Вопросы для самоконтроля

О п р е д е л е н и я

1 Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Дайте определения: а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Дайте определение гамма-функции.

5 Дайте определение бета-функции.

6 Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.

7 Что называется сверткой функций?

8 Какие функции называются финитными?

9 Дайте определение пространства основных функций.

10 Что называется обобщенной функцией? Приведите примеры обобщенных функций.

11 Какая обобщенная функция называется а) регулярной, б) сингулярной?

12 Что называется слабой сходимостью обобщенных функций?

Ф о р м у л и р о в к и т е о р е м и ф о р м у л ы

1 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Перечислите свойства гамма-функции.

3 Перечислите свойства бета-функции.

4 В чем суть теоремы обращения?

5 Что называется косинус-, синус- преобразованиями Фурье?

6 Какими свойствами обладает свертка?

7 Перечислите основные операции над обобщенными функциями?

Д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м

1 Докажите непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Докажите дифференцируемость собственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Докажите интегрируемость собственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

5 Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

6 Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Таблица 3. 2 – Координаты вектора $\vec{n}$ в зависимости от задания поверхности Ω

Вид задания поверхности Ω	Угол между вектором нормали $\vec{n}$ и соответствующей координатной осью	Координаты вектора нормали
$z=z(x;y)$	$\gamma<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};-\frac{z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}};\right.$
$x=x(y,z)$	$\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(1;-\frac{x'_y}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}};-\frac{x'_z}{\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}}\right.$
$y=y(x,z)$	$\beta<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\left(-\frac{y'_x}{\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}};1;-\frac{z'_z}{\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}}\right.$
$F(x,y,z)=0$, $F'_z\neq 0$	$\gamma<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F'_z}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_y\neq 0$	$\beta<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F'_y}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_x\neq 0$	$\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\vec{n}=\frac{1}{F'_x}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)$
$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$		$\vec{n}=\left(\left\lvert\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\rvert\right)$

Если угол $\gamma>\frac{\pi}{2}$ ($\alpha>\frac{\pi}{2},\beta>\frac{\pi}{2}$), то вектор нормали равен ($-\vec{n}$).

Тема 14 **Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса**

14.1 Формула Остроградского-Гаусса
14.2 Формула Стокса

14.1 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами 2-го рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 1 Пусть

1) Q – элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iiint_{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz .$$

Формула Остроградского-Гаусса справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей. Также формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям.

Для вычисления объема тела, ограниченного замкнутой поверхностью Ω, используется формула:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy .$$

14.2 Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Теорема 2 Пусть

1) Ω – элементарная относительно оси Oz поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$, где функции $z(x;y)$, $z_x(x;y)$,

$$(\sigma', \varphi) = -(\sigma, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) =$$
$$= \varphi(0) = (\delta, \varphi) .$$

Отсюда следует, что $\sigma' = \delta$.

Видно, что производная в обычном смысле может не совпадать с производной в смысле обобщенных функций.

Операция сдвига аргумента для обобщенных функций. Пусть $f(x)$ есть локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Для нее определена операция сдвига аргумента T_h по правилу

$$T_h f(x) = f(x-h).$$

Если $\varphi \in D$, то

$$(T_h f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\varphi(x)dx = \begin{bmatrix} t = x-h, \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x+h)dx = (f, T_{-h}\varphi) .$$

Хотя значение обобщенной функции f в точке не определено, но для нее можно формально ввести операцию сдвига аргумента по аналогии с полученной формулой:

$$(T_h f, \varphi) = (f, T_{-h}\varphi).$$

При этом $T_h f \in D'$ при любом $h \in \mathbb{R}$.

Для функции Дирака $\delta(x)$ сдвиг $T_h \delta = \delta(x-h)$ и $\forall\ \varphi \in D$ есть

$$(\delta(x-h), \varphi) = (\delta, \varphi(x+h)) = \varphi(h).$$

Обобщенные функции используются при решении задач математической физики.

Производная обобщенной функции. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. И пусть $\forall\ \varphi \in D$ существует отрезок $[-A; A]$ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-A; A].$$

Отсюда $\varphi(-A) = \varphi(A) = 0$.

Тогда

$$(f',\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-A}^{+A} f'(x)\varphi(x)dx = \begin{bmatrix} u = \varphi(x), dv = f'(x)dx, \\ du = \varphi'(x), v = f(x) \end{bmatrix} =$$

$$= f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{+A} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f,\varphi').$$

Производной обобщенной функции $f \in D'$ называется обобщенная функция, определяемая формулой

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') \quad \forall\ \varphi \in D.$$

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \ n = 1,2,\ldots.$$

Отсюда следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$\left(f^{(n)},\varphi\right) = (-1)^n\left(f,\varphi^{(n)}\right) \quad \forall\ \varphi \in D.$$

П р и м е р. Найдем производную функции Хевисайда

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \ge 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ функция $\sigma(x)$ является разрывной. Поэтому она не имеет производной в обычном смысле. Однако $\sigma(x)$ является локально интегрируемой, и ее можно рассматривать как обобщенную функцию, действующую на основные функции по правилу

$$(\sigma,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

По определению для любой функции $\varphi \in D$ имеем:

$z_y(x;y)$ – непрерывны в замкнутой области G, проекции Ω на Oxy;

2) Γ – контур, ограничивающий область Ω, Γ_1 – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G;

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx.$$

С л е д с т в и е. Если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \text{ то}$$

1) $\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z;y;z)$, для которой:

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU.$$

Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число элементарных областей указанного вида.

