Лекция 9. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.
2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.
3. Ограниченность непрерывных функций.
4. Достижение непрерывной функцией своих точных граней.

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.*

► Пусть $f(x_0)>0$ (рис.1, а).

Тогда по определению 2 непрерывности функции имеем

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x\in U(\delta;x_0)\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon .$$

Из последнего неравенства получим $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. В силу произвольности ε положим $\varepsilon=f(x_0)$. Тогда $0<f(x)<2f(x_0)$.

Если $f(x_0)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Тогда $-f(x_0)>0$, то по доказанному выше существует δ-окрестность точки x_0, в которой $-f(x)>0$. Отсюда $f(x)<0$. ◄

Геометрическая интерпретация теоремы 1 дана на рис.1 (случаю $f(x_0)>0$ соответствует рис.1,*а*, случаю $f(x_0)<0$ – рис.1,*б*).

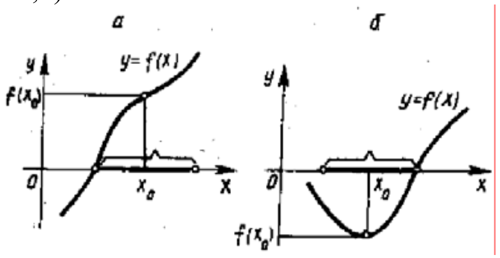

Рис.1.

Пример. Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, и $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}>0$. Тогда существует такая окрестность точки $x_0=\dfrac{\pi}{4}$, в которой функция $\sin x$ сохраняет знак, т.е. $\sin x>0$.

2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Теорема 2 (1-я теорема Больцано – Коши). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:*

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0\in(a;b):\ f(x_0)=0 .$$

►*1. Существование.*

Пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$.

Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $\dfrac{a+b}{2}$. Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Обозначим его $[a_1;b_1]$, его длина равна $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$. Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам точкой $\dfrac{a_1+b_1}{2}$. Если $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_2;b_2]$, его длина равна $b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}$. Продолжая этот процесс неограниченно, на n-ом шаге значение функции в середине отрезка $[a_n;b_n]$ может быть равным нулю, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$$

вложенных отрезков, причем $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$ и на концах каждого отрезка $[a_n;b_n]$ принимает значения разных знаков. Тогда по лемме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам.

2. $f(\xi)=0$.

Предположим, что $f(\xi) \neq 0$. Пусть $f(\xi)>0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции существует такая окрестность точки ξ, в которой $f(x)>0$. В эту окрестность при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n;b_n]$. Следовательно, на отрезке $[a_n;b_n]$ выполнено неравенство $f(x)>0$. Однако это противоречит условию, что на концах отрезка функция принимает значения разных знаков.

Аналогично доказывается, если $f(\xi)<0$

Следовательно, $f(\xi)=0$. ◄

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$ графика функции $f(x)$, соответствующие концам отрезка $[a;b]$ лежат по разные стороны от оси Ox (рис.2.), то график функции хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox.

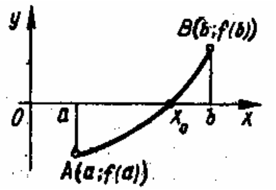

Рис.2.

Замечание. Если $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a;b]$, то существует единственная точка x_0, такая, что $f(x_0)=0$.

Теорема 3 (2-я теорема Больцано-Коши). *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа, заключенного между A и B, найдется такая точка $c \in [a;b]$, что $f(c)=C$.*

► Пусть для определенности $A<B$ и $A<C<B$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=f(x)-C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$g(a)=f(a)-C=A-C<0,$$
$$g(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Тогда по теореме 2 существует такая точка $c \in [a;b]$ такая, что $g(c)=0$. Отсюда $f(c)=C$. ◄

Замечание. Теорему 3 можно переформулировать так: *непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения.*

Геометрический смысл теоремы 3 заключается в следующем. Рассмотрим график функции $f(x)$ (рис.3). Пусть $f(a)=A$ и $f(b)=B$. Тогда прямая $y=C$, где C – любое число, заключенное между A и B, пересечет график функции по крайней мере в одной точке. Если же $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a;b]$, то существует единственная точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c)=C$.

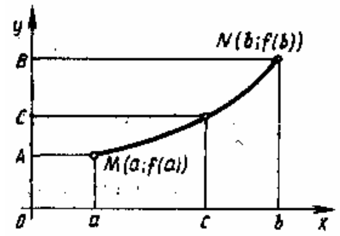

Рис.3.

3. Ограниченность непрерывных функций.

