Лекция 9. ЭКСРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие экстремума функции многих переменных.
2. Некоторые сведения о квадратичных формах.
3. Достаточные условия экстремума.

1. Понятие экстремума функции многих переменных.

Пусть дана функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Определение 1. Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $u = f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P)$$

$$(\, f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

Обозначается:

$$\max_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)$$

$$(\min_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют ***точками экстремума*** функции, а максимумы и минимумы функции – ***экстремумами функции***.

Примеры.

1. Функция $z = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2$ имеет локальный максимум в точке $P_0(1;1)$, $z_{\max} = z(1,1) = 1$. Действительно, существует окрестность точки $P_0(1;1)$ (рис.1), в которой выполняется условие $f(1;1) > f(x; y) \ \ \forall P(x; y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$.

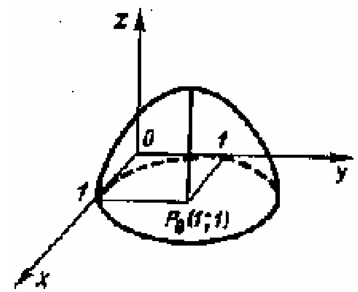

Рис.1.

2. Функция $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ имеет локальный минимум в точке $P_0(1;2)$ (рис.2), так как в любой точке $P(x; y)$, принадлежащей достаточно малой окрестности точки P_0, выполняется условие $f(1,2) < f(x, y) \ \ \forall P(x; y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$.

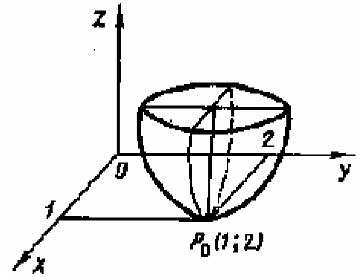

Рис.2.

Замечание. Если функция $u = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то:
в случае *локального максимума* – $f(P) - f(P_0) = \Delta u < 0$,
в случае *локального минимума* – $f(P) - f(P_0) = \Delta u > 0$.

Из сказанного выше следует, что полное приращение функции не меняет знака в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$. Однако для всех точек $P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ определить знак приращения Δu практически невозможно, поэтому надо искать другие условия, по которым можно судить о наличии и характере экстремума функции в данной точке.

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума). *Если в точке* $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ *дифференцируемая функция* $u=f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ *имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:*

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1}=\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2}=...=\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n}=0, \qquad (1)$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

► Докажем утверждение теоремы для функции двух переменных $z=f(x;y)$.

Пусть $P_0(x_0;y_0)$ – стационарная точка данной функции. Рассмотрим в $U(\delta;P_0)$ лишь те точки, для которых $y=y_0$. Получим функцию $z=f(x,y_0)=\varphi(x)$ одной переменной x. Эта функция имеет в точке x_0 экстремум, следовательно, $\varphi'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0$.

Аналогично доказывается, что $f'_y(x_0,y_0)=0$. ◄

Пример. Функция $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $P_0(0;0)$ (рис.3), так как для любой точки $P(x;y)\in\overset{\circ}{U}(\delta;P_0)$ выполняется условие $f(0,0)>f(x,y)$.

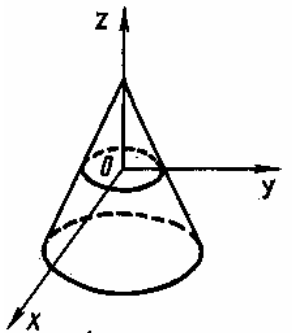

Рис.3.

Частные производные

$$f'_x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

в точке $P_0(0;0)$ не существуют.

Следствие. *Если функция* $u=f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ *имеет в точке* $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ *локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке* $du(P_0)$ *равен нулю или не существует.*

Точка $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$, в которой выполняется условие (1), называется ***точкой возможного экстремума*** или ***стационарными (критическими).***

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u=f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ в точке $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Пример. Функцию $z=xy^2$. Она задана на всей числовой плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Точка $O(0;0)$ будет критической, поскольку частные производные в ней равны нулю. Так как функция равна нулю в точке O, а в любой сколь угодно малой окрестности $U(\delta;P_0)$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения, то функция $z=xy^2$ не имеет в точке O экстремума.

