б) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C .$$

в) имеем $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$$= \int(1 + \sin x)dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C .$$

г) имеем:

$$\int\frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2}dx = \int\left(3x^2 - 2x + 5 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx - 7\int\frac{dx}{x} + 8\int\frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x - 7\cdot\ln x + 8\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + C .$$

д) имеем: $\int(1 - \sqrt{x})^3 dx = \int\left(1 - 3\sqrt{x} + 3x - \sqrt{x^3}\right)dx =$

$$= \int dx - 3\int\sqrt{x}dx + 3\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = x - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= x - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C .$$

е) имеем: $\int\cos^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1 + \cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\cos x dx =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C .$$

ж) имеем: $\int\frac{x^2}{1 - x^2}dx = \int\frac{x^2 - 1 + 1}{1 - x^2}dx = \int\left(-1 + \frac{1}{1 - x^2}\right)dx =$

$$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C .$$

и) имеем: $\int\sqrt{1 - \sin 2x}dx = \int\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx =$

Р е ш е н и е. На рисунке 3. 3 изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB = a$. Тогда по условию $AB = CD = BC = a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; $BE=CF$. Полагая $\angle BAD=\alpha$, выразим площадь трапеции как функцию от α :

$$S = S(\alpha),\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} .$$

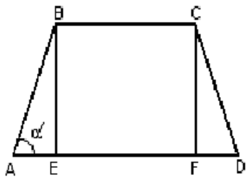

Рисунок 3. 3 – Геометрическая интерпретация задачи *6*

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\text{ABCD}} = S_{ABE} + S_{BCFE} + S_{CDF}$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE} = S_{CDF} = \frac{1}{2}AE\cdot BE = = \frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha\ = \frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha ,$$

$$S_{BCFE} = BC\cdot BE = a^2\sin\alpha .$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha + a^2\sin\alpha .$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$ на экстремум.

$$S'(\alpha) = a^2(\cos 2\alpha + \cos\alpha).$$

Решая уравнение $S'(\alpha) = 0$, получим:

$$\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0\ \Rightarrow\ \cos\alpha = -1 \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} ,$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} .$$

Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S''(\alpha)=-a^2\left(2\sin 2\alpha+\sin\alpha\right).$$

Так как $\sin\frac{2\pi}{3}>0$, $\sin\frac{\pi}{3}>0$, $a>0$, то $S''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$.

Значит, при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Тема 7 Исследование функции

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+x-1$; е) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$;

б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; ж) $f(x)=x-\cos x$;

в) $f(x)=e^{-x^2}$; и) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$;

г) $f(x)=x+36x^2-2x^3-x^4$; к) $f(x)=1+x^2-\frac{x^4}{2}$;

д) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{4}}$; л) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; г) $y=x^2e^{-x}$;

б) $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$; д) $y=x+\operatorname{arctg}2x$;

Раздел 4 **Интегральное исчисление функции действительной переменной**

Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x^2}dx$; ж) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}-\frac{1}{x^7}\right)dx$; и) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int\frac{6x^4+5x^4-4x^3+7x^2-9x+11}{x^2}dx$; к) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;

г) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$; л) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$;

д) $\int\frac{3}{4+x^2}dx$; м) $\int\frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$;

е) $\int\frac{dx}{9-x^2}$; н) $\int\operatorname{th}^2 x\,dx$.

2 Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{sgn}x$ не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку $x=0$.

Примеры оформления решения

1 Используя основные свойства неопределенного интеграла, вычислить интегралы:

а) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx$; д) $\int(1-\sqrt{x})^3dx$;

б) $\int\operatorname{tg}^2x\,dx$; е) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;

в) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$; ж) $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$;

г) $\int\frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx$ и) $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int\left(2\cdot 3^2\right)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C.$$

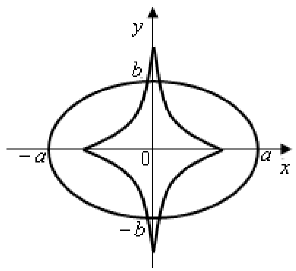

Рисунок 3. 15 – Эллипс и его эволюта

5 Составить уравнение эволюты параболы

$$y^2 = x + \frac{1}{2}.$$

Решение. Продифференцируем два раза уравнение параболы:

$$2yy' = 1,\ y' = \frac{1}{2y},$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 0,\ y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y + \frac{1 + \frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме:

$$\xi = 3y^2,\ \eta = -4y^3.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явном виде

$$\eta^2 = \frac{16}{27}\xi^3.$$

в) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$; е) $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; д) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$;

б) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; е) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

в) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$; ж) $f(x) = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$;

г) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; и) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$.

