## *Лекция 6.* ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши.
2. Односторонние пределы функции.
3. Бесконечные пределы.
4. Критерий Коши существования предела.

### 1. Определение предела функции по Гейне и по Коши.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $x_0$ т.е. на множестве

$$\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

В точке $x_0$ значение $f(x_0)$ может быть не определено.

**Определение 1 (по Гейне).** Число $A \in \mathbf{R}$ называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к $x_0$, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $A$.

*Символическая запись:*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n): \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

***Решение***. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ не определена в точке $x_0 = 1$, но определена для любой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; 1)$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n \neq 1$, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.



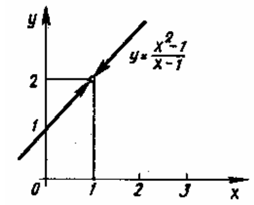


Рис.1.

Образуем последовательность $f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}$. Так как $x_n \neq 1$, то $f(x_n) = x_n + 1$.

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (x_n + 1) = 2.$$

Отсюда $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

**Определение 2 (по Коши).** Число $A$ называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

*Символическая запись:*

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Учитывая, что

$$U(\varepsilon; A) = \{ y \mid |f(x) - A| < \varepsilon \}, \ \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \{ x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \},$$

определение на языке «$\varepsilon - \delta$» можно записать в виде:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) \quad f(x) \in U(\varepsilon; A).$$

**Геометрическая интерпретация** определения конечного предела функции по Коши дана на рисунке 2. Из рисунка видно, что $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ отображается функцией в $U(\varepsilon; A)$, т.е. любому $x$ из проколотой $\delta$-окрестности точки $x_0$ соответствует значение $f(x)$ попадающее в $\varepsilon$-окрестность точки $A$.

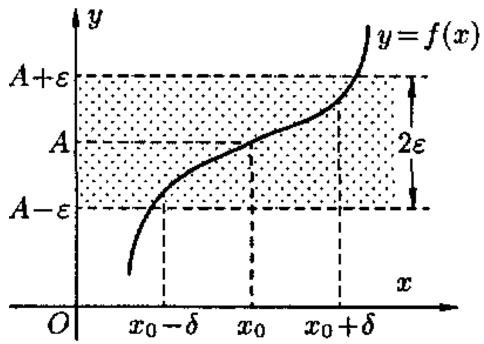


Рис.2.

**Теорема 1.** *Определения предела функции в точке $x_0$ по Гейне и по Коши эквивалентны, т.е. число $A$ – предел функции в точке $x_0$ в смысле определения по Гейне тогда и только тогда, когда $A$ является пределом функции в смысле определения по Коши.*

► *Случай 1.* Пусть $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения по Гейне.

Предположим противное. Пусть $A$ не является пределом функции по определению 2. Это значит, что если не для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon)>0$, чтобы из неравенства $0<|x-x_0|<\delta$ выполнялось неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Поэтому $\exists\,\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall\,\delta>0$ существует $x\neq x_0$, удовлетворяющее неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, что $|f(x)-A|>\varepsilon_0$.

Будем выбирать в качестве $\delta$ последовательно числа

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots .$$

Тогда для $\delta=1$ существует $x_1$, $x_1\neq x_0$ такое, из неравенства $0<|x_1-x_0|<1$ следует $|f(x_1)-A|>\varepsilon_0$,



для $\delta=\dfrac{1}{2}$ существует $x_2$, $x_2\neq x_0$ такое, из неравенства $0<|x_2-x_0|<\dfrac{1}{2}$ следует $|f(x_2)-A|>\varepsilon_0$,

и так далее.

В результате получим последовательность точек $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n\neq x_0$, сходящихся к $x_0$ при $n\to\infty$. Согласно определению по Гейне, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $A$, т.е. $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. Но построению последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеем $|f(x_n)-A|>\varepsilon_0$. Получили противоречие. Значит, справедливо определение предела функции в смысле Коши.

*Случай 2.* Пусть $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения по Коши.