Учитывая, что

$$\cos\gamma\, dS = dxdy,\ \cos\beta\, dS = dzdx,\ \cos\alpha\, dS = dydz,$$

формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]dS.$$

Данную формулу легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Тема 15 Скалярные поля

15.1 Понятие о задачах векторного анализа и теории поля
15.2 Определение скалярного поля
15.3 Производная по направлению
15.4 Градиент скалярного поля

15.1 Понятие о задачах векторного анализа и теории поля

При изучении многих процессов и явлений рассматриваются величины, значения которых определяются выбранной точкой пространства и моментом времени. Если такая величина принимает числовые значения, то, с математической точки зрения, задана скалярная функция точки и времени, если векторные – векторная функция точки и времени

$$U = U(P,t),\ \vec{a} = \vec{a}(P,t),\ P \in Q \subset \mathbb{R}^3,\ t \in [t_0;t_1].$$

Раздел математики, в котором изучаются функции вида $U = U(P,t)$, называют *векторным анализом*. В физике, электротехнике, теориях тепло- и массопереноса, упругости и пластичности методы векторного анализа используются для изучения *скалярных* и *векторных полей*, которые рассматриваются в качестве математических моделей конкретных процессов и явлений. Если процесс не зависит от времени (*стационарный*), то характеризующая его функция U не зависит от параметра t.

15.2 Определение скалярного поля

Стационарным скалярным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ которого определена скалярная функция

$$U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n).$$

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)\right]dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема и финитна на $\mathbb{R}$, то, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем неравенство:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |x\varphi(\xi)| \le |x| \cdot \max_{x\in[-A;A]} = c_0|x|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 1,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]}{x^2+\varepsilon^2}dx\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{c_0\varepsilon|x|}{x^2+\varepsilon^2}dx = \frac{c_0\varepsilon}{\pi}\ln\frac{A^2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0,$$

то получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \varphi)\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)\right]dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right]}{x^2+\varepsilon^2}dx + \frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\right) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Согласно определению это означает, что $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta(x)$.

5.4 Операции над обобщенными функциями

Над обобщенными функциями справедливы следующие операции.

Операция *умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию* $\psi(x)$.

Если $f \in D'$, а $\psi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то $\psi \cdot f$ – такая обобщенная функция, которая действует на произвольную функцию $\varphi \in D$ по следующему правилу:

$$(\psi \cdot f, \varphi) = (f, \psi \cdot \varphi).$$

Данная операция линейна и непрерывна из D' в D'.

Пример. Покажем, что $x\delta = 0$. В самом деле

$$(x\delta, \varphi) = (\delta, \varphi) = (x\varphi)(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0 \quad \forall\ \varphi \in D.$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)| dx < 1 .$$

Поскольку $\varphi_\varepsilon(x) \le \varphi_\varepsilon(0)$, то получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \right| = \left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \right| \le \varphi_\varepsilon(0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)| dx = \frac{1}{e},$$

что противоречит равенству $(\delta, \varphi_\varepsilon) = \frac{1}{e}$.

Противоречие доказывает, что δ-функция является сингулярной функцией.

Будем говорить, что последовательность (f_n), где $f_n \in D'$, *сходится* к $f \in D'$, если для любой функции $\forall\ \varphi \in D$ выполнено равенство

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi) \text{ при } n \to \infty .$$

Обозначается: $f_n \xrightarrow{\mathbf{D'}} f$

Такая сходимость называется *слабой сходимостью*.

Пример. Докажем, что в пространстве D' $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Каждая функция из пространства основных функций D абсолютно дифференцируема на всей числовой оси. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sin nx, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx dx = 0 .$$

Иногда вместо последовательности обобщенных функций $f_n \in D'$ рассматриваются функции f_ε, зависящие от параметра ε. В этом случае запись $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} f$ при $\varepsilon \to +0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall\ \varphi \in D .$$

В частности, запись $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta$ при $\varepsilon \to +0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (f_\varepsilon, \varphi) = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\ \varphi \in D .$$

Пример. Докажем, что $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$. Очевидно, что функции $f_\varepsilon(x)$ порождают регулярные функции в D'. Возьмем любую функцию $\varphi \in D$. Пусть ее носитель лежит на отрезке $[-A; a]$. Тогда

Функция $U(P)$ независимо от ее физического смысла называется *потенциалом* скалярного поля.

Скалярными полями являются поле температур тела, поле плотности заряда на поверхности или в среде, поле плотности масс тела и другие.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение поверхности уровня (*эквипотенциальной поверхности*) записывается в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = C ,$$

где постоянная величина C принимает такие значения, при которых данное равенство имеет геометрический смысл.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривают *линии уровня*, уравнения которых имеют вид

$$U(x_1, x_2) = C .$$

15.3 Производная по направлению

Пусть в области Q задано скалярное поле $U(P)$. Рассмотрим точку $P_0 \in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}$. Через точку P_0 проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{\tau}$, и выберем на ней точку P (рисунок 3.20).