Примеры оформления решения

1 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

Решение. Имеем:

$$y' = 5x^4 + 5,$$
$$y'' = 20x^3.$$

Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла.

Если $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута.

Итак, кривая выпукла на промежутке $(-\infty;0)$, вогнута на промежутке $(0;+\infty)$.

2 Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = (x+1)^2(x-2)$; б) $y = \sqrt[3]{(x-5)^5} + 2$.

Решение. а) первая и вторая производные равны соответственно

$$y' = 3(x^2 - 1),$$
$$y'' = 6x.$$

Так как $y'' = 0$ в точке $x = 0$, то исследуем эту точку на перегиб. В окрестности точки $x = 0$ при $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба, при этом $y_{пер} = -2$;

б) имеем:

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. В окрестности точки $x = 5$ получим при $x < 5$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 5$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 5$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = 2$.

3 Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$.

Решение. 1) функция определена на промежутках

$$(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty).$$

Так как

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2} = -\infty,\ \lim_{x\to -2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2} = +\infty,$$

то прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой;

2) наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{(x+2)} - x\right] = -4.$$

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид

$$y = x - 4;$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{(x+2)} = \infty.$$

4 Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

*Решение***.** Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция неопределенна в точках, где знаменатель обращается в

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-a^2(1-\cos t)\right|}{\left(2a^2(1-\cos t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}}.$$

3 Найти координаты центра кривизны кривой $x^3 + y^4 = 2$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Дифференцируем уравнение два раза:

$$3x^2 + 4y^3\cdot y' = 0,\ 6x + 12y^2\cdot y'^2 + 4y^3\cdot y'' = 0.$$

Так как $x = 1$, $y = 1$, то из первого выражения находим, что $y' = \dfrac{-3}{4}$, а из второго получаем $y'' = -\dfrac{51}{16}$.

Подставляя в формулы для координат центра кривизны, получим

$$\xi = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''} = 1 - \frac{\left(1+\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{51}{16}} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{1+\frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}} = \frac{26}{51},\ \text{т. е. } C\left(\frac{43}{68};\frac{26}{51}\right).$$

4 Найти эволюту эллипса $\Gamma = \{x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le 2\pi\}$.

Решение. Имеем

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t,\ x'' = -a\cos t,\ y'' = -b\sin t.$$

Подставляя в формулы для эволюты, получим

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a}\cos^3 t,\ \eta = \frac{b^2 + a^2}{b}\sin^3 t.$$

Данные уравнения являются параметрическими уравнениями астроиды (рисунок 3. 15).

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$, $M(0; a)$; б) $y = x e^x$, $M\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $y = x^3$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить кривизну кривой $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Находим $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Тогда кривизна кривой $y = \ln x$ в любой ее точке M с абсциссой x есть

$$K = \frac{\left|-\dfrac{1}{x^2}\right|}{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{|x|}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем

$$K\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2 Найти кривизну в любой точке циклоиды

$$\Gamma = \{ x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi \}$$

Решение. Имеем

$$x' = a(1 - \cos t),\ x'' = a\sin t,$$

$$y' = a\sin t,\ y'' = a\cos t.$$

Тогда

$$x'y'' - y'x'' = a^2\left(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t\right) = -a^2(1 - \cos t),$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 - \cos t).$$

Подставляя в формулу для вычисления кривизны, получим

нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть $D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$.

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty,\ \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty,\ \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Следовательно, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода.

Поскольку $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$, то здесь функция неограничена.

График функции пересекает координатные оси в только в начале координат, так как $y = 0 \iff x = 0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x) = -f(x)$, т. е.

$$\frac{(-x)^3}{3 - x^2} = \frac{-x^3}{3 - x^2}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \ge 0$;

2) асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ раны бесконечности, то прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{\left(3 - x^2\right)x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = 0,$$

Прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой графика функции;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$y' = \frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x^4}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

Функция y' определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y' > 0$ и $y' < 0$ для любого $x \geq 0$.

Имеем:

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} > 0,\ 9-x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 3,$$

т. е. функция возрастает на $\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$.

Аналогично:

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} < 0,\ 9-x^2 < 0 \Rightarrow x > 3,$$

т. е. функция убывает на $[3;\infty)$;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вычисляем вторую производную функции $y = \frac{x^3}{3-x^2}$:

$$y'' = \frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2 - \left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4} = \frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Функция y'' определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y'' > 0$, $y'' < 0$ для любого $x \geq 0$.

