Решение. Имеем

$$P=x+y,\ Q=x-z,\ R=y+z.$$

Тогда по формуле Стокса получим

$$I=\iint_{\Omega}(1+1)dydz+(0-0)dzdx+(1-1)dxdy=$$

$$=\iint_{\Omega}2dtdz=2\iint_{G}dydz=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

где G – плоскость ΔABC (внешняя сторона); это плоскость, отсекающая на осях координат отрезки длины единицы. Так как нормаль к внешней стороне плоскости образует с осью Ox угол $\alpha<\frac{\pi}{2}$, то по правилу вычисления поверхностных интегралов 2-го рода можно записать:

$$\iint_{\Omega}dydz=\iint_{D}dydz.$$

Имеем $\iint_D dydz=S$, где D – треугольник прямоугольный в плоскости $x=0$ с катетами длины 1 (D – проекция плоскости ΔABC на плоскость $x=0$), а S – площадь этого треугольника

$$S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}.$$

по формуле (8.16) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & x^2+z^2\end{vmatrix}=$$

$$=-2z\cdot\vec{i}-2x\cdot\vec{j}-2y\cdot\vec{k}=-2\left(z\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}\right).$$

10 Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $a=y\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по линии Γ, являющейся пересечением поверхностей $x^2+y^2=4$ и $z=3$.

Решение. Линия Γ представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащую в плоскости (рисунок 2. 22).

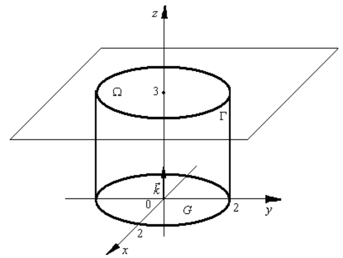

Рисунок 2. 22 – Поверхность к типовому примеру 10

Параметрические уравнения линии Γ имеют вид

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=3,\ t\in[0;2\pi].$$

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность Ω, «натянутую» на Γ. Возьмем в качестве Ω круг, границей которого является окружность Γ. Согласно выбранной ориентации контура, нормалью $\vec{n}$ к кругу Ω является единичный вектор $\vec{k}$ оси Oz.

Ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & -z\end{vmatrix}=(2x-1)\cdot\vec{k}.$$

Тогда по формуле Стокса циркуляция равна

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_2 = 1 .$$

Тогда поток через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$ равен

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Omega_2} dS = -\pi\cdot 1^2 = -\pi .$$

8 Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = xy\cdot\vec{i} + yz\cdot\vec{j} + xz\cdot\vec{k}$$

вдоль линии Γ, являющейся пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$.

Решение. Линия Γ представляет собой эллипс. Параметрические уравнения Γ можно получить с учетом того, что все точки Γ проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = 1$, параметрические уравнения которой есть

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0; 2\pi],$$

и те же точки линии Γ лежат на плоскости $z = 1 - x - y$.

Следовательно, параметрические уравнения Γ имеют вид:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1 - \sin t - \cos t,$$

где $t \in [0; 2\pi]$.

Тогда

$$dx = -\sin t dt,\quad dy = \cos t dt,\quad dz = (-\cos t + \sin t)dt .$$

Согласно формуле (8.14), циркуляция равна

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \oint\limits_{\Gamma} xydx + yzdy + xzdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t\cos t + \sin t\cos t(1 - \cos t - \sin t) +$$

$$+ \cos t(1 - \cos t - \sin t)(\sin t - \cos t))dt = -\pi .$$

9 Найти ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + +(z^2 + x^2)\vec{k}$$

в произвольной точке.

Решение. Заданное поле $\vec{a}(x;y;z)$ определено и непрерывно-дифференцируемо на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для координатных функций

$$X = x^2 + y^2,\ Y = y^2 + z^2,\ Z = z^2 + x^2$$

Тема 15-17 Скалярные и векторные поля

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U = xy$; в) $U = x - y - z$;

б) $U = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; г) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2 Найти производную в точке M по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U = y^3 + 4xy^2 - 3x + 6y - 1$, $M(2;1;0)$, $M_1(-1;5;0)$;

б) $U = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$, $M(1;1;1)$, $M_1(-1;0;3)$.

3 Найти градиент и его модуль скалярных полей:

а) $U = x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y + 9$; б) $U = xyze^{x+y+z}$.