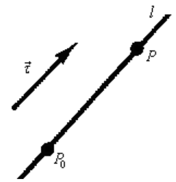

Рисунок 3.20 – Изменение потенциального поля $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}$

Производной по направлению вектора $\vec{\tau}$ функции $U(P)$ в точке P_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta U = U(P) - U(P_0)$ к величине перемещения $|P_0P|$ при $|P_0P| \to 0$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \lim_{|P_0P| \to 0} \frac{\Delta U}{|P_0P|}.$$

Величина $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке P_0 по выбранному направлению $\vec{\tau}$. Если $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l} > 0$, то скалярное поле в точке P_0 возрастает, в противном случае – убывает.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $\vec{\tau}$ имеет координаты

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рисунок 3.21).

Тогда производная по направлению $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ выражается через декартовы координаты:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

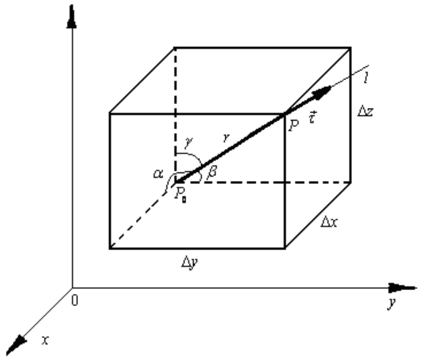

Рисунок 3.21 – Единичный вектор $\vec{\tau}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$

15.4 Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $U(P)$ называется вектор

$$(f, \varphi_n) \xrightarrow{\mathbf{D}} (f, \varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Множество всех обобщенных функций обозначается через D'. Множество D' является линейным пространством, так как

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi) \quad \varphi \in D.$$

В пространстве D' выделяется класс *регулярных обобщенных функций*: функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке и справедливо равенство:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Обобщенные функции также называются *распределениями*, так как плотность $\rho(x)$ распределения вещества неизмерима никаким прибором и представляет собой интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\varphi(x)dx$.

Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*.

Например, δ-функция, определяемая по правилу

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

является сингулярной обобщенной функцией.

В самом деле, линейность и непрерывность очевидны. Докажем его сингулярность. Предположим, что она является регулярной обобщенной функцией. Тогда существует такая интегрируемая функция f, что

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\ \varphi \in D.$$

В частности, это равенство должно быть выполнено для функции $\varphi_\varepsilon(x) \in D$, определенной равенством

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \text{ если } |x| < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x| \ge \varepsilon \end{cases}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Поэтому

$$(\delta, \varphi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = \varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{e}.$$

С другой стороны, подберем такое ε, что

5.3 Пространство обобщенных функций

Линейное пространство D с введенной выше сходимостью называется *пространством основных функций*.

Покажем, что функция

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, \text{ если } |x|<\varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x|\ge\varepsilon \end{cases}$$

принадлежит пространству D.

Действительно, односторонние производные всех порядков справа и слева в точках $x=-\varepsilon$ и $x=\varepsilon$ равны нулю. Поэтому функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. При этом $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная, так как $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x)=[-\varepsilon;\varepsilon]$. Значит, $\varphi_\varepsilon(x)\in D$. На рисунке 3.23 изображена данная функция при различных ε.

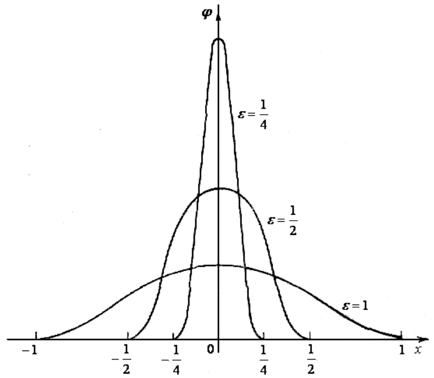

Рисунок 3.23 – График функции $\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, \text{ если } |x|<\varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x|\ge\varepsilon \end{cases}$

Обобщенной функцией $f:D\to\mathbb{R}$ называется функция, для которой выполнены следующие условия:

1) каждой функции $\varphi\in D$ сопоставляется число (f,φ);

2) для любых двух чисел α, β и любых двух функций $\varphi(x)$, $\psi(x)\in D$ выполнено равенство

$$(f,\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(f,\varphi)+\beta(f,\psi);$$

3) из $\varphi_n\xrightarrow{\mathbf{D}}\varphi$ при $n\to\infty$ следует, что

$\operatorname{grad}U(P_0)$, проекциями которого на оси Ox, Oy, Oz являются соответствующие частные производные функции $U(P)$:

$$\operatorname{grad}U(P_0)=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial l}=|\operatorname{grad}U|\cdot\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right).$$

Отсюда следует, что величина $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения при $\cos\left(\operatorname{grad}U;\vec{\tau}\right)=1$. Поэтому направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в точке.

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}}=|\operatorname{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

то модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля $U(P)$ в точке.

Тема 16 Векторные поля

16.1 Определение векторного поля
16.2 Поток векторного поля
16.3 Дивергенция векторного поля
16.4 Циркуляция и ротор векторного поля

16.1 Определение векторного поля

Стационарным векторным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке M которого определена векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ векторная функция $\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется проекциями $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ вектора $\vec{a}(M)$ соответственно на координатные оси Ox, Oy, Oz:

$$\vec{a}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}.$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат точки M. Тогда векторная функция $\vec{a}(M)$ называется *непрерывно дифференцируемой в области* Q.