Имеем:

$$\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3} > 0,$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{3},$$

т. е. кривая вогнута на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

в) векторная функция $\vec{r}(t) = (a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} > 0.$$

Тогда $l'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $s(t) = t\sqrt{a^2+b^2} + C$. Из начального условия $l(0) = 0$, имеем $C = 0$. При этом длина винтовой линии равна

$$L_{\Gamma} = T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $t = \frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}};\ y = a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}};\ z = b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\},$$

где $0 \leq l \leq T\sqrt{a^2+b^2}$.

г) дифференциал длины дуги равен

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Для винтовой линии имеем

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Тема 10 Кривизна кривой

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y = x^2$, $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$;

б) $x^2 - xy + y^2 = 1$, $M(1;1)$;

в) $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$ при $t = 1$;

г) $r = a(1-\cos\varphi)$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$;

г) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

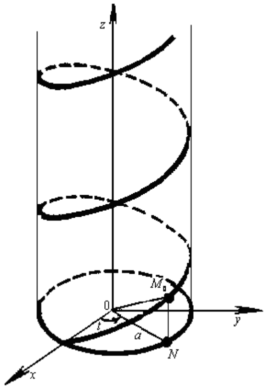

Рисунок 3. 14 – Годограф функции
$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t;\, y = a\sin t;\, z = bt \,\middle|\, 0 \le t \le T \right\}$$

Р е ш е н и е . а) координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2},\ y_0 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ z_0 = b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}'(t_0)$:

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{a\sqrt{3}}{2},\ y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}.\ z'(t_0) = b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - b\left(z - \frac{b\pi}{3}\right) = 0;$$

б) вектор касательный к годографу вектора $\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t; a\cos t; b).$$

Тогда $\cos\gamma = \dfrac{z'(t)}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\frac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3} < 0,$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3 - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -\sqrt{3},\ x > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла на $(\sqrt{3};\infty)$.

В точке $x = 0$ имеем $y'' = 0$ и $y''(x) < 0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $y''(x) > 0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x = 0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой;

5) локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $y''(x)$ локальные экстремумы. Так как $y''(3) = 0$, точка A_1 с абсциссой $x = 3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x = -3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} y(x) = -4{,}5$,

$\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} y(x) = 4{,}5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 3.1.

Таблица 3. 1 – Результаты исследования функции

x	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 3. 1, строим график данной функции для $x \in [0;\infty)$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 3.4).

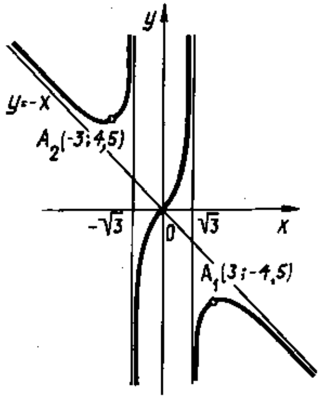

Рисунок 3. 4 – График функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Тема 8 Построение графика функции

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$; д) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}$;

б) $f(x)=\sqrt{2x^3+9x^2}$; е) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$;

в) $f(x)=e^x-x$; ж) $f(x)=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$;

г) $f(x)=\ln x-x+1$; и) $f(x)=\sin x-\sin^2 x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x=\dfrac{1}{4}(t+1)^2,\ y=\dfrac{1}{4}(t-1)^2$; в) $x=\dfrac{t^2}{t-1},\ y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

б) $x=\dfrac{t^2}{1-t^2},\ y=\dfrac{1}{1+t^2}$; г) $x=-5t^2+2t^5,\ y=-3t^2+2t^3$;

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $xy^2-y^2-4x=0$; б) $x^6+2x^3y=y^3$ (положить $y=x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=\dfrac{5}{\varphi}$; б) $r=\dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

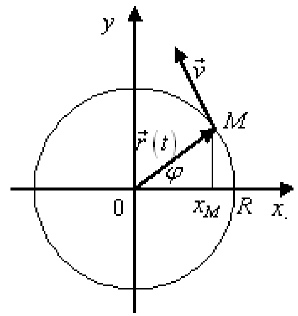

Рисунок 3. 13 – Геометрическая интерпретация задачи 7.

Скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{r}$ есть:

$$\vec{v}\cdot\vec{r}=-R^2\cos\omega t\cdot\sin\omega t+R^2\sin\omega t\cdot\cos\omega t=0,$$

т. е. векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

Отсюда следует, что вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка M.

