СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие начинает цикл работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, проводимых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу.

Первая часть включает материал по темам: «Элементы теории множеств», «Предел последовательности», «Предел функции», которые условно можно назвать «Введение в анализ». В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

При формулировке теорем и их доказательств, приходится повторять отдельные слова и выражения. Чтобы сократить записи, в пособии используются приводимые ниже логические символы.

$\forall$ – квантор общности, читается: «любой», «всякий», «каждый».

$\exists$ – квантор существования, читается: «существует», «найдется».

$\exists!$ – существует и единственный.

: – двоеточие означает «имеет место», «такое, что».

$\Rightarrow$ – символ логического следования означает «следует», «вытекает».

$\Leftrightarrow$ – символ эквивалентности обозначает равносильность утверждений, расположенных по разные стороны от него, и читается: «тогда и только тогда, когда ...», «равносильно...», «необходимо и достаточно».

С помощью квантора общности $\forall$ выражение «для любого x из множества *M*» можно записать короче: $\forall x \in M$. С помощью квантора существования $\exists$ выражение «существует x, принадлежащее множеству *M*, такое, что ...» записывают так: $\exists x \in M :$. В пособии начала доказательств обозначаются символом – ►, окончание – ◄.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Лекция 1. МНОЖЕСТВА

1. Язык теории множеств.
2. Операции над множествами.
3. Отображение множеств.

1. Язык теории множеств.

Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под ***множеством*** понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. В математике вместо термина «множество» часто говорят «система», «класс», «семейство», «совокупность».

Объекты или предметы, из которых состоит множество, называют ***элементами множества***.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots$. Элементы множества – строчными $a, b, \ldots$. Если элемент a ***принадлежит*** множеству A, то пишут $a \in A$; если *a* ***не принадлежит*** множеству *A*, пишут $a \notin A$.

Элементами множеств могут быть объекты самой различной природы. В математике чаще рассматриваются множества, состоящие из чисел, точек, кривых и т. д.

Способы задания множеств:

1) перечисление элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d , то пишут $A = \{a, b, c, d\}$;

2) указание характеристического свойства элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A = \{x \mid P(x)\}$;

3) диаграммы Эйлера-Венна – множества изображаются в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множеств.

Множество, состоящее из одного элемента, называют ***одноэлементным*** и *обозначается* $\{a\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым*** и *обозначается* символом Ø.

Примеры. 1. Множество действительных корней уравнения $x^2+4=0$ пусто.

Определение 1. Множества A и B называются ***равными***, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначается: $A=B$.

Если множество A ***не равно*** множеству B, то пишут $A\neq B$.

Пример. Пусть A – множество корней уравнения $x^2+5x+6=0$, т.е. $A=\left\{x\middle|x^2+5x+6=0\right\}$. Множество $B=\left\{2,3\right\}$. Очевидно, что $A=B$.

Равенство множеств обладает следующими **свойствами**:

1) рефлексивность: $A=A$;

2) симметричность: $A=B\Rightarrow B=A$;

3) транзитивность: $A=B, B=C \Rightarrow A=C$.

Определение 2. Множество A, $A\neq\varnothing$, называется ***подмножеством*** множества B, $B\neq\varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначается: $A\subseteq B$.

Очевидно, что $\varnothing\subseteq B \ \ \forall B$.

Определение 3. Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$, то A называется ***собственным подмножеством*** множества B.

Обозначается: $A\subset B$.

Пример. Любое натуральное число $n\in\mathbf{N}$ является целым, поэтому $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$. Целое число $p\in\mathbf{Z}$ является рациональным, следовательно, $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$. Рациональное число $q\in\mathbf{Q}$ является действительным, поэтому $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

2. Операции над множествами.

Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется ***основным*** или ***универсальным***. *Обозначается* универсальное множество буквой U.

Пример. В планиметрии в качестве универсального множества можно рассматривать множество $\mathbf{R}^2$ всех точек плоскости Oxy. Тогда различные фигуры на плоскости будут подмножествами $\mathbf{R}^2$.

Определение 4. ***Объединением*** множеств A и B называется множество $A\cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B:

$$A\cup B=\left\{x\middle|\ x\in A \text{ или } x\in B\right\}.$$

Свойства операции объединения множеств:

1) коммутативность $A\cup B=B\cup A$;

2) ассоциативность $A\cup\left(B\cup C\right)=\left(A\cup B\right)\cup C$;

3) $A\cup A=A$;

4) $A\cup\varnothing=A$;

5) $A\cup U=U$.

Определение 5. ***Пересечением*** множеств A и B называется множество $A\cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A\cap B=\left\{x\middle|x\in A \text{ и } x\in B\right\}.$$

Свойства операции пересечения:

1) коммутативность $A\cap B=B\cap A$;

2)ассоциативность $A\cap\left(B\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap C$;

3) $A\cap A=A$;

4) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

5) $A\cap U=A$;

6) дистрибутивность операций объединения и пересечения

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Определение 6. ***Разностью*** двух множеств B и A называется множество $B\setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A:

$$B\setminus A=\left\{x\ \middle|\ x\in B \text{ и } x\notin A\right\}.$$

Определение 7. Разность $U\setminus A$ называется ***дополнением*** множества A до универсального множества U.

Обозначается: $\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$.

Свойства операции разность:

1) $A \cup \overline{A} = U$;
2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
3) $\overline{\overline{A}} = A$;
4) $\overline{\varnothing} = U$;
5) $\overline{U} = \varnothing$.

Все операции геометрически удобно изображать на диаграммах Эйлера-Венна. Например, на рисунке 1 представлена операция пересечения множеств A и B.