Векторными полями являются:

– электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности;

– магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции;

– поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения;

– поле скоростей потока жидкостей, описываемое в каждой точке вектором скорости.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция и вихрь.

Векторной (силовой) линией Γ векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Векторными линиями в движущейся жидкости являются линии скоростей, в электростатическом поле – силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\mathrm{grad}U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U(M)$.

Пусть векторная линия Γ задана уравнением

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} .$$

Тогда вектор $d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$ в каждой точке направлен по касательной к линии Γ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Следовательно, координаты векторов $d\vec{r}$ и $\vec{a}(M)$ пропорциональны:

$$\frac{dx}{X(x;y;z)} = \frac{dx}{Y(x,y,z)} = \frac{dx}{Z(x,y,z)} .$$

Данная система дифференциальных уравнений определяет векторные линии поля $\vec{a}(M)$. Общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = c_1, \\ \varphi_2(x,y,z) = c_2. \end{cases}$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(0) = (\delta,\varphi),$$

где число δ соответствует непрерывной функции $\varphi(0)$.

Если для любой непрерывной функции выполнено данное равенство, то говорят, что δ есть *слабый предел* δ_ε при $\varepsilon\to+0$.

При таком подходе по плотности можно восстановить массу точки. Она равна

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,1) = (\delta,1) = 1 .$$

Выражение $(\delta_\varepsilon, f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)dx$ называется δ*-функцией Дирака*.

Носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $\varphi(x)\neq 0$ и *обозначается*:

$$\mathrm{supp}\,\varphi(x) = \overline{\{\, x |\ \varphi(x)\neq 0 \,\}} .$$

5.2 Финитные функции

Функция $\varphi(x)$ называется *финитной*, если она обращается в 0 вне некоторого отрезка.

Пусть D есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций. Очевидно, что D есть линейное пространство.

Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_n(x))$, $\varphi_n(x)\in D$, при любом $n\in\mathbb{N}$, *сходится* к функции $\varphi(x)\in D$, если выполнены следующие условия:

1) носители всех функций $\varphi_n(x)$, $\varphi(x)\in D$, лежат на некотором отрезке $[a;b]$:

$$\varphi_n(x)\neq 0 \quad \forall x\in[a;b] \quad n\in\mathbb{N},$$

2) при любом $k\in\mathbb{N}$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно на $[a;b]$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$: $\varphi_n^{(k)}(x)\rightrightarrows\varphi^{(k)}(x)$.

Обозначается: $\varphi_n(x)\xrightarrow{\mathbf{D}}\varphi(x)$ при $n\to\infty$.

Тема 5 Обобщенные функции

5.1 Определение функции Дирака
5.2 Финитные функции
5.3 Пространство обобщенных функций
5.4 Операции над обобщенными функциями

5.1 Определение функции Дирака

Понятие обобщенной функции было вызвано не стремлением к обобщениям, а конкретными физическими задачами, когда обычных функций оказалось недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Идею введения проиллюстрируем на следующем примере. Когда говорят о материальной точке массы 1, то это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса ε и массы 1. Плотность такого шара есть единица, поделенная на объем шара. Если в пространстве нет других масс, то плотность материи в пространстве будет распределена по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \text{ при } |x|\le\varepsilon,\\ 0 \text{ при } |x|>\varepsilon,\end{cases}$$

где $x\in\mathbb{R}$.

При этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=1$.

Если $\varepsilon\to+0$, то предельная плотность $\delta(x)$ примет следующий вид:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty \text{ при } x=0,\\ 0 \text{ при } x\ne0.\end{cases}$$

По плотности $\delta(x)$ нельзя восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция $\delta(x)$ не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле.

Будем рассматривать $\delta_\varepsilon(x)$ как несобственный интеграл, ставящий в соответствие каждой непрерывной в $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$ число

$$(\delta_\varepsilon,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)\,dx.$$

С *геометрической* точки зрения данная система задает два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии.

Если в некоторой области Q для системы уравнений выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=\varphi_1(x_0,y_0,z_0),\\ \varphi_2(x,y,z)=\varphi_2(x_0,y_0,z_0).\end{cases}$$

Пусть $\vec a(M)$ векторное поле в некоторой области Q и $\Omega\subset Q$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность.

16.2 Поток векторного поля

Потоком $\prod$ векторного поля $\vec a(M)$ через ориентированную поверхность Ω называется число, равное значению поверхностного интеграла 2-го рода:

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\vec a\cdot\vec n\,dS.$$

Поток $\prod$ зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec n$) и обладает всеми свойствами поверхностного интеграла 2-го рода.

Поток $\prod$ векторного поля $\vec a(M)$ через замкнутую поверхность Ω равен сумме потоков по внешней и внутренней сторонам этой поверхности:

$$\prod=\iint\limits_{\Omega^+}\vec a\cdot\vec n\,dS+\iint\limits_{\Omega^-}\vec a\cdot\vec n\,dS.$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec a(M)$. В частности, он определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости через область Q, ограниченную поверхностью Ω. Если $\prod>0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри области Q имеются *источники*. Если $\prod<0$, то внутри области Q имеются *стоки*, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

16.3 Дивергенция векторного поля

Дивергенцией (*расходимостью*) $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная функция, равная

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X(M)}{\partial x}+\frac{\partial Y(M)}{\partial y}+\frac{\partial Z(M)}{\partial z}.$$

Дивергенция характеризует мощность находящегося в точке M источника при $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$, то в точке M нет ни источника, ни стока.

