Лекция 7. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

1.Определение и свойства бесконечно малых функций.
2 Основные теоремы о пределах.
3. Замечательные пределы.
4. Сравнение асимптотического поведения функций.

1. Определение и свойства бесконечно малых функций.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Определение 2 (по Гейне). Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to x_0$, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(\alpha(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к 0.

Символическая запись:

$$\alpha(x) = o(1) \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0 .$$

Определение 3 (по Коши). Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$\alpha(x) = o(1) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой, поскольку $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Теорема 1. *Функция* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ *имеет конечный предел* A *тогда и только тогда, когда функция* $\alpha(x) = f(x) - A$ *является бесконечно малой при* $x \to x_0$.

► *Необходимость.*

Пусть существует предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Рассмотрим функцию $\alpha(x) = f(x) - A$.

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0 .$$

Достаточность.

Из равенства $\alpha(x) = f(x) - A$ получаем $f(x) = \alpha(x) + A$.

Значит,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + A) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) + A = 0 + A = A . \blacktriangleleft$$

Теорема 2. *Конечная сумма бесконечно малых функций в окрестности* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ *есть функция, бесконечно малая в* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$.

► Если $\alpha_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, – бесконечно малые функций в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_i(x) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to x_0} \alpha_i(x) = 0$, то конечная сумма бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая. ◄

Теорема 3. *Произведение бесконечно малой функции* $\alpha(x)$ *и функции* $\varphi(x)$, *ограниченной в* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, *есть бесконечно малая функция.*

► Пусть $\varphi(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, т.е,

$$\exists M > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x) \;\Rightarrow\; |\varphi(x)| \le M ,$$

а $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$.
Значит,

$$\forall \frac{\varepsilon}{M}>0 \;\; \exists \delta_1>0: \;\; \forall x\in \overset{\circ}{U}(\delta_1;x) \;\Rightarrow\; |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta;\delta_1\}$. Тогда $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ и $|\varphi(x)|<M$ $\forall x\in \overset{\circ}{U}(\delta;x)$. Рассмотрим произведение $\alpha(x)\cdot\varphi(x)$ в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta;x)$:

$$|\alpha(x)\cdot\varphi(x)|=|\alpha(x)|\cdot|\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon .$$

Отсюда функция $\alpha(x)\cdot\varphi(x)$ – бесконечно малая функция. ◄

Следствие 1. *Произведение некоторого числа и бесконечно малой функции в $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ есть бесконечно малая функция.*

Следствие 2. *Произведение двух бесконечно малых функций в $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ есть бесконечно малая функция.*

Теорема 4. *Частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ в $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$, есть бесконечно малая функция.*

►Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Рассмотрим $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{0}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=0$$

и $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ – бесконечно малая функция.◄

Теорема 5 (связь бесконечно больших и бесконечно малых функций). *1) Если функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x\to x_0$ – бесконечно большая. 2) Если функция $f(x)$ при $x\to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x\to x_0$ – бесконечно малая.*

► Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Тогда по определению имеем:

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0: \;\; \forall x \;\; 0<|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x)|<\varepsilon .$$

Отсюда $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}=K$.

Значит, функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая.

Аналогично доказывается обратное утверждение. ◄

Пример. Функция $f(x)=x^4$ при $x\to 0$ является бесконечно малой, а функция $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^4}$ при $x\to 0$ – бесконечно большой.

2. Основные теоремы о пределах.

Теорема 6 (связь предела с арифметическими операциями). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=a\pm b$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=a\cdot b$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, $(b\neq 0)$.

Доказывается аналогично, как и для числовых последовательностей.

Теорема 7 (единственность). *Функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела.*

► Предположим, что существует два предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$.

Тогда $0=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A-B$.

Отсюда $A=B$. ◄

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности* $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$.

Без доказательства.

Теорема 9 (сравнение функций). *Если в $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x)\le\varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Без доказательства.

Теорема 10 (о пределе промежуточной переменной). *Если в $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, $A\in\mathbf{R}$, то существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Без доказательства.

Теорема 11. *Если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y=f(u(x))$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$ ($u(x)\ne 0$ при $x\ne x_0$), $\lim\limits_{x\to x_0}f(u)=A$, то существует предел сложной функции $y=f(u(x))$ в точке x_0 и*

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x))=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

Без доказательства.

Из теоремы 6, если условия 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\pm\ldots\pm\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.

Отсюда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a^n$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n=a^n \text{ при любом } n\in\mathbf{N},$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{a} \text{ при } a>0,\ n\in\mathbf{N}.$$

Пусть $y=f(x)$ бесконечно большая функция при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

2. Замечательные пределы.