Найдем ускорение $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}=\vec{r}''(t)=\frac{d\,\vec{v}(t)}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}=$$
$$=-\omega^2\left(R\cos\omega t\,\vec{i}+R\sin\omega t\,\vec{j}\right)=-\omega^2\,\vec{r}(t).$$

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{r}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной угловой скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности.

8 К годографу винтовой линии (рисунок 3. 14)

$$\Gamma=\left\{x=a\cos t;y=a\sin t;z=bt\,\middle|\,0\le t\le T\right\}$$

а) найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t_0=\dfrac{\pi}{3}$;

б) доказать, что касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью Oz;

в) записать натуральное уравнение винтовой линии;

г) найти дифференциал длины дуги.

в точке $M_0(0;2;1)$.

Р е ш е н и е . Данной точке соответствует значение параметра $t=1$.

Имеем

$$x'(t)=2t,\ y'(t)=1,\ z'(t)=3t^2 .$$

Подставляя значение $t=1$, получаем

$$x'(1)=2,\ y'(1)=1,\ z'(1)=3 .$$

Тогда уравнение касательной:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3},$$

уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0)+1(y-2)+3(z-1)=0$$

или $2x+y+3z-5=0$.

7 Найти скорость и ускорение материальной точки M, движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности

$$x^2+y^2=R^2 .$$

Р е ш е н и е . Пусть M – произвольная точка окружности. Обозначим через φ угол между радиус-вектором точки M и положительным направлением оси Ox. По условию

$$\varphi=\omega t,$$

где t – время движения.

Выразим координаты точки M как функции времени (рисунок 3. 13):

$$x=R\cos\varphi=R\cos\omega t,$$

$$y=R\sin\varphi=R\sin\omega t .$$

Следовательно, радиус-вектор точки M

$$\vec r=x\vec i+y\vec j=R\cos\omega t\,\vec i+R\sin\omega t\,\vec j,$$

скорость $\vec v(t)$ движения точки M

$$\vec v=\vec r\,'(t)=(R\cos\omega t)'\,\vec i+(R\sin\omega t)'\,\vec j=-R\omega\sin\omega t\,\vec i+R\omega\cos\omega t\,\vec j$$

,

модуль скорости

$$|\vec v|=\sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2+(R\omega\cos\omega t)^2}=\omega R .$$

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Исследовать функцию $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е . *1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию*. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 1 .$$

Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1-|x|^2\right)\ge 0$, которое верно для любых вещественных x.

Итак, $D(f)=\mathbb{R}$.

Функция $\dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций).

Функция непериодическая.

Поскольку

$$y(-x)=\arcsin\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=y(x),$$

то функция является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0;+\infty)$.

При $x=0$ имеем $y=0$. Других нулей функция не имеет. На полупрямой $(0;+\infty)$ функция является положительной;

2) асимптоты графика функции. В силу непрерывности функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $\mathbb{R}$, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x\to+\infty$ вычислим следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\arcsin 0=0\,.$$

Отсюда следует, что прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to+\infty$.

Аналогично устанавливается, что прямая $y=0$ – горизонтальной асимптотой при $x\to-\infty$;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.

Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0;+\infty)$. Вычислим производную функции при $x\neq 1$:

$$y'=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{\left|1-x^2\right|}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)}{1+x^2}.$$

Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как $y'(1+0)=-1$, $y'(1-0)=1$, то точка $x=1$ является точкой излома. Значит, имеем только одну точку возможного экстремума $x=1$.

Промежутки монотонности функции определяются знаком производной: $y'>0$ при $x\in[0;1)$, $y'<0$ при $x\in(1;+\infty)$.

Знак производной при переходе через точку $x=1$ меняется с плюса на минус. Поэтому в точке $x=1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$.

Отметим, что в точке $x=1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв 1-го рода. Значит, точка графика $\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$ является угловой точкой;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
Вторая производная при $x\neq 1$ имеет вид

$$y''=\frac{-4x\operatorname{sgn}\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Найдем координаты направляющего вектора касательной к кривой $\big(x'(t);y'(t);z'(t)\big)$:

$$\big(x'(t);y'(t);z'(t)\big)=\left(2e^{2t};-\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}};0\right),$$

в частности в точке $t=0$

$$\vec{\tau}=\big(x'(t);y'(t);z'(t)\big)\Big|_{t=0}=\left(2e^{2t};-\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}};0\right)\Bigg|_{t=0}=\left(2;-\frac{8}{3};0\right).$$

