Е.Г. Костенко,
Е.В. Мирзоева,
В.В. Лысенко

Анализ и статистическая обработка данных спортивно-педагогических исследований

Е.Г. Костенко, Е.В. Мирзоева, В.В. Лысенко

АНАЛИЗ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ СПОРТИВНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Монография

Чебоксары 2019

УДК 796/799
ББК 75.1
К72

Рецензенты
д-р экон. наук, профессор
Института сферы обслуживания и предпринимательства (филиала)
ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
О.И. Радина;

д-р пед. наук, профессор
ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический
университет», член Общероссийского Союза социальных педагогов
и социальных работников (ССОПиР), член общественного движения
«Родительская забота» при Государственной думе России; академик
Международной академии детско-юношеского туризма и краеведения
С.Н. Жданова

Костенко Е. Г., Мирзоева Е. В., Лысенко В. В.
К72 **Анализ и статистическая обработка данных спортивно-педагогических исследований** : монография / Е. Г. Костенко [и др.]. – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – 132 с.

ISBN 978-5-6043435-7-9

Монография посвящена анализу и статистической обработке эмпирических данных спортивно-педагогических исследований и их интерпретации, основой целью которых является обнаружение и регистрация комплекса характеристик обработанного материала, на основе которых формируются основные направления и выводы.

В современном мире специалистам в области физической культуры и спорта необходимо уметь обобщать и систематизировать данные, устанавливать тенденции и проблемы в области физической культуры и спорта, формировать предложения относительно их решения, проводить научные исследования по разрешению проблемных ситуаций в области физической культуры и спорта с использованием современных методов исследования.

DOI 10.31483/a-103
ISBN 978-5-6043435-7-9

Оглавление

Предисловие

Основой целью интерпретации спортивно-педагогических исследований является обнаружение и регистрация комплекса характеристик обработанного материала, на основе которых формируются основные направления и выводы.

Первостепенным способом обработки эмпирических данных представляется анализ и статистическая обработка спортивно-педагогических материалов.

Количественные характеристики дают возможность проанализировать процессы, выявить наличие и оценить величину связи различных качеств, обнаружить закономерности.

Исследования в педагогической, физкультурно-спортивной сфере является двухуровневым: экспериментально-эмпирическим и теоретическим.

При объяснении полученных эмпирических данных используются такие приемы сопоставления, как: оценка экспериментатора, основанная на знании конкретной обстановки, предыдущем опыте; сравнение между собой элементов числового ряда по двум или более признакам; сравнение между собой изучаемых групп в соотнесении с некоторыми внешними признаками, факторами. Внешнее сравнение, как правило, проводится в опытно-экспериментальной работе, когда проводится изучение того, как влияют условия или средства спортивно-педагогического эксперимента на изучаемую переменную, и с этой целью формируются контрольная и экспериментальная группа.

Интерпретация спортивных и педагогических результатов исследования необходима для преобразования информации в знание, проходит по следующему алгоритму: предположения; определение достоверности информации; рефлексия; организация информации; сравнение с данными других источников, с другими ситуациями; анализ; выявление причины и следствия; синтез; выводы; оценка информации для подтверждения или опровержения гипотезы исследования.

Анализируя эмпирические данные спортивных и педагогических исследований, экспериментатор проводится сравнительную оценку результатов исследования с теоретическими предположениями в спортивной и педагогической работе.

В современном мире специалистам в области физической культуры и спорта необходимы знания и умения:

– обобщать и систематизировать данные, устанавливать тенденции и проблемы в области физической культуры и спорта, профессионального образования, формировать предложения относительно их решения;

– проводить научные исследования по разрешению проблемных ситуаций в области физической культуры и спорта с использованием современных методов исследования, в том числе из смежных областей знаний;

– управлять взаимодействием заинтересованных сторон и обменом информацией в процессе деятельности в области физической культуры и массового спорта.

ГЛАВА 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ СПОРТИВНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1. Методы спортивно-педагогических исследований

В спортивно-педагогической работе используется большое количество различных методов и методик:

– общенаучные;
– педагогические;
– психологические;
– биологические;
– социологические.