Возьмем последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$, сходящуюся к $x_0$. Тогда по определении 2 для данного $\delta>0$, соответствующего $\varepsilon>0$, найдется такое $N$, что при $n>N$ выполняется неравенство $0<|x_n-x_0|<\delta$. Значит, выполняется и неравенство $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, заключаем, что $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $A$ при $n\to\infty$, т.е. справедливо определение предела в смысле Гейне. ◄

**Определение 3 (по Гейне).** Число $A$ называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значений функции сходится к $A$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty}:\ \lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A .$$

**Определение 4 (по Гейне).** Число $A$ называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента, элементы которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ значений функции сходится к $A$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\; x_n>0,\; x_n\in \overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\; \lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$$(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\; x_n<0,\; x_n\in \overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\; \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A).$$

**Пример**. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет предел при $x\to\pm\infty$, равный нулю.

***Решение***. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ любая бесконечная последовательность значений аргумента. Тогда соответствующая последовательность значений функции $\left(\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\dfrac{1}{x_3},...\right)$ является бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Аналогично можно дать равносильные определения конечного предела функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ на языке «$\varepsilon-\delta$». Например, определение конечного предела функции при $x\to+\infty$.

**Определение 5 (по Коши).** Число $A$ называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число $K$, такое, что неравенство $|f(x)-A|\le 0$ выполняется для всех $x$, при которых $x>K$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\; \exists K>0:\; \forall x>K \;\Rightarrow\; |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Множество

$$\{x|\; x>K\}=U(K;\infty)$$

называется ***окрестностью бесконечно удаленной точки***.

**Геометрически:** график функции $y=f(x)$ находиться в полосе, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$ при любом



значении $x>K$.

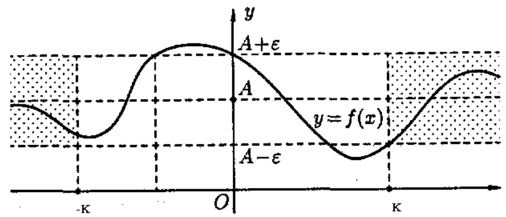


Рис.4.

**2. Односторонние пределы функции.**

При рассмотрении конечного предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$ предполагалось, что точка $x$, приближаясь к $x_0$, могла оставаться как слева, так и справа от нее. Иногда приходится рассматривать предел функции $f(x)$ при условии, что точка $x$, приближаясь к точке $x_0$, остается либо правее, либо левее ее.

**Определение 6.** ***Левой $\delta$-окрестностью*** точки $x_0$ называется множество всех $x$, удовлетворяющих неравенству $-\delta<x-x_0\le 0$ (рис.3):

$$U(\delta;x_0-0)=\{x|\; -\delta<x-x_0\le 0\}.$$

***Правой $\delta$-окрестностью*** точки $x_0$ называется множество всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0\le x-x_0<\delta$ (рис.3):

$$U(\delta;x_0+0)=\{x|\; 0\le x-x_0<\delta\}.$$

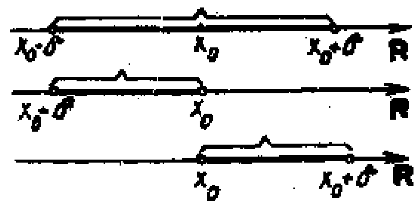


Рис. 3.

**Определение 7.** Число $A$ называется ***левым пределом*** функции $y=f(x)$ в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0-0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

*Символическая запись:*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0-0)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

**Определение 8.** Число $A$ называется ***правым пределом*** функции $y=f(x)$ в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0+0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

*Символическая запись:*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0+0)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

**Теорема 2.** *Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

► *Необходимость.*

Поскольку существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, то по определению имеем

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\exists\delta_1>0:\quad \forall x\quad -\delta_1<x-x_0\le 0 \quad\Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon$,

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\exists\delta_2>0:\quad \forall x\quad 0\le x-x_0<\delta_2 \quad\Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда для любых $x$ удовлетворяющих неравенству $-\delta\le x-x_0<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

*Достаточность.*

В силу существования предела функции $f(x)$ в точке $x_0$ по определению имеем

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x\ \ 0<|x-x_0|<\delta \quad\Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Из неравенства $-\delta\le x-x_0<\delta$ получим:

$\forall x\ \ -\delta<x-x_0\le 0$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$, значит существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$,

$\forall x\ \ 0\le x-x_0<\delta$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$, значит существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$. ◄

**3. Бесконечные пределы функции.**

Пусть функция $y=f(x)$ при $x\to x_0$ по абсолютной величине неограниченно возрастает.