Теорема 12 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

► Так как $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ является четной функцией, рассмотрим ее только на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Возьмем дугу AM единичного круга, соответствующую углу, радианная мера которого равна x (рис.1). Тогда $|OA|=1$, $|MP|=\sin x$, $|OP|=\cos x$.

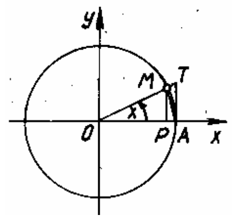

Рис.1.

Площадь сектора OAM заключена между площадями треугольников OMA и OTA:

$$S_{\Delta\mathrm{OMA}}<S_{\text{сек}}<S_{\Delta\mathrm{OAT}}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2}|OA||PM|<\frac{1}{2}|OA|^2x<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$$

Так как $|OA| = 1$, $|PM| = \sin x$, $|AT| = \operatorname{tg} x$, то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

Отсюда

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ последнее двойное неравенство справедливо и для интервала $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Таким образом, для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Другими словами, при $x \to 0$ предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ заключен между 1 и $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Следовательно, по свойствам предела функций, имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 . \blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\sin(5x)}{(5x)} \cdot \frac{1}{\cos 5x} = 5 .$$

Теорема 13 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \mathrm{e}$.

► Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = \mathrm{e}$, $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Случай 1. $x > 1$.

Положим $n = [x]$ и представим число x в виде $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbf{N}$ и $0 \le \alpha < 1$.

Поскольку $n \le x \le n+1$, то

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} .$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$ ($n \to +\infty$), получим

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^1 = e \cdot 1 = e$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

Случай 2. $x < -1$.

Положим $x = -y$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left[\begin{array}{l} x = -y; \\ x \to -\infty \Rightarrow \\ y \to +\infty \end{array}\right] = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e .$$

Объединяя оба случая, получим $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = e$. ◄

Следствие. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^\infty\right) = e$.

► Имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x}; \\ x\to 0\Rightarrow \\ t\to\infty \end{array}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\,.\blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l} t=2x; \\ x\to 0\Rightarrow \\ t\to 0 \end{array}\right]=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}=e^{2}.$$

4. Сравнение асимптотического поведения функций.

Под ***асимптотикой***, или ***асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки*** $x_0\in\mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

О п р е д е л е н и е 4. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***.

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$

ограничена, т.е. $O(1)$ – множество ограниченных функций при $x\to x_0$.

Пример. Функции $\alpha(x)=x^3-x^2-2x$, $\beta(x)=2x$ при $x\to 0$ имеют одинаковый порядок малости, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2-2x}{2x}=-1\neq 0.$$

Поэтому $2x=O\left(x^3-x^2-2x\right)$ и $x^3-x^2-2x=O(x)$ при $x\to 0$.

О п р е д е л е н и е 5. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то они называются ***эквивалентными*** (***асимптотически равными)*** при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Пример. Функции $x^3-x^2+2x\sim x$ при $x\to 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{2x}=1.$$

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha(x)\sim\alpha(x), & \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \\ \mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x), & \mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x), \\ \sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{1}{2}\alpha(x), & \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}\alpha(x), \\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x). & e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x) \end{array}$$

Теорема 14. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е. если при* $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

► Запишем

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x\to x_0$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$, находим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\ ◄$$

Данная теорема используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

О п р е д е л е н и е 6. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является ***бесконечно малой функцией более высокого порядка*** по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Пример. Функция $\alpha(x)=x^6$ при $x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)=\sin x^3$, т.е. $x^6=o(\sin x^3)$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}x^3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x^3}=0.$$

О п р е д е л е н и е 7. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c,\ c\neq 0,\ k>0,$$

то $\alpha(x)$ называется функцией ***k-го порядка малости*** по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \alpha(x)=o(\beta(x)),\ \alpha(x)\sim\beta(x) \text{ при } x\to x_0$$

называются ***асимптотическими оценками***.

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения, как и для бесконечно малых функций.

О п р е д е л е н и е 8. Если $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$, то они называются ***бесконечно большими одного порядка роста при $x\to x_0$.***

О п р е д е л е н и е 9. Если c, $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(g(x))^k}=c\neq 0$, $k>0$ то $f(x)$ – функция ***k-го порядка роста*** по сравнению с $g(x)$.

Пример. Функции $f(x)=2x^2+4$ и $g(x)=x^2-8$ при $x\to\infty$ имеют одинаковый порядок роста, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{x^2-8}=2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение бесконечно малой функции.
2. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
3. Докажите первый замечательный предел.
4. Докажите второй замечательный предел.
5. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.
6. Дайте определение бесконечно большой функции. Сформулируйте теорему о связи бесконечно большой и бесконечно малой функции.