Все они тесно связаны между собой. Исследования в педагогической, физкультурно-спортивной сфере проводятся на двух уровнях: экспериментально-эмпирическом и теоретическом.

Наиболее общим методом, который используется как в теоретических, так и в экспериментальных работах, является теоретический анализ и обобщение. Он касается литературных данных, документов, материалов, эмпирических данных и другой информации.

К педагогическим методам можно отнести педагогическое наблюдение (включенное и не включенное), педагогический эксперимент, составной частью которого являются контрольные испытания (тесты).

В процессе спортивно-педагогического исследования используются также методы непосредственного сбора и регистрации информации и методы ее обработки. Методом сбора ретроспективной (прошлой) информации является изучение источников – литературных, статистических, программно-методических, инструктивных и обобщение этих материалов. Может также использоваться опрос, анкетирование, беседы, интервью.

Текущая информация может собираться методом наблюдения, который представляет собой анализ и оценку предмета исследования без вмешательства в его функционирование наблюдателя.

Всякое учение основано на фактах. Факты собираются, сопоставляются и делаются выводы – устанавливаются законы той области деятельности, которую мы изучаем. Способы получения этих фактов называются методами научного исследования.

Общенаучные методы спортивно-педагогических исследований, направленные на получения разнообразных факторов, составляющих эмпирическую основу теории, включают наблюдение, измерение, описание, эксперимент.

Наблюдение – систематическое, целенаправленное прослеживание проявлений психики человека в определенных условиях. Научное наблюдение требует постановки четкой цели и планирования. Заранее определяется, какие именно процессы и явления будут занимать наблюдателя, сообразно каким внешним проявлениям их дозволено прослеживать, в каких условиях должно происходить наблюдение. Наблюдение бывает двух видов:

– визуальное, непосредственное;

– при помощи технических средств и приборов.

Измерение – установление фактов при помощи их фиксации, упорядочения, группирования, генерализации, классификации и систематизации.

Описание – выражение данных наблюдений с помощью естественного языка как переходный этап к обобщению. Описание может быть языковым, графическим, математическим, кодовым.

Эксперимент заключается в том, что экспериментатор умышленно создает и видоизменяет условия, в которых действует изучаемый человек (испытуемый), ставит пред ним определенные задачи и сообразно тому, как они решаются, судит о возникающих при этом процессах и явлениях. Проводя испытание при одинаковых условиях с разными испытуемыми, экспериментатор может установить индивидуальные особенности протекания процессов у каждого из них.

В спортивно-педагогических исследованиях применяют два основных типа эксперимента: лабораторный и врожденный.

Лабораторный эксперимент проводят в умышленно организованных и в известном смысле искусственных условиях, он требует специального оснащения, а иногда и применения технических приспособлений. Однако наряду с достоинствами лабораторное испытание имеет и определенные недостатки. Наиболее важный изъян – это его некоторая искусственность, которая при определенных условиях может привести к нарушению естественности протекания процессов, а следственно, к неправильным выводам.

Естественное испытание сочетает в себе положительные стороны метода наблюдения и лабораторного эксперимента. Здесь сохраняется естественность условий наблюдения и вводится верность эксперимента. Естественный эксперимент строится беспричинно, когда испытуемые не подозревают об эксперименте, которому они подвергаются, что обеспечивает естественность их поведения.

Социометрическое испытание используется ради изучения взаимоотношений между людьми, положения, которое занимает лицо в той либо другой группе (команде). При изучении группы каждый отвечает на строй вопросов, касающихся выбора партнеров ради совместной работы, отдыха, занятий.

Исследование, как правило, начинается с поиска и обнаружения проблемной ситуации – объективно существующего противоречия между потребностями (запросами, нуждой) общества или личности и существующими в данное конкретное время способами их удовлетворения. Проблемная ситуация может быть использована как затруднение, возникающее от необходимости объяснить или предсказать то или иное явление при остром дефиците информации, или возможность достичь цели при помощи известных, традиционных средств и методов.

Другими словами, проблемная ситуация это противоречие между потребностями и способами их удовлетворения (например, современное состояние физического воспитания в школе), противоречие между знанием о потребностях людей и незнанием путей, средств, методов, способов их удовлетворения.

