Лекция 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определение производной.
2. Условия Коши-Римана.
3. Сопряженные гармонические функции.

1. Определение производной.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z комплексной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$, включая и саму точку.

Определение 1. ***Производной*** функции $f(z)$ в точке z называется предел (если он существует (конечный))

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z).$$

Приращение Δz стремится к нулю любым образом, т.е. точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z, если ее приращение $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z)=C\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы приращение $\Delta f(z)$ функции $f(z)$ в этой точке могло быть представлено в виде*

$$\Delta f=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z.$$

►*Необходимость.* Так как функция дифференцируема, то ее приращение может быть представлено в виде $\Delta f(z)=c\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$, где c – постоянная величина, $\alpha(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Отсюда

$$c=\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}-\alpha(\Delta z).$$

Переходя к пределу при $\Delta z\to 0$, получим $c=f'(z)$.

Достаточность. Поскольку функция $w=f(z)$ имеет производную, то существует предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=f'(z)$.

Значит, можно записать $f'(z)=\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}+\alpha(\Delta z)$. Отсюда получаем

$$\Delta f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z.\ ◄$$

Условие дифференцируемости равносильно условию

$$\Delta f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z.$$

Из определения 2 следует непрерывность функции $f(z)$ в точке z. Таким образом, всякая дифференцируемая функция $f(z)$ в точке z непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: существуют примеры функций комплексного переменного непрерывных на всей комплексной плоскости и не имеющих производных либо всюду в комплексной плоскости, либо в отдельных точках.

Пример. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\bar z=x-iy$.

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Для данной функции при любом z имеем $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$.

Отсюда следует:

если $\Delta y=0$, т. е. $\Delta z=\Delta x\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=1$;

если $\Delta x=0$, т. е. $\Delta z=i\cdot\Delta y\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=-1$.

Следовательно, отношение $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при $\Delta z\to 0$ предела не имеет ни при каком z. Функция $f(z)=\bar z$, непрерывная на всей комплексной плоскости, не имеет производной ни в одной точке плоскости.

Определение 3. Величина $f'(z)\Delta z$, линейная относительно Δz, называется ***дифференциалом*** функции $f(z)$.

Обозначается: $df(z)=f'(z)\Delta z$.

В частности, при $f(z)=z$, из последнего равенства находим $dz=\Delta z$, т. е. дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением.

Заменяя в равенстве $df(z)=f'(z)\Delta z$ приращение Δz на dz, получим

$$df(z)=f'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции равен произведению ее производной на дифференциал независимого переменного.

2. Условия Коши — Римана.

Пусть $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ однозначная функция комплексного переменного $z=x+iy$, определенная в области E. Если функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ двух действительных переменных x и y заданы в области E независимо друг от друга, то функция $f(z)$ может и не быть дифференцируемой в этой области. Функция $f(z)=\bar{z}=x-iy$ не дифференцируема всюду на комплексной плоскости. Однако каждая из этих функций $u(x;y)=x$, $v(x;y)=-y$ имеет во всей комплексной плоскости частные производные по x и y.

Для того чтобы функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ была дифференцируемой в точке $z=x+iy$, на действительную часть $u(x;y)$ и при мнимая часть $v(x;y)$ функции $f(z)$ должны быть наложены некоторые ограничения.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ была дифференцируемой в точке $z=x+iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши – Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

►*Необходимость*. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, т.е. существует производная $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$.

Поскольку предел не зависит от пути, по которому $\Delta z\to 0$, то предположим, что Δz действительное число, т.е. $\Delta z=\Delta x$, $\Delta y=0$ (рис.1).

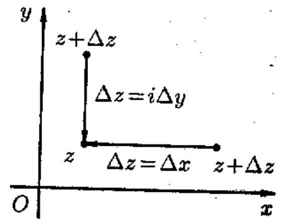

Рис.1.

Тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x;y)+iv(x;y)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x;y)]+i[v(x+\Delta x,y)-v(x;y)]}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Предположим теперь, что Δz мнимое число, т.е. $\Delta z=i\Delta y$, $\Delta x=0$. Тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x;y)+iv(x;y)]}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x;y)]+i[v(x+\Delta x,y)-v(x;y)]}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сравнивая полученные пределы, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности точки z выполнены условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Докажем, что $f(z)$ дифференцируема.