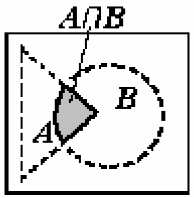

Рис.1.

Примеры. **1.** Если $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,5,6\}$, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{5\}$.

2. Пусть **Z** – множество целых чисел p. Примем это множество за универсальное, и рассмотрим два его подмножества $A = \{p \mid 0 < p < 30\}$ и $B = \{p \mid 10 < p < 40\}$. Тогда $B \setminus A = \{p \mid 30 < p < 40\}$.

Определение 8. Пара элементов $(x;y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется ***упорядоченной***, если указан порядок записи элементов x и y.

При этом $(x_1;y_1) = (x_2;y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Элементы x и y упорядоченной пары $(x;y)$ называются ***координатами***, при этом x – первая координата, y – вторая.

Определение 9. ***Декартовым произведением*** двух множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$, $x \in A$, $y \in B$.

Обозначается: $A \times B = \{(x;y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Пример. Если $A = \{1;3\}$, $B = \{5;7\}$, то $A \times B = \{(1;5),(1;7),(3;5),(3;7)\}$, $B \times A = \{(5;1),(5;3),(7;1),(7;3)\}$.

Сравнивая $A \times B$ и $B \times A$, видно, что $A \times B \neq B \times A$ при $A \neq B$.

Если $A = B$, то $A \times A$ называется ***декартовым квадратом***.

Обозначается: $A^2 = A \times A$.

3. Отображение множеств.

Пусть X, Y – произвольные множества.

Определение 10. Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** (***отображением***), заданной на множестве X со значениями во множестве Y. При этом элемент x называется ***независимым переменным*** (***аргументом***), элемент y – зависимым переменным.

Обозначается: $f : x \mapsto y$ при $x \in X$, и $y \in Y$,

$$f : X \to Y.$$

Множество X называется ***областью определения*** отображения f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется ***множеством значений*** отображения f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется ***образом*** элемента x при отображении f и обозначается $f(x)$. Элемент x называется ***прообразом*** элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x)$, $x \in X$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде

$$f : x \mapsto y \iff \forall x \in X \; \exists!\, y \in Y : y = f(x).$$

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется ***образом множества*** X при этом отображении:

$$f(X)=\left\{ f(x) \middle| x\in X \right\} \subseteq Y .$$

Определение 11. ***Полным прообразом*** множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B)=\left\{ x\in X \middle| f(x)\in B \right\} \subseteq X .$$

Определение 12. Отображение f^{-1} называется ***обратным*** к отображению f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Символическая запись:

$$f^{-1}: y \mapsto x \;\Leftrightarrow\; \forall y \in Y \;\exists x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Определение 13. Отображение f называется

1) ***сюръекцией***, если $E(f)=Y$;

2) ***инъекцией***, если при $\forall x_1, x_2 \;\; x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$;

3) ***биекцией*** (***взаимно однозначным***), если каждый элемент $y \in Y$ является образом только одного элемента $x \in X$ (рис. 2):

$$\forall y \in Y \;\exists x \in X : y = f(x),\; \forall x_1, x_2 \in X \;\;\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

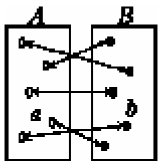

Рис.2.

Если f является взаимно-однозначным отображением X на Y, то обратное отображение f^{-1} является взаимно однозначным отображением Y на X. Поэтому они называются ***взаимно обратными отображениями***

Пусть $f: x \mapsto y$ и $g: y \mapsto z$ отображения, где область первого совпадает с областью определения второго.

Определение 14. ***Композицией*** (***сложной функцией***) отображений $f: x \mapsto y$ и $g: y \mapsto z$ называется отображение $g \circ f : x \mapsto z$ такое, что

$$\forall \; x \in X \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Определение 15. Два множества A и B называются ***эквивалентными*** (***равномощными***), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

Обозначается: A~B.

Пример. Доказать, что множество натуральных чисел $\mathbf{N}=\left\{ n \middle| \; n=1,2,3,... \right\}$ и множество четных натуральных чисел $A=\left\{ 2n \middle| \; n\in \mathbf{N} \right\}$ эквивалентны.

Решение. Установим между ними взаимно однозначное соответствие с помощью соотношения $n \leftrightarrow 2n$, т.е.

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & ..., & n, & ... \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & ..., & 2n, & ... \end{array}$$

Таким образом, множество натуральных чисел **N** эквивалентно собственному подмножеству четных натуральных чисел.

Определение 16. Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел **N**, называется ***счетным***.

Если множество A счетное, то его элементы можно занумеровать.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются ***конечными***. Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***. Если A – конечное множество, то число его элементов *обозначается* $|A|$ или $\dim A$ и называется ***мощностью множества*** A.

Пример. Множество решений кубического уравнения, множество вершин многоугольника конечны. Множество натуральных чисел, множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку плоскости, бесконечны.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под термином «множество»? Приведите примеры множеств.
2. Какие существуют способы задания множеств?
3. Какие множества называются равными? Приведите примеры.
4. Что называется подмножеством множества. Какое подмножество называется собственным подмножеством множества.
5. Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения. Изобразите их на кругах Эйлера- Венна.
6. Что называется декартовым произведением множеств?
7. Что называется отображением? Дайте определение области определения, области значения отображения.
8. Какое отображение называется сюръекцией, инъекцией, биекцией?
9. Что называется композицией отображений?
10. Дайте определение эквивалентности множеств.
11. Какое множество называется счетным? Приведите примеры счетных множеств.