Проблема – (буквально – задача) – сложная познавательная задача, решение которой представляет существенный теоретический или практический интерес, ситуация, требующая решения. Она представляет собой необходимость поиска новой информации, наиболее полно и объективно отражающей конкретное явление и способы его совершенствования. Проблема характеризуется недостаточностью наличной информации для решения конкретных задач. Например, определение таких категорий, как "физическая культура", "физическая рекреация", "неспециальное физкультурное образование", "спорт" было невозможно до появления современных концепций теории культуры.

В процессе предварительного осмысления и анализа проблемы определяется тема исследования, которая отражает конкретную его направленность (например, компоненты исполнительского мастерства спортсмена и методы их оценок). Она должна отвечать требованиям актуальности, новизны, иметь теоретическое и практическое значение. Работа над темой, в конечном счете, ведет к приращению научных знаний. В этом заключается теоретическое значение исследования.

Актуальность означает важность, необходимость решения проблемы для настоящего времени.

Новизна – это отсутствие в настоящее время в литературе полностью аналогичных работ, оригинальность обобщений, выводов исследования.

В процессе разработки темы необходимо определить объект и предмет исследования и выработать рабочую гипотезу.

Под объектом исследования понимается то, на что направлена познавательная деятельность ученого. Это могут быть люди (группы людей), явления, события, процессы. Например, физическая культура как вид культуры; студенты вузов; тренировочный процесс; силовые качества спортсмена и т.п. Другими словами – это все то, что явно или неявно содержит противоречие, порождает проблемную ситуацию и создает проблему.

Предмет исследования – это отношения объекта, одно из его свойств, сторона, которые подлежат непосредственному изучению. Например, физическая рекреация как компонент физической культуры; специфика развития силовой выносливости у юных спортсменов и т.п.

Объект и предмет – сквозные категории. Они могут меняться местами в зависимости от уровня подходов к ним и их рассмотрения. После выбора темы, определения объекта и предмета, исследователь вырабатывает рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза (обоснованное предположение) – научное предположение о возможных причинных связях явлений, которые пока еще не доказаны и их следует доказать, опираясь на добытую в процессе исследования объективную информацию, аргументы и факты. Гипотеза – научно обоснованные высказывания вероятностного характера относительно сущности, взаимосвязей и причин явлений объективной реальности. Другими словами – это научно обоснованная догадка. Переход от проблемы к гипотезе – это переход от вопросов к объяснению и последующей рекомендации к практике.

К основным видам рабочих (исследовательских) гипотез можно отнести следующие:

– описательная, в основе которой лежит предположительное описание причин, которые являются основой того или другого явления, процесса (объекта исследования);

– объяснительная, которая предполагает объяснение причин и следствий, характеризующая объект исследования, его связи, отношения.

Итак, рассмотрим подробно каждый метод спортивно-педагогического исследования.

Анализ научно-методической литературы. Подготовка выпускной квалификационной работы, как и любая научно-исследовательская работа, немыслима без изучения специальной литературы. Необходимо помнить, что исследовательская работа – это, прежде всего обобщение уже имеющейся информации. Изучение литературы должно начинаться еще в процессе выбора темы выпускной квалификационной работы.

Исследователю при проведении анализа научно-методической литературы необходимо ясно себе представить все то, что имеет отношение к изучаемой проблеме: ее постановку, историю, степень разработанности, применяемые методы исследования и т. д.

Прежде чем приступить к анализу литературных источников, исследователю необходимо выбрать тему исследования, сформулировать цель и задачи исследования.

Анализ научно-методической литературы необходим для более четкого представления методологии исследования и определения общих теоретических позиций, а также выявления степени научной разработанности данной проблемы по выбранной теме выпускной квалификационной работы.

Всегда важно установить, насколько и как эта проблема освещена в общих научных трудах и специальных работах по данному вопросу, отражающих результаты соответствующих исследований.

Исследователь при этом узнает, какие стороны уже достаточно хорошо разработаны, по каким вопросам ведутся научные споры, сталкиваются разные научные концепции и идеи, что уже устарело, какие вопросы не решены, и на основе этого определяет область своего исследования. Кроме того, проработанная по теме литература служит основой для написания первой главы выпускной квалификационной работы «Обзор литературы», которая предшествует изложению теоретического материала.