Теорема 1 (Остроградского - Гаусса) Если векторная функция $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области Q, ограниченной замкнутой поверхностью Ω, то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность Ω в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области Q от дивергенции этого векторного поля:

$$\oiint\limits_{\Omega}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint\limits_{Q}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz.$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского - Гаусса в векторной форме*.

Рассмотрим область $Q\subset\mathbb{R}^3$, ориентированную линию Γ и векторное поле $\vec{a}(M)$, определенное на Γ. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге Γ.

16.4 Циркуляция и ротор векторного поля

Циркуляцией C векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой Γ называется число, равное значению криволинейного интеграла 1-го рода:

$$C=\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl.$$

Циркуляция обладает всеми свойствами криволинейного интеграла 1-го рода.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности Γ (рисунок 3.22).

Тогда функция $\hat{f}(y)=F[f](y)$ имеет на $(-\infty;+\infty)$ непрерывную производную, причем

$$\frac{d}{dy}\big(F[f]\big)=F\big[(-ix)f\big];$$

– если $f(x)$ непрерывна, а функции $xf(x)$, $x^2f(x)$, …, $x^nf(x)$ – абсолютно интегрируемы, то

$$\frac{d^n}{dy^n}\big(F[f]\big)=F\Big[(-ix)^n f\Big];$$

– если $F[f]=F[g]$, то $f(x)=g(x)$;

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)\in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x\in\mathbb{R}$)

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\,dt$$

называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 12 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то свертка $f*g$ есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$.

Теорема 13 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$

Свертка обладает *свойствами*:

– (*коммутативность*) $f*g=g*f$;

– (*распределительный закон*) $(f+g)*h=f*h+g*h$;

– (*сочетательный закон*): $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y)=0$ и

$$F[f](y)=-iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y)=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin yx\,dx,$$

$$f(x)=v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdx=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_s(y)\sin yxdx.$$

4.4 Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье обладает *свойствами:*

– (*линейность*) $F[\alpha\cdot f+\beta\cdot g]=\alpha\cdot F[f]+\beta\cdot F[g]$,

$$F^{-1}[\alpha\cdot f+\beta\cdot g]=\alpha\cdot F^{-1}[f]+\beta\cdot F^{-1}[g];$$

– (*преобразование Фурье от сдвига*)

$$F[f(x-a)]=e^{iay}\cdot F[f];$$

– (*преобразование Фурье от производной*) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, то

$$F[f']=iy\cdot F[f];$$

– если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ принадлежат пространству $L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F\left[f^{(n)}\right]=(iy)^n\cdot F[f];$$

– пусть $f(x)$ и ее первообразная $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ – непрерывна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. Тогда

$$F[g]=\frac{F[f]}{iy};$$

– (*дифференцирование преобразования Фурье*) пусть функции $f(x)$, $xf(x)$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$.

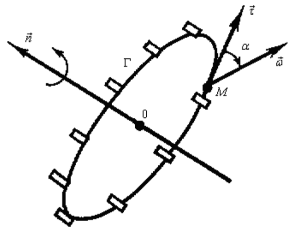

Рисунок 3.22 – Физический смысл циркуляции

Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость $\vec{\omega}$ вращения пластинки вокруг оси, проходящей через центр окружности Γ. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии Γ.

Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M_0 называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Символическая форма записи $\operatorname{rot}\vec{a}$ имеет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (Стокса) Циркуляция C непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность Ω, опирающуюся на Γ:

$$\oint_{\Gamma}(\vec{a}\cdot\vec{\tau})dl=\iint_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$$

Тема 17 Специальные виды векторных полей

17.1 Потенциальное векторное поле
17.2 Соленоидальное векторное поле
17.3 Гармоническое поле

17.1 Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным (безвихревым),* если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$, что $\vec{a} = \operatorname{grad} U(M)$. Функция $U(M)$ называется в этом случае *потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, так как оно определяется одной скалярной функцией $U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле.

Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для потенциального векторного поля

$$\vec{a}(M) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k},$$

выполняется равенство

$$\vec{a}(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Свойства потенциальных векторных полей:

– если векторное поле $\vec{a}(M)$, потенциально, то его потенциал $U(M)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого;

– если векторное поле $\vec{a}(M)$ задано в односвязной области Q, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке M:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0.$$

Примером потенциального поля является поле тяготения.

17.2 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным (трубчатым),* если в любой точке M дивергенция равна 0:

$$\operatorname{div}\vec{a}(\mathrm{M}) = 0.$$

Свойства соленоидальных полей:

ные, то справедлива формула

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f.$$

Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{iyx}dy$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(x-t)y}dt.$$

4.3 Синус и косинус преобразования Фурье

Интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx dx - v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx dx.$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$F^{-1}[f](x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yx dy + v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yx dy.$$

Косинус-преобразованием Фурье называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx.$$

Синус-преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx\,dx.$$

Очевидно, что $F[f] = F_c[f] - iF_s[f]$.

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yx dy = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} F_c(y)\cos yx dy.$$

существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а несобственный интеграл – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.