Так как по условию функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то их полные приращения могут быть представлены в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1|\Delta z|,$$

$$\Delta u=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2|\Delta z|,$$

где $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Поскольку $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1|\Delta z|+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2|\Delta z|\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+i\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Отсюда следует, что $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ существует. При этом

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\ ◄$$

Учитывая условия Коши-Римана, производную можно записывать в одной из следующих форм

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пример. Исследовать функцию $w=z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy.$$

Следовательно. $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$. Значит, функция $w=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2(x+iy)=2z$.

Определение 4. Однозначная функция $w=f(z)$ называется ***аналитической*** в области E, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Замечание. Функция $w=f(z)$, аналитическая в области E, имеет в каждой точке $z\in E$ производные любого порядка.

Поскольку свойства алгебраических действий и правила предельного перехода для функций действительного переменного распространяются и на функцию комплексного переменного, то правила дифференцирования функций действительной переменной справедливы и для функции комплексной переменной:

$$(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z),$$

$$(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0,$$

$$(f(g(z)))' = f_g'\cdot g'(z),$$

$$f'(z) = \frac{1}{\left(f^{-1}(z)\right)'}.$$

3. Сопряженные гармонические функции.

Определение 5. Функция $g(x;y)$ действительных переменных x и y называется гармонической в области $D\subseteq \mathbf{R}^2$, если она дважды дифференцируема и ее частные производные $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема 3. *Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ аналитическая в области E, то $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются гармоническими в области E.*

► Пусть функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ – аналитическая в некоторой области E комплексной плоскости, т.е. имеет производную в каждой точке z области E. Тогда по теореме 3.2 что действительная часть $u(x;y)$ и коэффициент при мнимой части $v(x;y)$ функции $f(z)$ имеют частные производные по переменным x и y в каждой точке $(x;y)$ области E. Значит, функция $f(z)$, аналитическая в области E, имеет в каждой точке z области E непрерывные производные любого порядка. Отсюда следует, что функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ имеют в каждой точке z области E непрерывные частные производные любого порядка по переменным x и y, в частности второго порядка.

С другой стороны, функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ в любой точке $(x;y)$ области E удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x;y)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x;y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x;y)}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое из равенств по x, а второе из равенств – по y, получим

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y\partial x}.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial^2 y} = 0,\ (x;y)\in E.$$

Равенство вторых смешанных частных производных следует из их непрерывности.

Далее, дифференцируя первое из равенств по y, а второе из равенств по x получим

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 x},\ \frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 y}.$$

Вычитая почленно найденные равенства, имеем

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 y} = 0,\ (x;y)\in E.$$ ◄

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно: если взять за $u(x;y)$ и $v(x;y)$ две произвольные функции, гармонические в области E, то функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ не будет аналитической в этой области, так как две произвольно взятые гармонические функции могут не удовлетворять условиям Коши – Римана.

Определение 6. Две гармонические в области E функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, связанные в области E условиями Коши–Римана, называются ***сопряженными***.

Теорема 4. *Пусть E односвязная область и функция $u(x;y)$ гармоническая в области E. Тогда существует такая сопряженная ей гармоническая функция $v(x;y)$, определенная с точностью* *до постоянного слагаемого, что функция* $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ *является аналитической.*

Без доказательства.

Пример. Найти аналитическую функцию $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, если $v(x;y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ при условии $f(0)=0$.

Решение. Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x+12y\,,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x-12y\,.$$

Частные производные первого порядка равны

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2\,.$$

Отсюда

$$u(x;y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)}\left(6x2-6xy-6y^2\right)dx+\left(-3x^2-12xy+3y^2\right)dy+c=$$

$$=2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c$$

Тогда

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right)=$$

$$(x+iy)^3\cdot(2+i)=(2+i)z^3\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Какая функция называется дифференцируемой? Сформулируйте необходимой и достаточное условия дифференцируемости функции.
3. Что называется дифференциалом функции комплексного переменного?
4. В чем заключаются условия Коши-Римана?
5. Какая функция называется аналитичной?
6. Какие функции называются гармоническими? Является ли аналитическая функция гармонической?