Анализ документальных и архивных материалов. Другим методом сбора фактических данных является изучение педагогической документации и архивных материалов: планов и дневников тренировок, протоколов соревнований, руководящих материалов и сводных отчетов спортивных организаций, материалов инспектирования, учебных планов и программ, журналов учета успеваемости и посещаемости, личных дел и медицинских карточек, статистических материалов и т. п. В этих документах фиксируются многие объективные данные, помогающие установить ряд характеристик, причинные связи, выявить некоторые зависимости и т. д.

Большинство необходимых документов сконцентрировано в государственных архивах. В нашей стране имеются центральные архивы федерального значения, республиканские, краевые и областные архивы. Свои архивы имеет также ряд научных и учебных заведений и организаций.

Педагогическое наблюдение. Педагогическое наблюдение как метод исследования представляет собой целенаправленное восприятие какого-либо педагогического явления, с помощью которого исследователь вооружается конкретным фактическим материалом или данными.

В области физического воспитания и спорта *цель проведения педагогического наблюдения* – изучение разнообразных вопросов учебно-тренировочного процесса, к одним из которых можно отнести следующее:

– задачи обучения и воспитания;
– средства физического воспитания, их место в занятиях;
– методы обучения и воспитания;
– поведение занимающихся и преподавателя (тренера);
– характер и величина тренировочной нагрузки;
– некоторые элементы техники выполнения движений;
– тактические действия;
– величина пространственных, временных и силовых характеристик;
– количественная сторона процесса: количество бросков в баскетболе, количество падений со снарядов у гимнастов и т. д.

Объектами наблюдений могут быть отдельные учащиеся, спортсмены, тренеры, преподаватели, различные классы в школе, отделения ДЮСШ, группы спортсменов различной подготовленности (новички, разрядники, сборный коллектив), разного возраста и пола, а также условия занятий (в зале или на воздухе), сроки занятий (продолжительность, периоды тренировочного процесса), а так же содержание учебно-тренировочного процесса, методы обучения, тренировки, соотношение объема и интенсивности нагрузки в процессе занятий, техника выполнения упражнений и тактические действия и другие процессы и явления.

Содержание каждого наблюдения определяется *задачами исследования*, для решения которых собираются конкретные факты, например: построение тренировочного цикла, объем нагрузки, интенсивность занятий

В качестве задач наблюдения можно выдвинуть изучение общей и специальной физической подготовки спортсменов, технической, тактической, моральной и волевой подготовки и др.

Виды педагогических наблюдений. В методике проведения педагогических исследований могут использоваться различные виды наблюдений.

Непосредственным считается такое наблюдение, когда исследователь сам выступает наблюдателем происходящего педагогического явления. При этом он может быть или в роли свидетеля, т. е. нейтрального лица по отношению к педагогическому процессу, или его участником или руководителем, организатором этого процесса.

Наблюдения, проводимые изнутри, т. е. в случае, когда исследователь из пассивного наблюдателя превращается в непосредственного участника учебно-тренировочного процесса.

Открытыми считаются такие наблюдения, при которых занимающиеся и преподаватели знают, что за ними ведется наблюдение.

При проведении скрытого наблюдения предполагается, что ни занимающиеся, ни преподаватель об этом не знают. По этой причине скрытое наблюдение, с точки зрения получения более достоверных фактов, имеет большее преимущество, так как поведение занимающихся и преподавателя в данном случае остается естественным. Одним из основных условий организации скрытого наблюдения является односторонность, т. е. исследователь видит и слышит испытуемых, а они его нет.

По времени проведения любые наблюдения подразделяются на: непрерывные и дискретные.

Наблюдение считается непрерывным, если оно отражает явление в законченном виде, т. е. если просматриваются его начало, развитие и завершение.

По длительности такие наблюдения могут оказаться самыми различными: продолжаться в течение нескольких секунд, минут или даже месяцев, а может, и лет. Продолжительность наблюдений в этом случае зависит от задач исследований и от того педагогического явления, за которым ведется наблюдение

В зависимости от поставленных задач наблюдением может быть охвачено сразу несколько в разной степени взаимосвязанных явлений, составляющих в сумме одно из определяющих направлений или минимум, когда вычленяется одно из таких явлений в его собственных границах.