4.2 Преобразование Фурье

Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx.$$

Поскольку

$$\left|f(x)e^{-iyx}\right|=|f(x)|\cdot\left|e^{-iyx}\right|=|f(x)|\cdot|\cos yx-i\sin yx|=$$
$$=|f(x)|\cdot\sqrt{\cos^2 yx+\sin^2 yx}=|f(x)|$$

и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $x\in\mathbb{R}$.

Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$, называется *преобразованием Фурье* и обозначается

$$F[f](y)=\hat{f}(y).$$

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{iyx}dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается

$$F^{-1}[f](y)=f(x).$$

Функция $F[f]$ называется *образом Фурье* функции $f(x)$.

Теорема 11 (формула обращения) Если функция $f(x)\in L^1$ и существуют правая $f'_-(x)$ и левая $f'_+(x)$ производ-

– соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков;

– из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность Ω равен нулю;

– (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*) потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой;

– в соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля);

– в односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность Ω, опирающуюся на замкнутый контур Γ, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура Γ.

Примером соленоидального поля является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.

17.3 Гармоническое поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим (лапласовым),* если оно является как потенциальным, так и соленоидальным.

Гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U(M)$, которая является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB?

2 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода.

3 Сформулируйте определения: а) интегральных сумм для криволинейного интеграла 2-го рода; б) криволинейного интеграла 2-го рода.

4 Какие множества называются клетками в $\mathbb{R}^n$?

5 Что называется клеточным множеством в $\mathbb{R}^n$?

6 Какие множества называются измеримыми по Жордану?

7 Что такое мера Жордана?

8 Что такое разбиение множества, и какими свойствами оно обладает?

9 Что называется интегральной суммой функции $f(x;y)$?

10 Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу функции $f(x;y)$?

11 Дайте определение двойного интеграла.

12 Какие координаты называются криволинейными?

13 Какая область называется односвязной?

14 Дайте определения: а) интегральной суммы, б) нижней и верхней сумм Дарбу для тройного интеграла.

15 Что называется тройным интегралом?

16 Дайте определение поверхностного интеграла 1-го рода.

17 Дайте определение поверхностного интеграла 2-го рода.

18 Что называется поверхностью?

19 Какие поверхности называются простыми? Что называется границе поверхности, внутренней точкой поверхности?

20 Какие поверхности называются замкнутыми? Дайте определение особых и неособых точек поверхности.

21 Какая поверхность называется гладкой, кусочно-гладкой?

22 Какая плоскость называется касательной к поверхности?

23 Дайте определение нормального вектора к поверхности.

24 Дайте определение внешней и внутренней нормалей к поверхности, односторонней и двусторонней поверхности.

25 Какое поле называется скалярным? Приведите примеры скалярных полей.

26 Что называется поверхностью уровня скалярного поля?

27 Что называется производной по направлению?

28 Что называется градиентом скалярного поля?

29 Какое поле называется стационарным векторным полем? Приведите примеры стационарных векторных полей.

30 Дайте определение векторной линии.

31 Что называется потоком векторного поля? В чем состоит его физический смысл?

32 Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?

33 Что называется циркуляцией векторного поля и в чем состоит ее физический смысл?

34 Что называется ротором векторного поля?

35 Какое поле называется потенциальным? Перечислите свойства потенциальных полей.

36 Какое поле называется соленоидальным? Перечислите свойства

– $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$;

– $\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(m;n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad\forall\ n,m\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$;

– $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}$;

– (*связь гамма- и бета- функций*) $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Тема 4 Интеграл Фурье

4.1 Представление функций интегралом Фурье

4.2 Преобразование Фурье

4.3 Синус и косинус преобразования Фурье

4.4 Свойства преобразования Фурье

4.1 Представление функций интегралом Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке действительной оси $\mathbb{R}$. *Интегралом в смысле главного значения* называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b}f(x)dx,\ b>0.$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения есть предел того же интеграла, но при $a=b$.

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл, то и

– $\Gamma(s)>0$;

– $\Gamma(1)=1$;

– $\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$;

– (*формула понижения*) $\Gamma(n)=(n-1)! \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$;

– гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k\in\mathbb{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^k\,dx;$$

– *(интеграл Пуассона)* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

– (*формула дополнения*) если $0<p<1$, то

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p};$$

– (*формула Стирлинга*) при $s\to+\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1)\approx\sqrt{2\pi s}\cdot\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

3.3 Определение бета функции

Функция

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad p>0, \qquad q>0$$

называется *бета-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

3.4 Свойства бета функции

Бета-функция обладает следующими *свойствами*:

– бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка;

– $\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p)$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1)$, $\mathrm{B}(p;q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q)$;

соленоидальных полей.

37 Какое поле называется гармоническим?

Формулировки теорем и формулы

1 Перечислите свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

2 Как вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода в следующих случаях задания плоской кривой: а) в параметрическом виде; б) в полярных координатах; в) в явном виде?

3 Перечислите геометрические и физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода?

4 Перечислите основные свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

5 Как вычисляется криволинейный интеграл 2-го рода в случаях: а) параметрического задания; б) явного задания кривой интегрирования?

6 Перечислите свойства клеток в пространстве $\mathbb{R}^n$.

7 Перечислите свойства клеточных множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$.

8 Сформулируйте критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$.

9 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.

10 В чем суть критерия интегрируемости?

