Тема 2
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.Определение числовой последовательности. Арифметические действия над последовательностями.
2. Ограниченные и неограниченные последовательности.
3. Бесконечно малые последовательности их свойства.
4. Бесконечно большие последовательности.

1. Определение числовой последовательности. Арифметические действия над последовательностями.

Пусть $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \varnothing$, и $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

Определение 1. ***Числовой последовательностью*** элементов множества X называется отображение $f:\mathbf{N} \to X$. Значение $x_n = f(n)$ называется ***общим членом*** последовательности, числа $x_1, x_2, x_3, ...$ называются ***элементами*** (***членами***) последовательности.

Обозначается: $(x_1; x_2; ...; x_n; ...)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, (x_n), x_n.

Примеры.

1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...\right)$

2) $(n)_{n=1}^{\infty} = (1;2;3;...)$

3) $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty} = (-1;1;-1;...)$

4) $(\sin n\alpha)_{n=1}^{\infty} = (\sin\alpha; \sin 2\alpha; \sin 3\alpha; ...)$.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Ниже приведены **способы** задания последовательности.

1. *Формулой* n*-го члена*.

Например, $x_n = (-1)^n$.

2. *Рекуррентный*.

Например, числа Фибоначчи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$.

3. *Словесный*.

Например, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – это приближение числа π по недостатку с точностью 10^{-n}:

$x_1 = 3{,}1$, $x_2 = 3{,}14$, $x_3 = 3{,}141$, $x_4 = 3{,}1415$ ... .

4. *Графический*:

– точками с координатами $(n; x_n)$, $n \in \mathbf{N}$, на плоскости $\mathbf{R}^2$,

– точками x_n, $n \in \mathbf{N}$, на числовой оси $\mathbf{R}$.

Пусть даны две последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 2. ***Суммой*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 3. ***Произведением*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ***на число*** m называется последовательность $(m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m:

$$m \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 4. ***Произведением*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \cdot (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 5. Если все члены последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ отличны от нуля, то ***частным*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей:

$$\forall\, n\in\mathbf{N} \quad y_n\neq 0 \quad \frac{(x_n)_{n=1}^{\infty}}{(y_n)_{n=1}^{\infty}}=\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Пусть задана последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 6. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n\leq M$ ($x_n\geq m$). Числа M и m называются ***верхней и нижней гранями*** числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ***ограничена сверху*** $\Leftrightarrow$ $\exists M\in\mathbf{R}:\forall n\in\mathbf{N}\;\; x_n\leq M$.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ***ограничена снизу*** $\Leftrightarrow$ $\exists m\in\mathbf{R}:\forall n\in\mathbf{N}\;\; x_n\geq m$.

Пример. Последовательность $(-n)_{n=1}^{\infty}$ – является ограниченной сверху, так как все элементы последовательности не больше $M=-1$. Последовательность $(n)_{n=1}^{\infty}$ – является ограниченной снизу, так как все элементы последовательности не меньше $m=1$.

Определение 7. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m\leq x_n\leq M$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ***ограничена*** $\Leftrightarrow$ $\exists m,M\in\mathbf{R}:\forall n\in\mathbf{N}\;\; m\leq x_n\leq M$.

Пусть $A=\max\{|m|,|M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n|\leq A$.

Определение 8. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если существует действительное число $A>0$ такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $|x_n|\leq A$.

Пример. Последовательность $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной, так как каждый элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $\frac{1}{2}\leq x_n<1$.

Определение 9. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***неограниченной***, если для любого действительного числа $A>0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n|\geq A$, т.е. либо $x_n\geq A$, либо $x_n\leq A$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ***неограниченна*** $\Leftrightarrow$ $\forall\, 0<A\in\mathbf{R}\;\exists n\in\mathbf{N}:|x_n|\geq A$.

Пример. Последовательность $(2n)_{n=1}^{\infty}$ является неограниченной, так как для любого положительного числа $A\in\mathbf{R}$ $x_n\geq A$ при $n\geq\frac{A}{2}$.

