Лекция 3. ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств.
2. Принцип вложенных отрезков.
3. Перестановка и сочетания. Формула Бинома Ньютона.

1. Верхние и нижние грани числовых множеств.

Рассмотрим произвольное множество $A \subseteq \mathbf{R}$.

Определение 1. Множество действительных чисел A называется ***ограниченным сверху***, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \leq M$, т.е.

$$\exists M \in \boldsymbol{R} : \forall x \in A \;\; x \leq M .$$

Число M называется ***верхней гранью*** множества A.

Множество A неограничено сверху, если

$$\forall M \in \boldsymbol{R} : \exists x_0 \in A \;\; x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется ***наибольшим элементом*** множества A, если

$$\forall x \in A \;\; x < c_1 .$$

Определение 2. Множество действительных чисел A называется ***ограниченным снизу***, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \geq m$, т.е.

$$\exists m \in \boldsymbol{R} : \forall x \in A \;\; x \geq m .$$

Число m называется ***нижней гранью*** множества A.

Множество A неограничено снизу, если

$$\forall m \in \boldsymbol{R} : \exists x_0 \in A \;\; x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется ***наименьшим элементом*** множества A, если

$$\forall x \in A \;\; x > c_2 .$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ***ограниченным***:

$$\exists K > 0 : \forall x \in A \quad |x| \leq K .$$

Определение 3. Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется ***точной нижней гранью***.

Обозначается:

$$m = \inf A \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A : x \geq m \text{ и } \forall m' > m \quad \exists x_0 \leq m', x_0 \in A .$$

Определение 4. Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется ***точной нижней гранью***.

Обозначается:

$$m = \inf A \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A : x \geq m \text{ и } \forall m' > m \quad \exists x_0 \leq m', x_0 \in A .$$

Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Пример. Ограниченными множествами являются: $[a;b]$, $(a;b)$, множество значений $y = \sin x$ и т.д.

Среди подмножеств множества $\mathbf{R}$, существуют такие, которые не являются ограниченными. Они называются ***неограниченными множествами***.

Пример. Интервал $(a;+\infty)$, множество $\mathbf{N}$ является множествами, которые ограничены только снизу. Множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ не ограничены как сверху, так и снизу.

Для множеств, неограниченных сверху, полагают $\sup A = \infty$, а неограниченных снизу полагают $\inf A = -\infty$.

Примеры. **1.** Пусть $A = [2;8]$, тогда $m = \inf A = 2$, $M = \sup A = 8$.

2. Пусть $\mathbf{Z}_+$ – множество всех неотрицательных целых чисел. Тогда

$$m = \inf\{p \mid p \in \mathbf{Z}_+\} = 0 ,\; M = \sup\{p \mid p \in \mathbf{Z}_+\} = +\infty .$$

3. Пусть $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел. Тогда

$$m = \inf \mathbf{R} = -\infty ,\; M = \sup \mathbf{R} = +\infty .$$

4. Пусть $A = \left\{x \mid x^2 < 7, x \in \mathbf{R}\right\}$. Тогда

$$m = \inf A = \inf\left\{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}\right\} = -\sqrt{7} ,$$

$$M = \sup\left\{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}\right\} = \sqrt{7} .$$

Теорема 1. *Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

► Пусть A – непустое множество, ограниченное сверху, $A \neq \varnothing$. Тогда множество Y чисел, ограничивающих сверху множество A, непусто. Из определения верхней грани следует, что для любого $a \in A$ и любого $y \in Y$ имеет место неравенство $a \leq y$.

Из свойства непрерывности множество действительных чисел следует, что существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что $a \leq c \leq y$. Из неравенства $a \leq c$ следует, что c ограничивает множество A сверху, из неравенства $y \geq c$ следует, что c есть наименьшая из всех верхних граней множества A. Значит, c – точная верхняя грань, т.е. $c = \sup A$.

Аналогично доказывается существование точной нижней грани для ограниченного снизу множества.◄

Точные грани множества A могут как принадлежать, так и не принадлежать ему.

Примеры. 1. Пусть $A = (a;b]$. Тогда $a = \inf A \notin A$, $b = \sup A \in A$.