**Определение 9 (по Коши).** Предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ называется ***бесконечным***, если для любого положительного числа $K$ существует число $\delta>0$, такое, что для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)|>K$. Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$, то она называется ***бесконечно большой*** функцией:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ \ \forall K>0\ \ \exists\delta>0:\forall x\ \ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$

$$|f(x)|>K.$$

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, то соответственно: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

На рисунке 5 дана геометрическая интерпретация бесконечных пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ функции $f(x)$ при $x\to x_0$: график функции $f(x)$ расположен в полуплоскости

$y > K$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (Рис.5,*а*) и в полуплоскости $y < -K$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ (Рис.5,*б*).

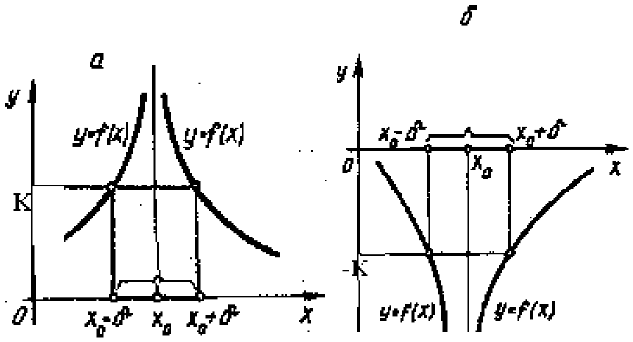


Рис.5.

Аналогично вводится определение бесконечного предела функции по Гейне.

**О п р е д е л е н и е 10.(по Гейне)** Функция $f(x)$ имеет ***бесконечный предел*** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента $x$ соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значений функции является бесконечно большой.

Существуют функции, обладающие следующим свойством: при неограниченном увеличении $|x|$ значения $|f(x)|$ также неограниченно возрастают.

**О п р е д е л е н и е 11.** Предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) называется ***бесконечным***, если для любого сколь угодно большого числа $K \in \mathbf{R}$ найдется такое число $N > 0$, что неравенство $|f(x)| > K$ выполняется для любого $x$, для которого $|x| > N$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall K > 0 \;\; \exists N > 0 : \; \forall |x| > N \;\Rightarrow\; |f(x)| > K .$$

Стремление функции к бесконечности при $x \to \infty$ означает,



что график функции при $\forall x$ ($|x| > N$) выходит за пределы полосы, ограниченной прямыми $y = K$ и $y = -K$.

**Пример.** Функции $f(x) = x^3$ при $|x| \to \infty$ имеет бесконечный предел $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$. График изображен на рисунке 6.

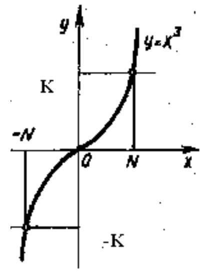


Рис.6.

**4. Критерий Коши существования предела функции.**

**Теорема 9 (критерий Коши существования предела функции).** *Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки $x_0$, что для любых $\forall x', \, x'' \in U(\delta; x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \quad |f(x'') - f(x')| < \varepsilon .$$

► *Необходимость.*

По определению предела функции имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тогда для любых двух точек $x'$ и $x''$ из окрестности $U(\delta; x_0)$ получим

$$|f(x'') - f(x')| = |f(x'') - A + A - f(x')| = |f(x'') - A| + |f(x') - A| <$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

*Достаточность.*

В силу условия для функции $f(x)$ записать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \quad \left| f(x'') - f(x') \right| < \varepsilon .$$

Возьмем произвольную последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к точке $x_0$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тогда по определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $\forall n \geq N(\varepsilon)$ имеем $x_n \in U(\delta; x_0)$. Поэтому для всех номеров $n \geq N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left| f(x_n) - f(x_m) \right| < \varepsilon$ . Значит, последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Согласно критерий Коши сходимости последовательности, последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Следовательно, функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ конечный предел.◄

### Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела функции по Гейне и по Коши. Равносильны ли они?
2. Перечислите свойства конечного предела функции.
3. Дайте определения предела функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ *и* $x \to -\infty$ .
4. Что называется бесконечным пределом функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$ .
5. Дайте определения односторонних пределов функции. Сформулируйте теорему о существовании предела.
6. Сформулируйте и докажите критерий Коши существования предела функции.