3. Бесконечно малые последовательности их свойства.

Определение 10. Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно малой***, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$.

Символическая запись:

$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – б.м.п. $\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon):\forall n\geq N(\varepsilon)\quad |\alpha_n|<\varepsilon$.

Неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$ равносильно $-\varepsilon<\alpha_n<\varepsilon$. Это означает, что начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$ все элементы α_n последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ лежат в промежутке $(-\varepsilon;\varepsilon)$.

Пример. Доказать, что последовательность $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью.

Решение. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbf{N}$, то $\frac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$. Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

Теорема 1. *Бесконечно малая последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена*.

► По определению бесконечно малой последовательности имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Обозначим $A = \max\{\varepsilon; |\alpha_1|; |\alpha_2|; \ldots; |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда, очевидно, что $|\alpha_n| \le A$ для любого n. ◄

Теорема 2. *Сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

► Пусть $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. По определению имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(\beta_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \ge N_2(\varepsilon) \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем номер $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тогда для всех $n > \mathbf{N}$ одновременно выполняются два неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит,

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$|\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательности $(\alpha_n + \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\alpha_n - \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые. ◄

Теорема 3. *Произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

► Пусть $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. По определению имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon,$$

$$(\beta_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon = 1 \;\; \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \ge N_2(\varepsilon) \quad |\beta_n| < 1.$$

Возьмем номер $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тогда для всех $n > \mathbf{N}$ одновременно выполняются два неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon$ и $|\beta_n| < 1$.

Значит,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая. ◄

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *на ограниченную* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *есть бесконечно малая последовательность.*

► По определению ограниченной последовательности имеем

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \text{огран.} \;\Leftrightarrow\; \exists A > 0 : \forall n \in \mathbf{N} \quad |x_n| \le A.$$

По определению бесконечно малой последовательности:

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \text{ – б.м.п. } \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Тогда для всех $n \ge N(\varepsilon)$ выполняется

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon .$$

Это означает, что последовательность $(\alpha_n \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая. ◄

4. Бесконечно большие последовательности.

Определение 11. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа $A > 0$ существует такой номер $N(A)$, что для всех номеров $n > N(A)$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ – б.б.п. } \Leftrightarrow \ \forall\, A > 0\ \exists N(A): \forall n \ge N(A) \quad |x_n| > A .$$

Пример. Последовательность $(n+2)_{n=1}^{\infty}$ – является бесконечно большой последовательностью, так как решая неравенство $|n+2| > A$, получим $N(A) = A - 2$. Это значит, что, начиная с номера $A-1$ все элементы последовательности больше A. Положим $A = 100$. Тогда элементы последовательности с номерами $n > N(A) = 98$, больше $A = 100$.

Замечание. Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая.

Пример. Последовательность $(1;2;1;3;1;4;...;1;n;1;n+1;...)$ является неограниченной, однако не является бесконечно большой.

Теорема 5 (связь бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей). *1) Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательность. 2) Если $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой последовательностью.*

► 1) По определению бесконечно большой последовательности имеем

$$(x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \ne 0,\ \text{– б.б.п.} \Leftrightarrow$$
$$\forall\, A > 0\ \exists N(A): \forall n \ge N(A) \quad |x_n| > A .$$

Возьмем $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Тогда $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех номеров $n > N(\varepsilon)$.

2) Аналогично. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение числовой последовательности. Приведите примеры.
2. Какие арифметические действия можно выполнять над последовательностями?
3. Сформулируйте определения ограниченной сверху и снизу последовательности. Какая последовательность называется ограниченной?
4. Какая последовательность называется бесконечно малой последовательностью? Приведите примеры.
5. Перечислите свойства бесконечно малых последовательностей.
6. Какая последовательность называется бесконечно большой последовательностью? Приведите примеры.
7. Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?
8. Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой последовательности и бесконечно большой последовательности.