Тогда единичный вектор годографа имеет вид

$$\vec{\tau}^{\,0}=\frac{2}{10/3}\vec{i}-\frac{8/3}{10/3}\vec{j}+\frac{0}{10}\vec{k}=0{,}6\vec{i}-0{,}8\vec{j}\,.$$

4 Найти производную скалярного произведения векторов

$$\vec{r}_1=3t\,\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{r}_2=2\vec{i}-3t\,\vec{j}+\vec{k}\,.$$

Решение. Согласно свойствам дифференцируемых векторных функций, имеем

$$\frac{d(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{dt}=\vec{r}_1\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dt}+\vec{r}_2\cdot\frac{d\vec{r}_1}{dt}=$$

$$=\left(3t\,\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}\right)+\ 2\vec{i}-3t\,\vec{j}+\vec{k}\ \cdot 3\vec{i}=-6+6=0\,.$$

5 Дано уравнение движения $\vec{r}=3t\,\vec{i}-4t\,\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

Решение. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t)=3t\,,\ \ y(t)=-4t\,,\ \ z(t)=0\,.$$

Из первого уравнения исключим параметр t

$$t=\frac{x}{3}$$

и подставим во второе

$$y=-4\cdot\frac{x}{3}.$$

Отсюда уравнение траектории движения

$$4x+3y=0\,,\ \ z=0\,.$$

Вектор скорости движения есть

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}\,.$$

6 Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой

$$\vec{r}=\left(t^2-1\right)\vec{i}+(t+1)\vec{j}+t^3\,\vec{k}$$

б) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$, $y = 1$, $z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$, $t = 0$.

6 Найти дифференциал длины дуги кривой

$x = a\cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2 + b^2}\sin t \cos t$, $z = b\sin^2 t$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1 + t^2}\vec{j} + \vec{k} .$$

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ y(t) = \frac{2t}{1 + t^2},\ z(t) = 1 .$$

Из первых двух уравнений исключаем параметр t:

$$x^2 + y^2 = \frac{\left(1 - t^2\right)^2 + 4t^2}{\left(1 + t^2\right)^2} = 1 .$$

Следовательно, годографом вектор-функции является окружность

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,$$

из которой исключена точка $(-1;0;1)$.

При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(x;y;z)$ на годографе движется от точки $(-1;0;1)$ против часовой стрелки (если наблюдать из точки, расположенной выше плоскости $z = 1$). При этом

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -1,\ \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0 .$$

2 Вычислить $\lim\limits_{t\to 2}\vec{r}(t)$, если $\vec{r}(t) = (3t + 2)\vec{i} + (2t - 1)\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$.

Р е ш е н и е. Согласно определению

$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t) = \lim_{t\to 2}(3t + 2)\vec{i} + \lim_{t\to 2}(2t - 1)\vec{j} + \lim_{t\to 2}(1 - t)\vec{k} = 8\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} .$$

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = e^{2t}\,\vec{i} - (t + 8)^{\frac{4}{3}}\vec{j}$$

при $t = 0$.

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = e^{2t},\ y(t) = -(t + 8)^{\frac{4}{3}},\ z(t) = 0 .$$

Направление выпуклости определяется знаком второй производной:

– $y'' < 0$ при $x \in [0;1)$, значит график функции на этом промежутке выпуклый,

– $y'' > 0$ при $x \in (1;+\infty)$, значит график функции на этом промежутке вогнут.

Так как вторая производная обращается в нуль лишь при $x = 0$ и при переходе через точку $x = 0$ меняет знак, то в точке $(0;0)$ график функций имеет перегиб.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 3. 2.

Таблица 3. 2 – Результаты исследования функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	2	+	Не сущ.	–
y''	0	–	Не сущ.	+
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$
	Точка перег.		max Угл.точ.	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 3.2, строим график данной функции на полупрямой $[0;\infty)$.

Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 4. 5).

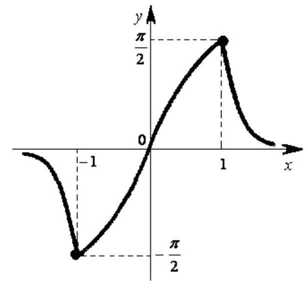

Рисунок 3. 5 – График функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}$

2 Исследовать функцию, заданную параметрическими уравнениями, и построить график

$$x=\frac{t}{1-t^2},\ y=\frac{t\left(1-2t^2\right)}{1-t^2}.$$

Решение. 1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на множестве

$$T=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Поскольку

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty}y(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}y(t)=-\infty,$$

то $x=0$ – вертикальная асимптота кривой.