11 Перечислите свойства двойного интеграла.

12 Чему равен якобиан при переходе от декартовых координат к полярным?

13 Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

14 Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.

15 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x;y;z)$.

16 Перечислите свойства тройного интеграла.

17 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

18 Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

19 Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

20 Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

21 При вычислении каких величин используется тройной интеграл?

22 Перечислите свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

23 Как вычисляется поверхностный интеграл 1-го рода в случаях: а) параметрического, б) явного, в) неявного заданий поверхности?

24 Для вычисления каких величин используется поверхностный интеграл 1-го рода?

25 Перечислите свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

26 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

27 Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода?

28 Какие координаты имеет нормальный вектор при векторном задании поверхности, при явном задании поверхности?

29 Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной: а) в векторной форме; б) параметрическими уравнениями; в) в явном виде.

30 Запишите уравнение нормали к поверхности, заданной: а) в векторной форме; б) параметрическими уравнениями; в) в явном виде.

31 Какое выражение называется первой квадратичной формы поверхности?

32 Как определяется площадь поверхности через двойной интеграл?

33 Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода при условии, что поверхность Ω задана: а) параметрическими уравнениями; б) явном виде; в) неявно.

34 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

35 Запишите формулу связи поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.

36 Сформулируйте теорему Остроградского - Гаусса в векторной форме.

37 Сформулируйте теорему Стокса в векторной форме.

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами 1 и 2-го рода.

2 Сформулируйте теорему и докажите о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.

3 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.

4 Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в двойном интеграле.

5 Доказать формулу Грина.

6 Сформулировать и доказать теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

7 Сформулируйте и докажите теорему Остроградского-Гаусса.

8 Сформулируйте и докажите теорему Стокса.

сходится. Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)\,dx$, $\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)\,dy$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)\,dx.$$

Теорема 7 (дифференцирование по параметру) Пусть функции $f(x;y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ *непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике* Π_∞, *а интеграл* $\int_a^b \dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c;d]$. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *является дифференцируемой на отрезке* $[c;d]$ *функцией и справедливо равенство*

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x;y)\,dx\right)=\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx.$$

Тема 3 Интегралы Эйлера

3.1 Определение гамма функции
3.2 Свойства гамма функции
3.3 Определение бета функции
3.4 Свойства бета функции

3.1 Определение гамма функции

Функция

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\quad s>0,$$

называется *гамма-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

3.2 Свойства гамма функции

Гамма-функция обладает следующими свойствами:

– гамма-функция является непрерывной функцией переменной s;

$$\Pi_\infty = \left\{ (x;y) \middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty,\, c \le y \le d \right\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *равномерно сходится по параметру* y *на отрезке* $[c;d]$. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *является непрерывной функцией переменной* y *на отрезке* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x;y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)\,dx.$$

Теорема 5 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике* Π_∞, *а интеграл* $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на отрезке* $[c;d]$. *Тогда функция* $\int_a^b f(x;y)\,dx$ *является интегрируемой на* Π_∞ *и существует интеграл* $\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)\,dx$.

Теорема 6 (о перестановке порядка интегрирования) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на множестве* Π_∞ *и выполнены следующие условия:*

1) несобственный интеграл $\int_a^b |f(x;y)|\,dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на любом отрезке* $[c';d'] \subset (c;d)$;

2) несобственный интеграл $\int_c^d |f(x;y)|\,dy$ *сходится равномерно по параметру* x *на любом отрезке* $[a';b'] \subset (a;b)$;

3) один из двух повторных интегралов

$$\int_c^d dy\int_a^b |f(x;y)|\,dx,\quad \int_a^b dx\int_c^d |f(x;y)|\,dy$$

Вопросы и задачи на понимание

1 Назовите общие и различные между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?

2 Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?

3 Назовите способы задания поверхности. Для каждого способа задания приведите пример.

4 Приведите пример замкнутой поверхности.

5 Приведите примеры двусторонних и односторонних поверхностей.

6 Запишите формулы для вычисления поверхностного интеграла 2-го рода, в случае, когда поверхность задана: а) параметрическими уравнениями; б) явном виде $z=z(x,y)$, $y=y(x,z)$, $x=x(y,z)$; в) неявно.

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1 Определение собственного интеграла, зависящего от параметра
1.2 Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

1.1 Определение собственного интеграла, зависящего от параметра

Пусть на множестве $Y \subset \mathbb{R}$ определены функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, y \in Y \right\}$$

определена функция $f(x;y)$, которая при любом значении параметра $y \in Y$ интегрируема по Риману. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ представляет собой функцию параметра y, определенную на множестве Y.

Собственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx,$$

переменная y называется *параметром*.

В частности, если $\varphi(y) = a$ и $\psi(y) = b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx.$$

1.2 Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть $Y = [c;d] \subset \mathbb{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$. Рассмотрим область $\overline{G}$, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$

3) $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y.