Лемма 1. *Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности.*

► По определению непрерывности функции $f(x)$ в точке

x_0, имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\forall x\in U(\delta;x_0)\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, возьмем $\varepsilon=1$. Тогда получим

$$|f(x)-f(x_0)|<1.$$

С учетом этого

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+|f(x_0)|.$$

Положим $M=1+|f(x_0)|$. Тогда $|f(x)|<M$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена в окрестности $U(\delta;x_0)$. ◄

Теорема 4 (1-я теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

► Доказываем методом от противного. Предположим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a;b]$. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам. Тогда хотя на одном из полученных отрезков функция $f(x)$ неограничена. В противном случае она была бы ограничена на $[a;b]$. Обозначим его $[a_1;b_1]$. Разделим его пополам и обозначим $[a_2;b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ неограничена. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots,$$

на каждом из которых $f(x)$ неограниченна. При этом длины отрезков равны $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to0$ при $n\to\infty$.

Тогда по лемме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ по условию определена и непрерывна в точке ξ. В силу леммы 1 функция $f(x)$ ограничена в некоторой ее окрестности. В эту окрестность при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n;b_n]$, на котором функция также ограниченна. Но это противоречит тому, что $f(x)$ не ограничена на каждом из вложенных отрезков.

Следовательно, $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. ◄

Замечание. Теорема 4 неверна, если отрезок $[a;b]$ заменить интервалом $(a;b)$.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0;1)$. Однако не является ограниченной на этом промежутке, поскольку $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

4. Достижение непрерывной функцией своих точных граней. Вторая теорема Вейерштрасса.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Определение 1. Число M (m) называется ***точной верхней (нижней) гранью*** функции $y=f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x\in X\quad f(x)\le M$ ($f(x)\ge m$);

2) для любого числа $M'<M$ ($m'>m$) найдется такая точка $x'\in X$, что $f(x')>M'$ ($f(x')<m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y=f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то $\sup\limits_X f(x)=+\infty$, если снизу, $\inf\limits_X f(x)=-\infty$.

Теорема 5 (2-я теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что (рис. 4)*

$$M=f(x_1)=\sup_{[a;b]}f(x),\ \ m=f(x_2)=\inf_{[a;b]}f(x).$$

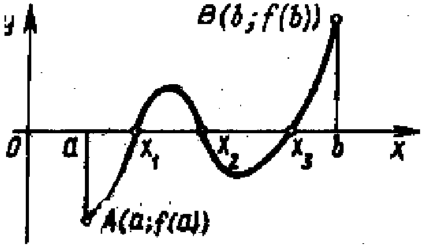

Рис.4.

► Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме 4 она ограничена на этом отрезке. По теореме о существовании точных верхних и нижних граней у непустого множества имеем, что существуют точная верхняя M и точная нижняя m грани функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Докажем, что $f(x)$ достигает M, т.е. существует такая точка $x_1 \in [a;b]$, что $M = f(x_1)$.

Доказываем методом от противного. Предположим, что функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a;b]$ значения M. Рассмотрим вспомогательную неотрицательную функцию

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Функция $g(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. По теореме 4 она ограничена, т.е. существует положительное число $K > 0$ такое, что $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < K.$$

Отсюда $f(x) \le M - \frac{1}{K}$.

Число $M - \frac{1}{K} < M$ является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней гранью, т.е. наименьшей верхней гранью функции $f(x)$

на отрезке $[a;b]$.

Следовательно, существует такая точка $x_1 \in [a;b]$, в которой $M = f(x_1)$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a;b]$ своей точной нижней грани m. ◄

Замечание. Полагая

$$M = \sup_{[a;b]} f(x) = \max_{[a;b]} f(x), \quad m = \inf_{[a;b]} f(x) = \min_{[a;b]} f(x),$$

можно теорему 5 сформулировать следующим образом*: непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимальное и минимальное значения.*

Определение 2. Разность между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$, называется ***колебанием*** функции на этом отрезке.

Обозначается: $\omega = \max_{[a;b]} f(x) - \min_{[a;b]} f(x)$.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на отрезке $[-2;3]$. Она ограничена на $[-2;3]$ ($|x^2| \le 9$) и существуют такие две точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;3]$, что

$$f(x_1) = f(0) = 0 = \inf_{[-2;3]} x^2, \quad f(x_2) = f(3) = 9 = \sup_{[-2;3]} x^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
2. Сформулируйте и докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение (теоремы Больцано-Коши).
3. Сформулируйте и докажите первую теорему об ограниченности непрерывной функции.
4. Сформулируйте и докажите теорему о достижении непрерывной функцией своих точных граней.