Найдем односторонние пределы в точках $t=-1$ и $t=1$:

$$\lim_{t\to-1-0}x(t)=+\infty,\ \lim_{t\to-1+0}x(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0}y(t)=-\infty,\ \lim_{t\to-1+0}y(t)=+\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0}x(t)=+\infty,\ \lim_{t\to1+0}x(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0}y(t)=-\infty,\ \lim_{t\to1+0}y(t)=+\infty.$$

Отсюда следует, что при $t\to-1$ и $t\to1$ возможны наклонные асимптоты.

Так как при $t\to1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1\pm0}\left(1-2t^2\right)=-1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{t\to1\pm0}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2}=\frac{3}{2},$$

то прямая $y=-x+\frac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Так как при $t\to-1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1\pm0}\left(1-2t^2\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{t\to-1\pm0}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2}=-\frac{3}{2},$$

то прямая $y=-x-\frac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Итак,

$$x\in(0;+\infty)\cup(-\infty;+\infty)\cup(-\infty;0),$$
$$y\in(-\infty;-\infty)\cup(+\infty;-\infty)\cup(+\infty;+\infty);$$

2) так как

График функции $r(\varphi)=\dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$ называется *декартов лист* и изображен на рисунке 3. 12. В декартовой системе координат декартов лист задается уравнением:

$$x^3+y^3=3xy.$$

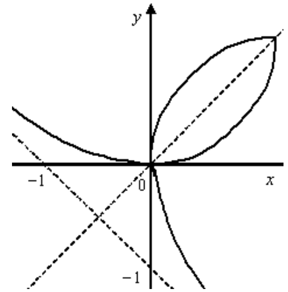

Рисунок 3. 12 – Декартов лист

Тема 9 Векторные функции

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec r=(2t-1)\vec i+(-3t+2)\vec j+4t\vec k$, $t\in\mathbb{R}$;

б) $\vec r=\sqrt{1-t^2}\,\vec i+\sqrt{1+t^2}\,\vec j$, $t\in[0;1]$;

в) $\vec r=(2t-1)\vec i+(-3t+2)\vec j+4t\vec k$;

г) $\vec r=4\operatorname{ch}t\,\vec i-\vec j+3\operatorname{sh}t\,\vec k$, $t\in\mathbb{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec r=3t\,\vec i+\left(4t-t^2\right)\vec j$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec r=(2t-1)\vec i+\left(t^2+1\right)\vec j-\left(t^3+2\right)\vec k$$

при $t=0$.

4 Показать, что векторы

$$\vec r=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+\vec k\ \text{ и }\ \vec r\,'$$

перпендикулярны.

5 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x=4\sin^2 t$, $y=4\sin t\cos t$, $z=2\cos^2 t$, $t=\dfrac{\pi}{4}$;

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \; y = \frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Найдем производные

$$\dot{x} = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}, \qquad \dot{y} = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\dot{y}=0$ при $t=0$ и $t=\sqrt[3]{2}$.

Найдем производные f' и f'':

$$y_x' = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}, \qquad y_{xx}'' = \frac{2\left(1+t^3\right)^4}{3\left(1-2t^3\right)^3}.$$

При $t \in (-\infty;-1)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит функция убывает и вогнута, следовательно, подходит к асимптоте сверху.

При $t\in(-1;0)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция убывает и вогнута. При этом

$$x_{\min} = y_{\min} = 0$$

При $t \in \left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция возрастает и вогнута. При этом

$$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \sqrt[3]{4}, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \sqrt[3]{2}.$$

При $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла. При этом

$$x_{\max} = x\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}, \quad y_{\max} = y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{4}.$$

При $t \in \left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = +\infty$, то $O(0;0)$ является точкой возврата.

$$x(-t) = \frac{-t}{1-(-t)^2} = -x(t), \qquad y(-t) = \frac{-t\left(1-2(-t)^2\right)}{1-(-t)^2} = -y(t),$$

то график функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$. Поэтому рассмотрим график функции только на множестве $T_1 = [0;1)\cup(1;+\infty)$;

3) на множестве $T_1 = [0;1)\cup(1;+\infty)$ имеем $x=0$ при $t=0$, $y=0$ при $t=0$ и $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

На множестве $T_1 = [0;1)\cup(1;+\infty)$ $\dot{x}=0$ и $\dot{y}=0$ при

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0{,}47 \text{ и } t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1{,}51.$$