В случае, если точная верхняя (нижняя) грань принадлежит множеству A, она совпадает с наибольшим (наименьшим) элементом этого множества, т.е. $\sup A = \max A$, $\inf A = \min A$.

2. Пусть $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$. Тогда $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. Точная верхняя грань достигается и равна наибольшему элементу множества A: $\sup A = \max A = 1$, нижняя грань $\inf A \notin A$.

2. Принцип вложенных отрезков.

Определение 5. Система числовых отрезков (рис.1)

$$[a_1;b_1],\ [a_2;b_2],\ \dots,\ [a_n;b_n],\dots,\ a_n \in \mathbf{R},\ b_n \in \mathbf{R},$$

называется ***системой вложенных отрезков***, если

1) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем

$$[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \dots \supset [a_n;b_n] \supset \dots,$$

2) концы отрезков $\forall n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

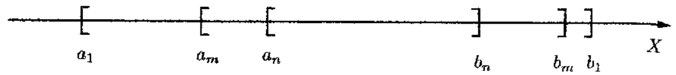

Рис.1.

Определение 6. Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n;b_n]$, $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \in \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, называются ***стремящимися к нулю***, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 2. *Всякая система вложенных числовых отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную точку, принадлежащую всем отрезкам.*

► *1. Существование.*

Пусть $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots\}$ и $B = \{b_1; b_2; b_3; \dots\}$.

Из условия 1) определения 5 следует, что для любых номеров m и n выполняется неравенство $a_m \leq b_n$. В силу свойства непрерывности множества действительных чисел $\mathbf{R}$ существует такое число ξ, что $\forall m, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $a_m \leq \xi \leq b_n$. Если положить $m = n$, то получим $a_n \leq \xi \leq b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Значит, существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам, т.е. $\xi \in [a_n;b_n]$.

2. Единственность.

Предположим противное. Пусть существует еще одна точка $\eta \neq \xi$, принадлежащая всем отрезкам системы, т.е. $\forall n \in \mathbf{N}$ $\eta \in [a_n;b_n]$.

Тогда $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|\eta - \xi| \leq b_n - a_n$. По определению 6 $\forall \varepsilon > 0$ выполняются неравенство $|\eta - \xi| \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε положим $\varepsilon = \frac{1}{2}|\eta - \xi|$. Тогда $|\eta - \xi| \leq \frac{1}{2}|\eta - \xi|$. Отсюда $1 < \frac{1}{2}$. Получили противоречие. Следовательно, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n;b_n]$. ◄

Замечание. Число ξ ограничивает сверху множество $A=\{a_1;a_2;a_3;...\}$ и снизу множество $B=\{b_1;b_2;b_3;...\}$. В силу определения верхней и нижней грани справедливы неравенства $a_n \le \sup A \le \xi \le \inf B \le b_n$. В силу единственности точки ξ, имеем $\sup A = \xi = \inf B$.

3. Перестановки и сочетания. Формула бинома Ньютона.

Пусть задано конечное множество элементов.

Определение 7. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются ***перестановками***.

Теорема 3. *Число возможных перестановок из n элементов равно $P_n = n!$.*

Без доказательства.

Пример. Пусть дано множество $A=\{1;2;3\}$. Возможными перестановками элементов 1, 2, 3 являются: 123, 132, 213, 231, 321, 312. Число Всевозможных перестановок $P_3 = 3! = 6$.

Определение 8. Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется ***сочетанием n элементов по k***.

Пример. Множества $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ образуют всевозможные сочетания из элементов множества $A=\{1;2;3\}$ по два.

Теорема 4. *Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Без доказательства.

Число C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу. Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & & . & & . & & . & . & .
\end{array}$$

В каждой n-ой строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n

Теорема 5 (формула бинома Ньютона).

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Без доказательства.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие множества называются ограниченными? Запишите с помощью кванторов ограниченного снизу множества.
2. Дайте определение точной верхней грани ограниченного сверху множества. Сформулируйте теорему о существовании точной грани у такого множества.
3. Дайте определение точной нижней грани ограниченного сверху множества. Сформулируйте теорему о существовании точной грани у такого множества.
4. Сформулируйте и докажите принцип вложенных отрезков.