Лекция 7. ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА

1. Формула Маклорена.
2. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций.
3. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов.
4. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

1. Формула Маклорена.

В формуле Тейлора положим $x_0 = 0$. Тогда получим частный вид формулы Тейлора – формулу Маклорена. Так как $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, то при $x_0 = 0$ $\xi = \theta x$. Поэтому остаточный член формулы Маклорена примет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1,$$

а сама формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

2. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций.

Функция $f(x) = e^x$. Находим последовательные производные от $f(x) = e^x$:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = e^x, \\ f'(x) = e^x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(0) = 1, \\ f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}. \end{array}\right.$$

Подставляя полученные значения $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(\theta x)$ в формулу Маклорена, имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

где $0 < \theta < 1$.

Функция $f(x) = \sin x$. Находим последовательно производные от $f(x) = \sin x$:

$$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(3)}(0) = -1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$0 < \theta < 1$$

Подставляя полученные значения в формулу Маклорена, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0 < \theta < 1$.

Функция $f(x) = \cos x$. Вычислив значения последовательных производных от функции $f(x) = \cos x$ при $x = 0$, получим:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

и $f^{(n)}(0)=\cos\left(0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 \text{ при } n \text{ нечетном,}\\ (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ при } n \text{ четном.}\end{cases}$

Подставляя в формулу Тейлора, получим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^n}{n!}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0<\theta<1$.

Функция $f(x)=\ln(1+x)$. Функция $f(x)=\ln(1+x)$ определена и бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;+\infty)$. Найдем последовательные производные от этой функции:

$f(x)=\ln(1+x)$, $\quad f(0)=0$,

$f'(x)=(1+x)^{-1}$, $\quad f'(0)=1$,

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$, $\quad f''(0)=-1$,

$f'''(x)=2\cdot 1(1+x)^{-3}$, $\quad f'''(0)=2\cdot 1$,

....

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, $\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n n!(1+x)^{-(n-1)}$, $\quad f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^n n!(1+\theta x)^{-(n+1)}$, $0<\theta<1$.

Подставляя вычисленные значения в формулу Маклорена, получаем разложение $\ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Функция $f(x)=(1+x)^m$. Функция $f(x)=(1+x)^m$, $m\in\boldsymbol{R}$, определена и бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;1)$. Найдем последовательно производные от $f(x)=(1+x)^m$:

$f(x)=(1+x)^m$, $\quad f(0)=1$,

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$, $\quad f'(0)=m$,

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $\quad f''(0)=m(m-1)$,

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$, $\quad f'''(0)=m(m-1)(m-1)$,

....,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, $\quad f^{(n)}(0)=m(m-1)...(m-n+1)$,

$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)...(m-n)(1+x)^{m-n-1}$, $\quad f^{(n+1)}(\theta x)=m(m-1)...(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}$, $0<\theta<1$.

Подставляя найденные значения функции и ее производных в точке $x_0=0$ в формулу Маклорена, имеем

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x).$$

где

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)...(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{m-n-1}x^{n+1}.$$

Полученные разложения функций называют ***основными*** и используют для представления многих функций по формуле Тейлора.

Примеры. **1.** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=e^{-x^3}$ в окрестности точки $x_0=0$.

2. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=\ln x$ в окрестности точки $x_0=1$.

Решение.

1. Воспользуемся основным разложением по формуле Маклорена функции $f(x)=e^x$. Заменим в разложении x на $(-x^3)$

$$e^{-x^3}=1-\frac{x^3}{1!}+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^9}{3!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!}+\frac{(-x^3)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^3},$$

где $0<\theta<1$.

2. Воспользуемся основным разложением по формуле Маклорена функции $f(x)=\ln x$. Заменим в разложении x на $(x-1)$:

$$\ln x = \ln\left(1+(x-1)\right) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\left(1+\theta(x-1)\right)^{n+1}}$, $0<\theta<1$.

3. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции при вычисления пределов.