4 Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; б) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

5 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника Ω, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

6 Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность части параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя).

7 Вычислить поток для векторных полей $\vec{a}$ и положительно ориентированных замкнутых поверхностей Ω:

а) $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xy - 1)\vec{j} - (z - y)\vec{k}$,

$\Omega = \{3x + 2y + z = 6, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$;

б) $\vec{a} = (y^2 + xz)\vec{i} + (yx - z)\vec{j} + (yz + x)\vec{k}$,

$\Omega = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = \sqrt{2}\}$.

8 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через поверхность цилиндра, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (нормаль внешняя).

9 Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^3 + y^3\right)\vec{j}$;

б) $\vec{a} = xyz\vec{i} + \left(2x + 3y + z\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$.

10 Найти ротор векторных полей:

а) $\vec{a} = xyz\vec{i} + \left(2x + 3y - z\right)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$;

б) $\vec{a} = \left(2x - y + 5z\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2 - 8z^2\right)\vec{j} + \left(x^3 - y^3 + 2z^3\right)\vec{k}$.

11 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$$

по контуру треугольника с вершинами $\left(1;0;0\right)$, $\left(0;1;0\right)$, $\left(0;0;1\right)$ по определению и с помощью формулы Стокса.

12 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = \left(x - y\right)\vec{i} + \left(y - z\right)\vec{j} + \left(z - x\right)\vec{k}$$

вдоль линии, состоящей из части винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{bt}{2\pi}$ от точки $A\left(a;0;0\right)$ до точки $B\left(a;0;b\right)$ и прямолинейного отрезка BA по определению и с помощью формулы Стокса.

13 Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a} = x^2z\vec{i} + y^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$;

б) $\vec{a} = y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$;

в) $\vec{a} = \left(yz - 2x\right)\vec{i} + \left(xz + zy\right)\vec{j} + xy\vec{k}$;

г) $\vec{a} = \left(2xy + z\right)\vec{i} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{j} + x\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.

Примеры оформления решения

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U\left(x,y\right) = x^2 - 2y$;

б) $U\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2$.

Решение. а) функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля имеют вид $x^2 - 2y = C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рисунок 2. 19, а), определенное на всей плоскости Oxy ;

расположенную над плоскостью $Oxyz$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского - Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть Q – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Ω, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1 = \left\{\left(x;y;z\right) \middle| z = 1 - x^2 - y^2\right\}$ и круга Ω_2 на плоскости Oxy (рисунок 2. 21).

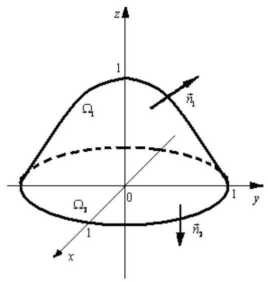

Рисунок 2. 21 – Поверхность к типовому примеру 7

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}\left(M\right)$ по формуле (8.12) равна:

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(M\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x\left(1+y\right)}{1+y^2} \equiv 0 .$$

На основании формулы Остроградского - Гаусса поток $\prod$ через замкнутую поверхность Ω равен нулю.

С другой стороны, обозначим через $\prod_1$ и $\prod_2$ потоки через поверхности параболоида Ω_1 и круга Ω_2 соответственно. По свойству аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода получим

$$\prod = \prod_1 + \prod_2 = \iint_{\Omega_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{\Omega_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0 .$$

Следовательно, искомый поток

$$\prod_1 = \iint_{\Omega_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \, dS = -\iint_{\Omega_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 \, dS .$$

Так как $z = 0$ на поверхности Ω_2 и $\vec{n}_2 = -\vec{k}$, то

$$\vec{a} = \frac{x^2 y}{1+y^2} \cdot \vec{i} + 2x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \vec{j} - \vec{k} ,$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4 \sin^3\varphi - r^3\right) dr = -2\pi \ .$$

6 Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} - \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{j} + +z\left(3y^2 + x\right) \cdot \vec{k}$$

в точках $M_1(-2;1;-2)$, $M_2(7;0;1)$, $M_3(0;0;0)$.