В первом случае это монографическое, а во втором – узкоспециальное наблюдение. При монографическом наблюдении предоставляется возможность проследить за развитием ряда явлений, установить их отношения и характер взаимного воздействия на основной исследуемый процесс. Поэтому такие наблюдения ведутся по многим показателям, охватывают большое количество исследуемых, а стало быть, и наблюдателей.

Практика показывает, что многоканальное восприятие одновременно протекающих явлений вносит существенную поправку в их научную оценку. Такие наблюдения могут применяться в изучении как долговременных, так и кратковременных педагогических явлений (например, обычный анализ урока группой студентов, где каждый из них ведет наблюдение за определенным явлением).

К узкоспециальному наблюдению обращаются с целью познания сущности явления, его качественной структурной характеристики. Такое наблюдение создает возможности для более глубокого, хотя и локального изучения педагогического явления, поэтому оно более доступно для индивидуальных исследований.

Организация наблюдений. Методика наблюдения, его построение, отбор соответствующих видов, содержание, техника проведения зависят от многих обстоятельств:

– существа и особенностей изучаемой проблемы;

– конечной цели и задач исследования;

– характера объекта, подлежащего наблюдению;
– условий, в которых находятся предмет изучения и исследователь;
– оснащенности вспомогательными средствами;
– опыта и других личных качеств ведущего наблюдение;
– количества участников исследовательской работы;
– места наблюдения среди других методов в проводимом исследовании.

При этом должны быть учтены все перечисленные обстоятельства, продуманы очевидные и вероятные возможности этого метода, отобраны соответствующие виды для проведения собственных исследований, составляется план наблюдений.

В плане необходимо предусмотреть задачи, выделить объекты и содержание наблюдения, определить методику анализа собранного материала, примерную продолжительность и время проведения наблюдений.

Для регистрации результатов наблюдений могут использоваться самые разнообразные способы и приемы, как с применением технических средств, так и без них. Наиболее простым и доступным можно считать протоколирование, которое обычно ведется на заранее подготовленных бланках.

Наблюдение, проводимое с использованием специальных приборов и технических средств, позволяет также более точно и объективно определять пространственные и временные параметры и усилия при выполнении физических упражнений. Несмотря на ряд положительных сторон, и возможностей метода педагогических наблюдений, можно говорить и об известной его ограниченности, так как во многих случаях ему доступны лишь внешние проявления процесса. Мы можем, например, видеть действия преподавателя или тренера, ответные действия занимающихся, проследить за системой отношений и расстановкой лиц в той или иной ситуации, но в то же время не можем с помощью наблюдения раскрыть мотивы деятельности, эмоциональное состояние участников педагогического процесса, величину испытываемого интеллектуального и физического напряжения, не говоря уже о познании существенных связей, вскрыть которые посредством лишь наблюдения нельзя.

Беседа, интервью и анкетирование. В спортивно-педагогических исследованиях, так же, как и в исследованиях по психологии и социологии, широкой известностью пользуются методы анкетирования, интервью и бесед. Они позволяют судить об опыте человека, мотивах его деятельности и поведения, ценностных ориентациях, отношении к физическим упражнениям, эффективности их использования и о многих других проблемах.

Для *анкетирования* необходимо разработать содержание анкеты, в которую следует включить весь комплекс вопросов, позволяющий получить исчерпывающую информацию по интересующей исследователя проблеме. Во вводной ее части содержится обращение к респондентам, название учреждения, от имени которого ведет работу исследователь, задачи исследования и его назначение, указание об анонимности анкеты и рекомендации к ее заполнению. В основной части даются вопросы или группы вопросов, ответы на которые позволят исследователю получить объективное представление по исследуемой проблеме. В демографической части анкеты содержатся вопросы, касающиеся паспортных характеристик респондента (пол, возраст, специальность, спортивная квалификация, педагогический стаж и т.п.). Демографическую часть лучше всего размещать в конце анкеты.

Интервью – заранее спланированная по информативному направлению беседа, предполагающая прямой контакт исследователя с респондентами – опрашиваемыми. Оно может проводиться по жесткому плану, в определенной последовательности и границах информации.