Для выделения ее главной части функция $f(x)$ в окрестности $U(\delta;x_0)$ удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $U(\delta;x_0)$.

Определение 1. Функция $g(x)$ называется ***главной частью*** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, если при $x\to x_0$ возможно представление

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

При $g(x)\neq 0$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \text{ и } \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

т.е. при $x\to x_0$ главная часть функции $g(x)$ и сама функция $f(x)$ являются эквивалентными функциями.

Пример. Выделить главную часть функции $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4+x^3+4x}{4x} = 1$, то функция $g(x) = 4x$ является главной частью $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поэтому можно записать:

$$2x^4 + x^3 + 4x = 4x + o(4x).$$

Следует отметить, что если не задан вид функции, ее главная часть определяется неоднозначно.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает общий метод выделения главной части функции $f(x)$ в окрестности рассматриваемой точки x_0. Главной частью функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 является ее многочлен Тейлора.

Для выделения главной части функции удобно использовать основные разложения по формуле Маклорена с остаточными членами в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Таким образом, используя многочлен Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x=0$, можно записать асимптотические (приближенные) формулы для $f(x)$ в $U(\delta;0)$:

$$\mathrm{e}^x \sim 1+x, \qquad \mathrm{e}^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \qquad \ldots$$

$$\sin x \sim x, \qquad \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}, \qquad \ldots$$

и другие.

Повышая степень многочлена Тейлора, можно получить более точные приближения функции. Графики функций $y = e^x$ и

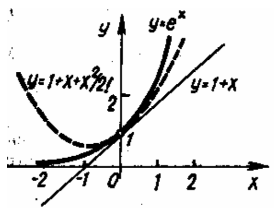

Рис.1.

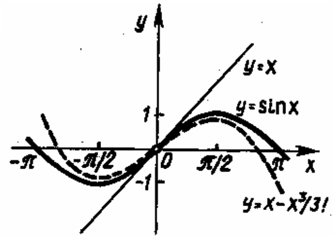

Рис.2.

их многочленов Тейлора изображены на рисунках 1 и 2. Выделение главной части функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 часто используется при вычислении пределов при $x \to x_0$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$.

Решение. Используя разложения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ по формуле Маклорена, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{x^3\left(x+o(x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+o(x)}{1+o(x)}=\frac{1}{12}.$$

4. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

Если известны значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0, то для вычисления приближенных значений функции в $U(\delta;x_0)$ удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Значения $f(x)$ в $U(\delta;x_0)$ вычисляют по формуле

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Погрешность приближения

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|,\ x_0<\xi<x.$$

В частном случае при $n=1$ функция $f(x)$ аппроксимируется многочленом первой степени

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

с погрешностью

$$R_2(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,\ x_0<\xi<x.$$

Так как по определению $x-x_0=\Delta x$, $f'(x_0)\Delta x=df(x_0)$, то

$$f(x)\approx f(x_0)+df(x_0).$$

Погрешность, возникающая при применении такой приближенной формулы, не превышает модуля остатка $R_2(x)$ задаваемого формулой.

Пример. Вычислить число e с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Разложение функции $y=\mathrm{e}^x$ по формуле Маклорена имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Заменив функцию $y=e^x$ многочленом Тейлора степени n, получим приближенное равенство

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

абсолютная погрешность которого

$$\left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1\le x\le 1$, то

$$\left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\le\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Полагая $x=1$, получаем приближенное значение числа e

$$\mathrm{e}^1\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этой формулы для получения заданной точности, оценим величину остаточного члена

$$\left|R_{n+1}(x)\right|\le\varepsilon.$$

Имеем $\dfrac{3}{(n+1)!}<0{,}001$. Отсюда $(n+1)!>3000$ или $n>6$.

Следовательно, при $n = 6$ получим вычисленное значение числа e с заданной точностью

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2{,}718 .$$

Формула Тейлора используется также при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет формула Маклорена?
2. Запишите основные разложения по формуле Маклорена элементарных функций.
3. Как используется формула Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов.
4. Приведите примеры использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.