Лекция 11. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Признаки сравнения несобственных интегралов.
2. Абсолютная сходимость.
3. Признаки Дирихле и Абеля.

1. Признаки сравнения несобственных интегралов.

Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода)

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ неотрицательна на интервале $[a;b)$, то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов $\int_a^\eta f(x)dx$, $\eta \in [a;b)$, было ограничено сверху, т.е. чтобы существовала такая постоянная $c > 0$, что для всех $\eta \in [a;b)$ выполнялось неравенство*

$$\int_a^\eta f(x)dx \le c .$$

Без доказательства.

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ справедливо $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда*

1) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$,

2) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

► Для любого $\eta \in [a;b)$ имеем $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Случай 1. Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то согласно лемме 1 интегралы $\int_a^\eta g(x)dx$, $\eta \in [a;b)$, ограничены сверху. Значит, и интегралы $\int_a^\eta f(x)dx$ также ограничены сверху. По лемме 1 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Случай 2. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то в силу доказанного 1) интеграл $\int_a^b g(x)dx$ не может сходится. Если бы он сходился, то и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также сходился бы. Значит, интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится. ◄

Следствие 1 (предельный признак сравнения). *Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$, и существует конечный предел*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0.$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0\le A<+\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,*

2) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0<A\le+\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,*

3) если $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Без доказательства.

Примеры. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$, 2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. 1. Сравним интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int_0^1\frac{dx}{x-1}$. Поскольку $\ln x=\ln(1+(x-1))\sim x-1$ при $x\to1$, то имеем

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}=1.$$

Значит, интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$ расходится.

2. Сравним данный интеграл со сходящимся интегралом $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall x\in[1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

2. Абсолютная сходимость.

Определение 1. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся*** интегралом, если сходится интеграл $\int_a^b|f(x)|dx$.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta<\eta_1<b$, $\eta<\eta_2<b$, *выполняется неравенство* $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Если несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

► Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то по теореме 2 для любого $\varepsilon>0$ существует такое η, что для всех η_1 и η_2, удовлетворяющих условию $\eta<\eta_1<b$, $\eta<\eta_2<b$, выполняется неравенство $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$.

Тогда

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right|<\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon .$$

В силу критерия Коши для сходимости интеграла, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда.

Пример. Исследовать на сходимость интегралы 1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}$, 2) $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$.

Решение. 1. Имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}=-\int_1^{+\infty}\frac{d(\cos x)}{x}=-\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{\infty}+\int_1^{+\infty}\cos xd\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx .$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}$ сходится.

2. Из неравенства

$$|\sin x|\ge\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta>1$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\eta}\frac{|\sin x|dx}{x}\ge\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2xdx}{x} .$$

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(\sin 2x)}{x}=\frac{1}{2}\left.\frac{\sin 2x}{x}\right|_1^{\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$$

и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ сходится, поскольку $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходящийся, $\alpha=2>1$.

Значит, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$ расходится.

3. Признаки Дирихле и Абеля.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть на полуоси* $x\ge a$

1)функция $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную,*

2)функция $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и*

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p}$, $p>1$.

Решение. Функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а функция $g(x)=\frac{1}{x^p}$, $p>1$, убывает при $x\to+\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть на полуоси* $x\ge a$

1)функция $f(x)$ *непрерывна и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится,*

2)функция $g(x)$ *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна.*

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$, $p>1$.

Решение. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p}$, $p>1$, сходится, а функция $g(x)=\operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите признак сравнения для неотрицательных функций.
2. Сформулируйте предельный признак сравнения для неотрицательных функций.
3. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?
4. Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.