Беседа – вопросно-ответная форма общения исследователя с респондентом или их группой, которая хотя и проводится по плану, но допускает различные вариации по ее направлениям и времени проведения. Материала опроса протоколируются исследователем.

Контрольные испытания. Успешное решение задач физического воспитания и спортивной тренировки во многом зависит от возможностей осуществления своевременного и правильного контроля за физической подготовленностью занимающихся. Широкое распространение получила методика контрольных испытаний,

Использование контрольных нормативов и тестов в области физического воспитания и спорта может решить следующие задачи:

– выявить общую тренированность с помощью комплексных методов тестирования, которые включают оценку функционального состояния внутренних органов, антропометрические измерения, определение уровня развития психических и двигательных качеств;

– выявить специальную тренированность спортсмена с помощью комплексных методов тестирования, включающих оценку функционального состояния внутренних органов, определение уровня развития двигательных и психических качеств, а также степени овладения техническими и тактическими навыками;

– выявить динамику развития спортивных результатов в процессе тренировки (в том числе и многолетней);

– изучить систему планирования процесса тренировки;

– изучить методы отбора талантливых спортсменов;

– рационализировать существующие системы тренировки;

– воспитывать у спортсменов самостоятельность и сознательность в упражнениях и самоконтроле;

– проверить теоретические положения на практике и подтвердить единство и совпадение положений теории и практики;

– установить контрольные нормативы для различных этапов и периодов учебно-тренировочного процесса;

– разработать контрольные нормативы по отдельным видам спорта и для спортсменов различного возраста, пола и квалификации.

Тест – это измерение или испытание, проводимое для определения способностей или состояния человека. Для теста нужно соблюдать жесткие требования, проводить в одинаковых условиях.

В зависимости от того, какую задачу предполагается решить с помощью тестов, можно различить следующие их разновидности:

– тесты для функционального исследования сердечно-сосудистой системы;

– антропометрические измерения для определения зависимости спортивных достижений от телосложения;

– тесты для исследования двигательной работоспособности;

– тесты для исследования физических качеств;

– тесты для определения технических и тактических навыков;

– тесты для определения психологической и морально-волевой подготовленности.

В методике проведения контрольных упражнений и тестов следует руководствоваться следующими общими положениями:

– условия проведения тестирования должны быть одинаковыми для всех занимающихся, испытуемых (например, время дня, время приема пищи, объем нагрузок и т.п.);

– контрольные упражнения должны быть доступны для всех исследуемых, независимо от их технической и физической подготовленности; в сравнительных исследованиях контрольные упражнения должны характеризоваться индифферентностью (независимостью) по отношению к изучаемым педагогическим факторам;

– контрольное упражнение должно измеряться в объективных величинах (во времени, пространстве, числе повторений и т.п.);

– желательно, чтобы контрольные упражнения отличались простотой измерения и оценки, наглядностью результатов испытаний для исследуемых.

Общей рекомендацией следует считать проведение контрольных испытаний в сроки, которые зависят от целей исследования и задач учебно-тренировочного процесса.

Оценка полученного эмпирического и теоретического материала может быть проведена по качественным (т.е. не имеющим определенных единиц измерения) и количественным показателям в процессе контрольных испытаний (тестов).

В последнем случае используются методы, основанные на идеях квалиметрии – части метрологии, которая изучает и разрабатывает количественные методы оценки качественных показателей.

Степень совпадения результатов тестирования при повторном его проведении на одних и тех же объектах и в одинаковых условиях называется *надежностью теста*.

Возможность полностью воспроизвести результаты теста при его повторении через какое-то время и в одинаковых условиях называется *стабильностью* (или воспроизводимостью) теста.

Степень точности, с которой измеряется объект (или сторона, свойства, качество его) будет характеризовать *информативность* теста.

В процессе контрольных испытаний имеется возможность соотнести предварительные предположения, гипотезы с реальным положением вещей или получить совершенно новую, непредвиденную информацию. В частности, в зависимости от цели и задач эксперимента можно определить достоинства или недостатки методов, содержания обучения, форм организации занятий, проверить критерии прогнозирования. Контрольные испытания и тесты позволяют определить объективные результаты эксперимента.