2. Некоторые сведения о квадратичных формах.

Определение 2. Функция вида

$$Q\left(x_1;x_2;...;x_n\right)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+...+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+$$
$$+a_{22}x_2^2+...+a_{2n}x_2x_n+...+a_{nn}x_n^2==\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

называется ***квадратичной формой*** от переменных x_1, x_2, $...,x_n$, числа a_{ij}, $i,j=1,2,...,n$, называются ***коэффициентами квадратичной формы***, матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Если $a_{ij}=a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется ***симметричной***.

Определение 3. Определители

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\dots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются ***главными*** минорами матрицы A.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Пример. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2)=x_1^2+x_2^2$ является положительно определенной квадратичной формой, так как $Q(x_1;x_2)>0$ во всех точках $(x_1;x_2)$, кроме точки $O(0;0)$.

Определение 5. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***знакоопределенной***, если она является положительно определенной или отрицательно определенной. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***квазизнакоопределенной***, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значении, при этом обращается в нуль не только при $x_1=x_2=...=x_n=0$. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***знакопеременной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Примеры.

1. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ является квазиопределенной квадратичной формой, так как $Q(x_1;x_2)\geq 0$ во всех точках $(x_1;x_2)$, при этом $Q(x_1;x_2)=0$ не только в точке $O(0;0)$.

2. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2)=x_1^2+2x_1x_2$ является знакопеременной.

Теорема 2 (критерий Сильвестра).

1) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\dots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

2) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ \Delta_4>0,\ \dots.$$

Без доказательства.

3. Достаточные условия экстремума.

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума). *Пусть функция $u=f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 – точка возможного экстремума, т.е. $du(P_0)=0$. Тогда 1) если второй дифференциал $d^2u(P_0)$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n, то функция $u=f(P)$ имеет в точке P_0 локальный минимум (максимум);*

2) если $d^2u(P_0)$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ в точке P_0 экстремума не имеет.

Без доказательства.

Замечание. Если $du(P_0) = 0$, а $d^2u(P_0)$ является квазиопределенной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума). *Пусть $P_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta; P_0)$ функции $z = f(x; y)$. И пусть*

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (2)$$

Тогда стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ является:

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

3) если $\Delta(P_0) < 0$, то в стационарной точке P_0 экстремума нет,

4) если $\Delta(P_0) = 0$, то локальный экстремум может быть, а может и не быть.

► Из определения локального экстремума следует, что если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0; y_0)$ локальный максимум, то приращение $\Delta z < 0 \ \ \forall P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$; если же $P_0(x_0; y_0)$ – точка локального минимума, то $\Delta z > 0 \ \ \forall P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$.

Для определения знака приращения Δz в δ-окрестности стационарной точки $P_0(x_0; y_0)$ разложим функцию $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора

$$\Delta z = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) +,$$

$$+ \frac{1}{(n+1)} d^{n+1} f(\xi, \eta)$$

где $df(x_0, y_0)$, $d^2 f(x_0, y_0)$, ... – дифференциалы соответственно первого, второго и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$, вычисленные в точке $P_0(x_0; y_0)$; $d^{n+1} f(\xi, \eta)$ – дифференциал $(n+1)$-го порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленный в некоторой точке $P(\xi, \eta) = P(x_0 + \theta\, \Delta x; y_0 + \theta\, \Delta y)$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$.