Пусть интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n = 1,2,3,\ldots$, $a \le \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y) = \int\limits_a^{\eta_n} f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 3 (Дирихле) Пусть

1) $\forall y \in Y$ функции $f(x;y)$, $g(x;y)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны как функции x на полуинтервале $[a;+\infty)$;

2) функция $F(x;y)$, являющаяся при любом $y \in Y$ первообразной по x функции $f(x;y)$, ограничена при $y \in Y$, $x \in [a;+\infty)$;

3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} \le 0$ при $y \in Y$, и $x \in [a;+\infty)$;

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ функция $\psi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ и $|g(x;y)| \le \psi(x)$ для $y \in Y$ и $x \in [a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

2.4 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 4 (непрерывность) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике

$$\Rightarrow \left|\int_{b'}^{b} f(x;y)dx\right| < \varepsilon .$$

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int\limits_{a}^{\eta} f(x;y)dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx$ равномерно сходится, когда $\Phi(y;\eta)\rightrightarrows\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Теорема 1 (критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx$ *сходился равномерно по параметру* y *на множестве* $Y\in\mathbb{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ *такое, что* $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ *и* $\forall\ y\in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x;y)dx\right|<0 .$$

Следствие. Если $\exists\varepsilon_0>0$ *такое, что* $\forall b'\in[a,b)$ $\exists\eta_0,\eta_0'\in[b';b)$ *и* $\exists y_0\in Y$ *такие, что*

$$\left|\int_{\eta_0}^{\eta_0'} f(x;y)dx\right|\ge\varepsilon_0 ,$$

то интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx$ *не сходится равномерно по параметру* y *на множестве* Y.

2.3 Признаки равномерной сходимости

Теорема 2 (Вейерштрасса) Пусть существует функция $g(x)\ge0$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $g(x)$ *определена на* $[a;b)$ *и интегрируема на* $[a;\eta]$, $a<\eta<b\le+\infty$;

2) $|f(x;y)|\le g(x)$ *для* $\forall x\in[a;b)$ *и* $\forall y\in Y$;

$$\bar{G}=\left\{(x;y)\middle|\varphi(y)\le x\le\psi(y),\ -\infty<c\le y\le d<\infty\right\},$$

которая является областью определения функции $\Phi(y)$.

Теорема 1 (непрерывность) Пусть

1) функции $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *непрерывны на отрезке* $[c;d]$, *причем* $\varphi(y)\le\psi(y)$,

2) функция $f(x;y)$ *непрерывна на множестве* $\bar{G}$.

Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ *есть непрерывная на* $[c;d]$ *функция и справедлива формула*

$$\lim_{\lambda\to0}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx=\int_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)}\lim_{y\to y_0} f(x;y)dx .$$

Теорема 2 (дифференцирование по параметру) Пусть 1) функции $f(x;y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ *непрерывны на прямоугольнике* $\Pi=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$ и $\bar{G}\subset\Pi$; *2) функции* $\varphi(y)$, $\psi(y)$ *непрерывно-дифференцируемы на отрезке* $[c;d]$. *Тогда интеграл* $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ *является дифференцируемой функцией на* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx\right)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx+f(\psi(y);y)\psi'(y)-f(\varphi(y);y)\varphi'(y).$$

Теорема 3 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ *непрерывна на прямоугольнике* Π.

Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx$ *является интегрируемой функцией и справедливо равенство*

$$\int_{c}^{d}dy\int_{a}^{b} f(x;y)dx=\int_{a}^{b}dx\int_{c}^{d} f(x;y)dy .$$

Тема 2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.1 Определение несобственных интегралов, зависящих от параметра
2.2 Поточечная и равномерная сходимость
2.3 Признаки равномерной сходимости
2.4 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

2.1 Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x;y)$ определена на множестве

$$\Pi_\infty = \left\{ (x;y) \middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty,\ y \in Y \right\}.$$

И пусть функция $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty < a < b \le +\infty$ (b может быть конечным или бесконечным);

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a < \eta < b \le +\infty$.

Если b *конечно*, то $\lim\limits_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x;y)\,dx$ есть несобственный интеграл от неограниченной функции; если b *бесконечно*, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ есть несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $b = +\infty$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx,$$

где переменная y называется *параметром*.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы, зависящие от параметра y:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^b f(x;y)\,dx,\ \Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)\,dx.$$

2.2 Поточечная и равномерная сходимость

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ называется *сходящимся (поточечно)*, если $\forall\ y \in Y$ и $b \le +\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x;y)\,dx$:

$$\lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f\,dx = \int\limits_a^b f\,dx \Leftrightarrow \forall\ y \in Y\ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists b'(y;\varepsilon) < b:\ \forall\ \ \eta \in (b';b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int\limits_a^b f(x;y)\,dx - \int\limits_a^\eta f(x;y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Поточечная сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a f(x;y)\,dx$, зависящего от параметра y определяет сходимость его при каждом фиксированном $y \in Y$ как несобственного.

Поскольку

$$\int\limits_a^b f(x;y)\,dx = \int\limits_a^\eta f(x;y)\,dx + \int\limits_\eta^b f(x;y)\,dx,$$

то для сходящегося интеграла справедливо равенство

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_\eta^b f(x;y)\,dx = 0.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ называется *равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b'(y;\varepsilon) > 0$, $a \le b' < b$, что для всех $y \in Y$ и всех η, $b' < \eta < b$, выполняется неравенство $\left| \int\limits_{b'}^b f(x;y)\,dx \right| < \varepsilon$:

$$\int\limits_a^\eta f\,dx \underset{\eta\to b}{\rightrightarrows} \int\limits_a^b f\,dx \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists b'(y;\varepsilon) < b:\ \forall\ y \in Y \text{ и } \forall\ \eta \in (b';b) \Rightarrow$$