Лекция 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Определение непрерывности функции.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Непрерывность элементарных функций.

1. Определение непрерывности функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется ***разрывной в точке*** x_0, а точка x_0 – ***точкой разрыва***.

Определение 2 (по Коши). Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ – приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 1.

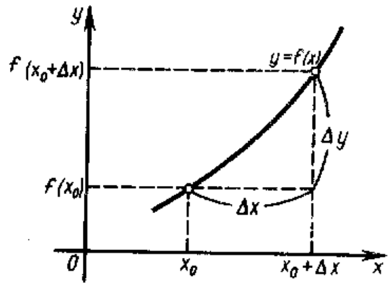

Рис.1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется ***непрерывной слева (справа)*** в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$f(x)$ *непрерывна справа в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$,

$f(x)$ *непрерывна слева в точке* $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Определение 5. Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется ***непрерывной на множестве*** X.

Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на $[a; b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $C_{[a;b]}$.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x)\neq 0$, также непрерывны в этой точке.*

► Поскольку непрерывна в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы, то по свойствам пределов существуют пределы и

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \text{ при } g(x)\neq 0.$$

Согласно определению 1 данные функции непрерывны. ◄

2. Точки разрыва функции и их классификация.

Определение 6. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Определение 7. Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=A$, но $f(x_0)\neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\neq x_0,\\ A, \text{ если } x=x_0,\end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f_1(x)=A=f_1(x_0),$$

т.е. новая функция является непрерывной.

Пример. Функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ точку устранимого разрыва, поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

Определение 8. Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется ***непрерывной слева***, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ – ***непрерывной справа***.

Пример. Функция

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

в точке $x_0=0$ имеет устранимый разрыв, так как

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn} x=-1 \text{ и } \lim_{x\to x_0+0}\operatorname{sgn} x=1.$$

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется ***скачком*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 9. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** 2-

го рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty .$$

Пример. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ имеет бесконечный разрыв, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$.

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на числовой прямой*** $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Пример. Функция $y=[x]$ является кусочно-непрерывной на любом отрезке и на числовой прямой $\mathbf{R}$. График данной функции изображен на рисунке 2. Функция $y=[x]=n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, является непрерывной справа и разрывной слева. В других точках она непрерывна справа и слева.

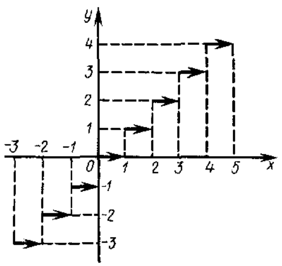

Рис.2.

3. Непрерывность основных элементарных функций.

Теорема 2. *Многочлен* $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_k\in\mathbf{R}$, $k=\overline{0,n}$, *является функцией, непрерывной для любого* $x\in\mathbf{R}$.

Теорема 3. *Всякая рациональная функция* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *непрерывна в любой точке* $x\in\mathbf{R}$, *для которой* $Q(x)\neq 0$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ – *многочлены.*

Без доказательства.

Теорема 4. *Если функция* $u=\varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $y=f(u)$ *непрерывна в точке* u_0, *то сложная функция* $y=f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

► По определению сложной функции имеем

$$y=f\circ\varphi \iff y=f(\varphi(x)).$$

Пусть $x\to x_0$. Тогда из непрерывности функции $\varphi(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$, т.е. что $u\to u_0$. Поскольку $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$. Но так как $u=\varphi(x)$, то последнее равенство можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0)). \blacktriangleleft$$

Следствия. 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

3. *Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке* x_0 *функций, непрерывна в точке* x_0.

Теорема 5. *Пусть функция* $y=f(x)$ *определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве* X *и пусть* Y – *множество ее значений. Тогда на множестве* Y *обратная функция* $x=f^{-1}(y)$ *монотонна и непрерывна.*

Без доказательства.

Теорема 6. *Основные элементарные функции непрерывны во* *всех точках, принадлежащих их области определения.*

► 1. Для функции $y = \sin x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0 \right) = 0 .$$

Для функции $y = \cos x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos\left(x_0 + \Delta x\right) - \cos x_0 \right) = 0 .$$

В силу теоремы 1, имеем, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на множестве $\mathbf{R}$, за исключением точек $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на множестве $\mathbf{R}$, за исключением точек $x_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Для показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} \right) = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} - a^{x_0} = 0 .$$

Непрерывность логарифмической функции и обратных тригонометрических функций следует из теоремы 5 о непрерывности обратной функции. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения непрерывной функции.
2. Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.
3. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?
4. Какая точка называется точкой разрыва 1-го рода?
5. Какая точка называется точкой разрыва 2-го рода?
6. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.