Экспертное оценивание. Большинство педагогических явлений не имеет количественного выражения (качество выполнения гимнастических упражнений, артистизм в фигурном катании, уровень воспитанности личности и т.д.). В этом случае используется метод экспертных оценок с привлечением специалистов-экспертов. Существует несколько способов проведения экспертных оценок.

Квалиметрия – это наука, изучающая вопросы измерения и количественной оценки качественных показателей.

Качественными называются показатели, не имеющие определенных единиц измерения.

Качество – это обобщенное понятие, которое может относиться к продукции, услугам, процессам, труду и любой другой деятельности, включая и психологию.

Измерение качества – это установление соответствия между характеристиками таких показателей и требованиями к ним. При этом требования («эталон качества») не всегда могут быть выражены в однозначной и унифицированной для всех форме (Унифицировать – приводить к единообразию).

В основе квалиметрии лежат несколько исходных положений:

– любое качество можно измерить;

– качество зависит от ряда свойств, образующих «древо качества»;

– каждое свойство определяется двумя числами: <u>относительным показателем М</u> и <u>весомостью М</u>;

– сумма весомостей свойств на каждом уровне равна единице (или 100%).

Относительный показатель характеризует выявленный уровень измеряемого свойства (в % от его максимального возможного уровня).

Весомость – сравнительную важность разных показателей.

Метод экспертных оценок.

Экспертной называется оценка, получаемая путем выяснения мнений специалистов.

Эксперт – сведущее лицо, приглашаемое для решения вопроса, требующего специальных знаний. Этот метод позволяет с помощью специально выбранной шкалы произвести требуемые измерения субъективными оценками специалистов-экспертов. Такие оценки – случайные величины, они могут быть обработаны некоторыми методами многомерного статистического анализа.

Как правило, экспертное оценивание, или экспертиза проводится в виде опроса, или анкетирования, группы экспертов.

Анкетой называется опросный лист, содержащий вопросы, на которые нужно ответить письменно. Техника экспертизы и анкетирования – это сбор и обобщение мнений отдельных людей.

Девиз экспертизы: «Ум хорошо, а два лучше!».

Характерные примеры экспертизы: конкурс на звание лучшего по профессии или лучшую научную работу.

К мнению специалистов обращаются всякий раз, когда осуществить измерения более точными методами невозможно. Или очень трудно. Порой лучше получить приблизительное решение немедленно, нежели долго искать пути точного решения.

Но субъективная оценка значительно зависит от индивидуальных особенностей эксперта: квалификации, эрудиции, опыта, личных вкусов, состояния здоровья и т.п.

Поэтому индивидуальные мнения рассматриваются как случайные величины и обрабатываются статистическими методами.

Таким образом, современная экспертиза – это система организационных, логических и математико-статистических процедур, направленных на получение от специалистов информации, и ее анализа с целью выработки оптимальных решений.

И лучший психолог, педагог, руководитель тот, который опирается одновременно на собственный опыт, на данные науки, на звания других людей.

Методика групповой экспертизы включает в себя:

1) формулировку задач;
2) отбор и комплектование группы экспертов;
3) составление опроса экспертизы;
4) проведение опроса экспертов;
5) анализ и обработку полученной информации.

Подбор экспертов – важный этап экспертизы, так как достоверные данные можно получить не от всякого специалиста.

Экспертом может быть человек:

1) обладающий высоким уровнем профессиональной подготовки;
2) способный к критическому анализу прошлого и к прогнозированию будущего;
3) психически устойчивый, не склонный к соглашательству.

Есть и другие важные качества экспертов, но указанные выше должны быть обязательно.

Профессиональная компетентность определяется так:

1) по степени близости его оценки к среднегрупповой;
2) по показателям решения тестовых задач.

Для объективной оценки компетентности экспертов могут быть составлены специальные анкеты, отвечая на вопросы которых в течение строго определенного времени кандидата в эксперты должны продемонстрировать свои знания.

Другой подход к отбору экспертов основан на определении эффективности их деятельности.

Абсолютная эффективность деятельности эксперта определяется отношением числа случаев, когда эксперт верно предсказал дальнейший ход событий. К общему числу экспертиз, проведенных данным специалистом.

