## *Лекция 7.* РЯД ТЕЙЛОРА

1. Ряд Тейлора.
2. Голоморфные функции.
3. Нули аналитической функции. Теорема единственности.

### 1. Ряд Тейлора.

**Теорема 1 (Тейлора).** *Функция* $f(z)$*, аналитическая в круге* $|z-z_0|<R$*, единственным образом разлагается в ряд Тейлора*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,$$

*где* $c_0=f(z_0)$, $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

► *Шаг 1. Разложение*. Пусть $z$ — произвольная точка круга $|z-z_0|<R$. Опишем из точки $z_0$, как из центра, окружность $c_\rho$ радиуса $\rho<R$ так, чтобы точка $z$ находилась внутри этой окружности (рис. 1).

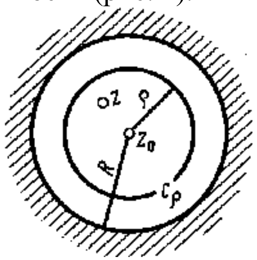


Рис.1

Согласно условию, функция $f(z)$ является аналитической внутри области, ограниченной окружностью $c_\rho$, и на самой окружности $c_\rho$. Поэтому ее значение в точке $z$ можно найти по интегральной формуле Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$



где $\zeta$ – точка окружности $c_\rho$.

Преобразуем выражение $\dfrac{1}{\zeta-z}$ следующим образом

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\cdot\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\frac{\dfrac{1}{\zeta-z_0}}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Для любого $\zeta\in c_\rho$ имеем $|\zeta-z_0|=\rho$ и $|z-z_0|<|\zeta-z_0|=\rho$.

Значит, $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=q_z<1$.

Следовательно, выражение $\dfrac{1}{\zeta-z}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{1}{\zeta-z_0}$ и знаменателем $\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$.

Таким образом, $\dfrac{1}{\zeta-z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$.

Так как для всех $\zeta\in c_\rho$ имеем $\left|\dfrac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right|<\dfrac{(z-z_0)^k}{\rho^{k+1}}$ при $k=0,1,2,\ldots$ и числовой ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{\rho^{k+1}}$ в $|z-z_0|<\rho$ сходится, то ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ сходится равномерно относительно $\zeta$ на $c_\rho$. Равномерная сходимость этого ряда не нарушится при умножении всех членов на функцию $\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}$, непрерывную относительно $\zeta$ на $c_\rho$, и, следовательно, ограниченную на $c_\rho$ по модулю:

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(z)}{2\pi i}\cdot\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}.$$

При этом членами полученного ряда являются функции $\frac{f(\zeta)}{2\pi\, i}\cdot\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ непрерывные по $\zeta$. Поэтому возможно почленное интегрирование этого ряда вдоль окружности $c_\rho$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\,\zeta=\frac{1}{2\pi\, i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[\oint_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right](z-z_0)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot(z-z_0)^k,$$

где $c_k=\frac{1}{2\pi\, i}\cdot\oint_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$.

Функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$, $k=0,1,2,\ldots$, является аналитической в двухсвязной области $0<|z-z_0|<R$. Поэтому окружность $c_\rho$ можно заменить любым замкнутым кусочно-гладким контуром $\Gamma$, целиком лежащим в области $0<|z-z_0|<R$ и окружающим точку $z_0$. Используя интегральную формулу типа Коши, коэффициенты $c_k$ находятся по формуле

$$c_k=\frac{1}{2\pi\, i}\cdot\oint_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Так как $z$ произвольная точка круга $|z-z_0|<R$, то что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ сходится к $f(z)$ в круге $|z-z_0|<R$ всюду, причем в круге $|z-z_0|\le r<R$ этот ряд сходится равномерно.

*Шаг 2. Единственность.* Предположим, что в круге $|z-z_0|<R$ имеет место разложение $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\cdot(z-z_0)^k$, где хотя бы один из коэффициентов $b_k$ отличен от $c_k$.



Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, получим

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-z_0)+3b_3(z-z_0)^2+\ldots+nb_n(z-z_0)^{n-1}+\ldots,$$

$$f''(z)=2b_2+3\cdot 2b_3(z-z_0)+\ldots+n(n-1)b_n(z-z_0)^{n-2}+\ldots,$$

.............................................................................................,

$$f^{(n)}(z)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n+(n+1)n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n(z-z_0)+\ldots.$$

Полагая в этих равенствах и в исходном ряде $z=z_0$, имеем:

$$b_0=f(z_0),\ b_1=f'(z_0),\ b_2=\frac{f''(z_0)}{2!},\ \ldots,\ b_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \ldots.$$