Тогда $x_1 = 0{,}6$, $y_1 = 0{,}3$ и $x_2 = -0{,}7$, $y_2 = 2{,}3$, т. е. имеем точки возможного экстремума $M_1(0{,}6;0{,}3)$ и $M_2(-0{,}7;2{,}3)$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \qquad y_{xx}'' = \frac{\frac{d}{dt}\left(y_x'\right)}{\dot{x}(t)} = \frac{-4t\left(1-t^2\right)^3\left(3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}.$$

Отсюда $y_{xx}'' \le 0$ при $t\in[0;1)$, $y_{xx}'' \ge 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 3. 3):

Таблица 3. 3 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(0;0{,}47)$	0,47	$(0{,}47;1)$	$(1;1{,}51)$	1,51	$(1{,}51;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(0;0{,}6)$	0,6	$(0{,}6;+\infty)$	$(-\infty;-0{,}7)$	-0,7	$(-0{,}7;0)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(0;0{,}3)$	0,3	$(0{,}3;-\infty)$	$(+\infty;2{,}3)$	2,3	$(2{,}3;+\infty)$
Знак y_{xx}''	+	+	+	–	–	–

7) строим часть кривой, соответствующую множеству $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$. Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рисунок 3. 6).

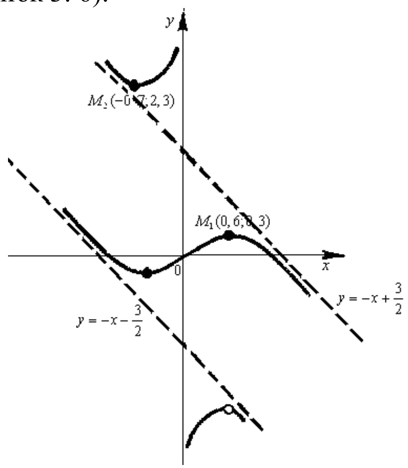

Рисунок 3. 6 – График функции

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \; y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

3 Исследовать функцию заданную параметрическими уравнениями и построить график

$$x = 2t - t^2, \; y = 3t - t^3.$$

Решение. 1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на □ .

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \; \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty, \; \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty.$$

Таким образом, возможны наклонные асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t-t^3}{2t-t^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет;

2) симметрией и периодичностью функция не обладает;

3) имеем $x=0$ при $t=0$ и $t=2$; $y=0$ при $t=0$, $t=-\sqrt{3}$ и $t=\sqrt{3}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = 2(1-t), \qquad \dot{y}(t) = 3(1-t^2).$$

$$\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \ge 0.$$

Кроме того, функция $r(\varphi)$ является 2π периодической, то достаточно рассмотреть промежуток

$$\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right) \cup \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4};\pi\right].$$

Поскольку

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то прямая

$$r = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi \to -\frac{\pi}{4} - 0$.

Аналогично

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \sin(\varphi - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и прямая

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi \to \frac{3\pi}{4} + 0$.

Так как $\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, то это одна и та же прямая.

Если $\cos\varphi = 0$, то следует r =0, т. е. имеем точку $x = y = 0$.

При $\cos\varphi \ne 0$, полагая $t = \mathrm{tg}\,\varphi$, получим параметрическое задание кривой:

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{1-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t}.$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=0$, $\dot{y}=0$ в точках $t_1 = -\operatorname{arsh}1$ и $t_2 = \operatorname{arsh}1$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\operatorname{sh}^2 t - 1}{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t}, \qquad y_{xx}'' = -\frac{\operatorname{sh}^2 t\left(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t\right)+1}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Так как $y_{xx}''(-\operatorname{arsh}1) > 0$, то $t_{\min} = -\operatorname{arsh}1$. Тогда

$$x_{\min} = 1/\sqrt{2}, \; y_{\min} = -1/2.$$

Так как $y_{xx}''(\operatorname{arsh}1) < 0$, то $t_{\max} = \operatorname{arsh}1$. Тогда

$$x_{\max} = 1/\sqrt{2}, \; y_{\max} = 1/2;$$

6) строим график функции $x(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, $y(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ (рисунок 3. 10). Отображая симметрично относительно оси $0y$, получаем график исходной функции (рисунок 3.11).