Сохраним в формуле Тейлора только первые два члена, т.е. положим

$$\Delta z \approx df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0).$$

Так как P_0 – стационарная точка, то $dz\big|_{P_0} = 0$. Следовательно,

$$\Delta z \approx \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2 \right).$$

Для удобства записей обозначим вторые частные производные в точке $P_0(x_0; y_0)$ через A, B, C: $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Тогда, считая, что $\Delta y \neq 0$, имеем:

$$\Delta z = \frac{(\Delta y)^2}{2}\left(A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) + C \right) = \frac{(\Delta y)^2}{2}\left(At^2 + 2Bt + C\right).$$

Из последнего равенства видно, что знак Δz определяется знаком трехчлена $At^2 + 2Bt + C$, где $t = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

Дискриминант данного трехчлена равен $B^2 - AC$.

1. Если $B^2 - AC < 0$ или $\Delta(P_0) = AC - B^2 > 0$, то для любого $A>0$ приращение $\Delta z > 0$ и $P_0(x_0; y_0)$ – точка локального минимума, а для любого $A < 0$ приращение $\Delta z < 0$ и $P_0(x_0; y_0)$ – точка локального максимума.

2. Если $B^2 - AC > 0$, то трехчлен $At^2 + Bt + C$ имеет два действительных корня, и в промежутке изменения $T = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ приращение Δz меняет знак. Поэтому при $B^2 - AC > 0$ или $\Delta(P_0) = AC - B^2 < 0$ стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ не является точкой экстремума.

3. Если $B^2 - AC = 0$, то стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ будет точкой локального минимума при $A > 0$ и точкой локального максимума при $A < 0$.

Если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = 0$, то $\Delta z \approx \frac{1}{2} C(\Delta y)^2$ и знак Δz определяется знаком C. Поэтому стационарная точка будет точкой локального минимума при $C > 0$ и точкой локального максимума при $C < 0$. ◄

Замечания. 1. Если $\Delta(P_0) = 0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке P_0. В этом случае необходимо произвести дополнительные исследования знака функции $z = f(x, y)$ в $U(\delta; P_0)$. Действительно, если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = C = 0$, то $d^2 z = 0$ и $\Delta z \approx \frac{1}{3!} d^3 z\Big|_{P_0}$, т.е. в этом случае знак Δz определяется знаком $d^3 z\Big|_{P_0}$. Следовательно, требуются дополнительные исследования по определению знака Δz в окрестности стационарной точки P_0.

2. При выводе достаточных условий экстремума предполагалось, что $\Delta y \neq 0$. Если $\Delta y = 0$ для любого $\Delta x \neq 0$, то получаем экстремум функции одной переменной $z = f(x, y)$. Аналогично если $\Delta x = 0$ для любого $\Delta y \neq 0$, то $z = f(x_0, y)$.

Приращения Δx и Δy не могут равняться нулю одновременно, поскольку в подобном случае точка $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$ совпала бы с точкой $P_0(x_0; y_0)$ и функция $z = f(x, y)$ не получила бы никакого приращения.

Примеры.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

Решение. 1) Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2), \; z'_y = 2 y e^{\frac{x}{2}}.$$

2) Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = -2$, $y_0 = 0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2; 0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

3) Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(-2; 0)$. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = y e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2 e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то точка $P_0(-2; 0)$ является точкой локального минимума:

$$z_{\min} = z(-2, 0) = -\frac{2}{e}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}(x + y^2)$.

Решение. 1) Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

2) Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1 - x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$.

Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

3) Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то в точке $P_0(1;0)$ нет экстремума, т.е. в окрестности $U(\delta; P_0)$ исследуемая функция меняет знак.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. 1) Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

2) Решая систему уравнений $\left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right\}$ находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

3) Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(0;0)$. Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

В данном случае стационарная точка $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума, поскольку $\Delta z > 0 \quad \forall P \in \dot{U}(\delta; P_0)$; $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии локального экстремума .
3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?
4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?
5. Какая квадратичная форма называется 1) положительно определенной, 2) отрицательно определенной, 3) знакоопределенной, 4) квазизнакоопределенной, 5) знакопеременной?
6. Сформулируйте критерий Сильвестра.
7. Сформулируйте и докажите достаточное условие экстремума функции двух переменных $z = f(x; y)$.