Сравнивая найденные коэффициенты $b_k$ ряда $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\cdot(z-z_0)^k$ с коэффициентами ряда $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot(z-z_0)^k$, заключаем, что $b_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=c_k$ для $k=0,1,2,\ldots$. Отсюда следует единственность разложения. ◄

При $z_0=0$ получаем ряд Маклорена

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot z^k.$$

Разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций комплексного переменного аналогичны разложениям в ряд Тейлора функций действительного переменного:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\frac{z^n}{n!}+\ldots,\ z\in\mathbf{C},$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ z\in\mathbf{C},$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ z\in\mathbf{C},$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots,\ |z|<1,$$

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots,\ |z|<1.$$

**Теорема 2 (формула Эйлера)** $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

► В разложении функции $e^z$ заменим $z$ на $iz$:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} \dots \frac{(iz)^n}{n!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \cos z + i \sin z. ◄$$

**2. Голоморфные функции.**

**Определение 1.** Говорят, что функция $f(z)$ ***голоморфна*** в точке $z_0$, если она в некоторой окрестности этой точки раскладывается в степенной ряд относительно $z - z_0$.

Свойство голоморфности функции $f(z)$ в точке $z_0$ эквивалентно аналитичности $f(z)$ в этой точке. Так $f(z)$ голоморфна в точке $z_0$, то существует круг с центром в точке $z_0$, внутри которого $f(z)$ раскладывается в степенной ряд. При этом $f(z)$ как сумма степенного ряда — аналитическая функция внутри этого круга, следовательно, аналитическая в точке $z_0$.

Если же $f(z)$ – аналитическая в точке $z_0$, то существует круг с центром в этой точке, внутри которого $f(z)$ является аналитической функцией. Тогда $f(z)$ может быть представлена в виде суммы степенного ряда, сходящегося внутри этого круга. Следовательно, $f(z)$ является голоморфной в точке а.

**Определение 2.** Функция, голоморфная в каждой точке области $E$, называется ***голоморфной в этой области***.

Итак, если $f(z)$ голоморфна в области $E$, то $f(z)$ — аналитична в этой области.

**3. Нули аналитической функции.**

Всякая функция $f(z)$, аналитичная в окрестности точки $z_0$, разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$



где $c_0 = f(z_0)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_\rho} \dfrac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}$, $(k = 1, 2, \dots)$,

$c_\rho$ – произвольная окружность с центром в точке $z_0$.

**Определение 3.** Точка $z_0$ называется ***нулем*** функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ в ряд Тейлора не содержит нулевого члена, т.к. $c_0 = f(z_0) = 0$.

Если $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$ и $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ имеет вид

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots.$$

В этом случае точка $z_0$ называется ***нулем кратности*** $m$ или ***нулем порядка*** $m$. При $m = 1$ точка $z_0$ называется ***простым нулем***.

**Теорема 3 (единственности).** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в точке $z_0$ и не равна тождественно нулю в некоторой окрестности точки $z_0$. Тогда, если точка $z_0$ является нулем функции $f(z)$, то существует окрестность точки $z_0$, в которой функция $f(z)$ не имеет других нулей, кроме $z_0$.*

► Так как $f(z_0) = 0$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в достаточно малой окрестности точки $z_0$ имеет вид

$$f(z) = c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots.$$

Из формул $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если $z_0$ является нулем кратности $m$, то $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Поэтому разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора можно записать

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \left[c_m + c_{m+1}(z - z_0) + c_{m+2}(z - z_0)^2 + \dots\right],$$

где $c_k \neq 0$.

Отсюда следует, что в некоторой окрестности нуля $z_0$ порядка $m$, аналитическая функция $f(z)$ примет вид

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-z_0)+c_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$, $c_m\neq 0$.

Так как функция $\varphi(z)$ является аналитической, то она непрерывна в некоторой окрестности точки $z_0$ и $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=c_m=\varphi(z_0)$.

Поскольку $\varphi(z_0)=c_m\neq 0$, то, в силу непрерывности $\varphi(z)$ в точке $z_0$ около точки $z_0$ существует достаточно малая окрестность, в которой $\varphi(z)\neq 0$. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки $z_0$ аналитическая функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)\neq 0$ в окрестности точки $z_0$. ◄

**Замечание.** Верно и обратное утверждение: если функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, где

$$\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-z_0)+c_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

и $m$ – натуральное число, $\varphi(z)$ аналитична в точке $z_0$, причем $\varphi(z)\neq 0$, то точка $z_0$ есть нуль кратности $m$ функции $f(z)$.

## Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему Тейлора.
2. Докажите формулу Эйлера.
3. Какие точки называются нулями функции?
4. В чем состоит теорема единственности?