Решение. Заданное поле определено на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдем частные производные от функций

$$X = y^2,\ Y = \left(x^2 + y^2\right);\ Z = z\left(3y^2 + x\right)$$

являющихся координатами вектора $\vec{a}(M)$, и их значения в точках M_1, M_2 и M_3:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial Z}{\partial z} = 3y^2 + x$$

$$\frac{\partial Y(M_1)}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial Z(M_1)}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial Y(M_2)}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Z(M_2)}{\partial z} = 7,$$

$$\frac{\partial Y(M_3)}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Z(M_3)}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1) = 0 - 2 + 1 = -1,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_2) = 0 + 0 + 7 = 7,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, данное поле в точке M_1 имеет сток, в точке M_2 – источник, а в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

7 Используя теорему Остроградского - Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz\right) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \vec{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \cdot \vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$,

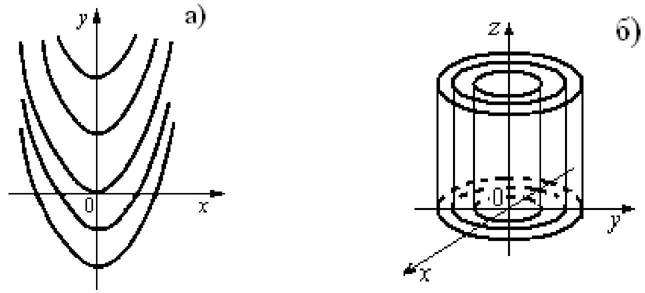

Рисунок 2. 19 – Линии (а) и поверхности (б) уровня к типовому примеру 1

б) заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рисунок 2. 19, б).

2 Найти производную скалярного поля $u = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(2;3;1)$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1} = (1;4;0)$, длина которого $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{17}$. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma = 0.$$

Вычислим значения частных производных функции $U = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = yz\big|_{P_0} = -1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1.$$

Получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

3 Найти градиент поля $U = x^2 + xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

Решение. Определим значения частных производных функции $U = x^2 + xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = \left(2x + yz\right)\big|_{P_0} = 0;$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\Big|_{P_0} = 2\,;\quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\Big|_{P_0} = -1\,.$$

Тогда имеем

$$\mathrm{grad}\,U(P_0) = 2j - k\,;\quad \frac{\partial U}{\partial l_{\max}} = \sqrt{5}\,.$$

4 Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой I.

Решение. Выберем направление оси Oz, совпадающее с направлением тока I. В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{\mathrm{H}} = \frac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I} = I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; ρ – расстояние от оси проводника до точки M. Найдем $\vec{I}\times\vec{r}$:

$$\vec{I}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 0 & 0 & I \\ x & y & z \end{vmatrix} = -yI\cdot\vec{\mathrm{i}} + xI\cdot\vec{\mathrm{j}}\,,$$

$$\vec{\mathrm{H}} = -\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}} + \frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}\,.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}\,.$$

Отсюда

$$\begin{cases} xdx + ydy = 0, \\ dz = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ z = c_1, \end{cases}$$

где $c_1 \geq 0$.

Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси Oz.

5 Вычислить поток вектора $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности Ω, представляющую собой часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 2$ (рисунок 2. 20).

Решение. Рассмотрим функцию $U(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

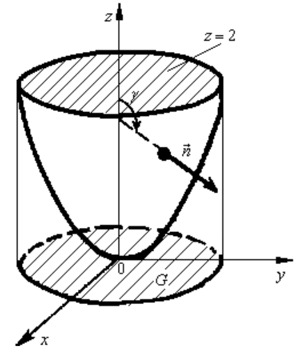

Рисунок 2. 20 – Поверхность к типовому примеру 5

Единичный нормальный вектор к внешней стороне поверхности Ω равен

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right),$$

так как $\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \pi$.

Тогда поток равен

$$\Pi = \iint_{\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS = \left[\begin{aligned} &\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \\ &dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \\ &= \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy, \end{aligned}\right] =$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega}\left(2y^3 - z\right)dxdy == \left[z = x^2 + y^2\right] = \iint_{G_{xy}}\left(2y^3 - x^2 - y^2\right)dxdy =$$

$$= \left[\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \\ &y = r\sin\varphi, J = r, \\ &0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}\right] = \iint_{G^*}\left(2r^3\sin^3\gamma - r^2\right)rdrd\varphi =$$