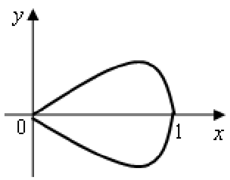

Рисунок 3. 10 – График функции

$$x(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \; y(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

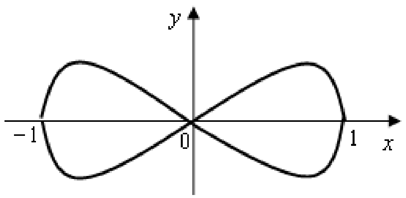

Рисунок 3. 11 – График функции $x^2 = y^2 + x^4$

5 Исследовать и построить график функции

$$r(\varphi) = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Решение. Данная функция при тех значениях φ, для которых, как следует из определения полярного радиуса, выполнено неравенство

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=1$, $\dot{y}=0$ при $t=1$ и $t=-1$. Тогда точки возможного экстремума $W(1;2)$, $N(-3;-2)$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3\left(1-t^2\right)}{2(1-t)} = \frac{3(1+t)}{2}, \; y_{xx}'' = \frac{3}{4(1-t)}, \; t \neq 1.$$

Отсюда $y_{xx}'' > 0$ при $t \in (-\infty;1)$, $y_{xx}'' < 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 3. 4);

Таблица 3. 4 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(+\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;-\infty)$
Знак y_{xx}''	+	+	+		-

7) строим график функции. Первая производная y_x' не определена в точке $t=1$, поэтому точка $W(1;2)$ является угловой точкой графика.

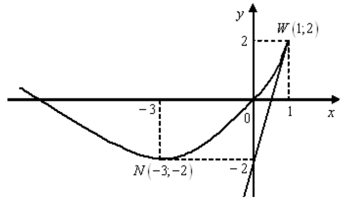

Рисунок 3. 7 – График функции $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

4 Исследовать функцию, заданную неявно и построить ее график: $x^2 = y^2 + x^4$

Решение. 1 способ. Разрешая данное уравнение относительно y, получим $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$.

Функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -x\sqrt{1-x^2}$ симметричны относительно оси $0x$, то исследование можно провести для функции y_1. Эта функция определена на отрезке $[-1;1]$, т. е. $D(y_1) = [-1;1]$.

Функция y_1 равна нулю при $x=-1$, $x=1$, $x=0$. На области определения $D(y_1)$ функция является нечетной.

Находим производные функции y_1:

$$y_1' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y_1'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

Точками возможного экстремума являются точки:

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3=-1,\ x_4=1.$$

Точки x_3 и x_4 являются граничными точками области определения $D(y_1)$. Определим характер точек x_1 и x_2 с помощью второй производной:

$$y_1''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}}=4>0,$$

$$y_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}}=-4<0.$$

Следовательно, $x_1=-1/\sqrt{2}$ является точкой минимума, $x_2=1/\sqrt{2}$ – точкой максимума. Значения функции y_1 в этих точках соответственно равны:

$$y_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\frac{1}{2},$$

$$y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

В точке $x=0$ вторая производная обращается в нуль. При $x\in(-1;0)$ имеем $y_1''<0$, при $x\in(0;1)$ имеем $y_1''>0$. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой перегиба графика функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$.

График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рисунке 3. 8. Отображая построенный график симметрично относительно оси $0x$, получим график исходной функции $y=\pm x\sqrt{1-x^2}$ (рисунок 3. 9). Видно, в точке $O(0,0)$ график пересекает себя, поэтому является точкой самопересечения.

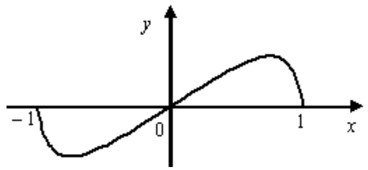

Рисунок 3. 8 – График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$

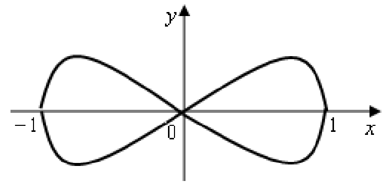

Рисунок 3. 9 – График функции $x^2=y^2+x^4$

<u>2 способ</u>. Полагая $y=x^2\operatorname{sh}t$ из уравнения $x^2=y^2+x^4$, получим $x^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$. Отсюда $x=\pm\frac{1}{\operatorname{ch}t}$. Поскольку $y(-x)=y(x)$, то график функции симметричен относительно оси $0y$, и поэтому будем рассматривать случай $x>0$.

Тогда параметрические уравнения кривой имеют вид:

$$x(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}t}, \qquad y(t)=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

Исследование данной функции проводится по схеме для функций, заданных параметрическими уравнениями.

1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на $\mathbb{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty}y(t)=0, \qquad \lim_{t\to+\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

Таким образом, наклонные асимптоты отсутствуют;

2) так как $x(-t)=x(t)$, $y(-t)=-y(t)$, то график функции симметричен относительно оси $0x$.

Свойством периодичности функция не обладает;

3) имеем $x=1$, $y=0$ при $t=0$;