Например, если эксперт участвовал в 10 экспертизах и 6 раз его точка зрения подтверждалась, то эффективность деятельности такого эксперта равна 0,6.

Относительная эффективность деятельности эксперта – это отношение абсолютной эффективности его деятельности к средней абсолютной эффективности деятельности группы экспертов.

Объективная оценка пригодности эксперта определяется по формуле:

$$\Delta M = (M - M_{ист}),$$

где $M_{ист}$ – истинная оценка, M – оценка эксперта.

Желательно иметь однородную группу экспертов, но если это не удается, то для каждого из них вводится ранг. Эксперт представляет тем большую ценность, чем выше показатели его деятельности.

Для повышения качества экспертизы стараются повысить квалификацию экспертов путем специального обучения, тренировок и ознакомления с возможно более обширной объективной информацией по анализируемой проблеме.

Подготовка и проведение экспертизы.

Подготовка экспертизы сводится в основном к составлению плана ее проведения.

Наиболее важными его разделами являются подбор экспертов, организация их работы, формулировка вопросов, обработка результатов.

Существует несколько способов проведения экспертизы:

Ранжирование – (наиболее простой), которое состоит в определении относительной значимости объектов экспертизы на основе их упорядочения. Обычно наиболее предпочтительному объекту приписывается наивысший (первый) ранг, наиболее предпочтительному – последний ранг.

После оценивания объект, получивший у экспертов наибольшее предпочтение, получает наименьшую сумму рангов. Напоминаю, что в принятой оценочной шкале ранг определяет только место объекта относительно других объектов, подвергающихся экспертизе. Но оценить, насколько далеко эти объекты отстоят друг от друга, ранжирование не позволяет. В связи с этим метод ранжирования применяется сравнительно редко.

Метод непосредственной оценки объектов по шкале, когда эксперт помещает каждый объект в определенный оценочный интервал.

Метод – последовательное сравнение факторов.

Сравнение объектов экспертизы с помощью этого метода проводится так:

1) вначале они ранжируются в порядке значимости;

2) наиболее важному объекту приписывается оценка, равная единице, а остальным (тоже в порядке значимости) – оценки меньше единицы – до нуля;

3) эксперты решают, будет ли оценка первого объекта превосходить по значимости все остальные. Если да, то оценка «веса» этого объекта увеличивается еще больше; если нет, то тогда принимается решение уменьшить его оценку;

4) эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут оценены все объекты.

Метод парного сравнения основан на попарном сравнении всех факторов. При этом каждой сравниваемой паре объектов устанавливается наиболее весомый (он оценивается баллом 1). Второй объект этой пары оценивается в 0 баллов.

Метод анкетирования. Анкета здесь представлена как последовательный набор вопросов, по ответам на которые судят об относительной важности рассматриваемого свойства или вероятности свершения каких-либо событий.

По своему характеру они подразделяются на следующие типы:

1) вопрос, при ответе на который необходимо выбрать одно из заранее сформулированных мнений;

2) вопрос о том, какое решение принял бы эксперт в определенной ситуации;

3) вопрос, требующий оценить численные значения какой-либо величины.

Опрос может проводиться как очно, так и заочно в один или несколько туров.

Виды психологических измерений.

В психологии используется множество конкретных методик. Удобную классификацию психологических измерений предложил С.С. Паповян.

Методы психологических измерений могут быть классифицированы по различным основаниям:

1) процедуре сбора «сырых» данных;
2) предмету измерения;
3) виду используемой шкалы;
4) типу шкалируемого материала;
5) моделям шкалирования;
6) числу «мерностей» (одномерные и многомерные);
7) мощности метода сбора данных (мощные или слабые);
8) типу ответа индивида;
9) какими они являются: детерминистскими или вероятностными.

Чаще всего применяются следующие процедуры субъективного шкалирования:

Метод ранжирования. Все объекты представляются испытуемому одновременно, он должен их упорядочить по величине измеряемого признака.

Метод парных сравнений. Объекты представляются испытуемому попарно. Испытуемый оценивает сходства – различия между членами пар.

Метод абсолютной оценки. Стимулы представляются по одному. Испытуемый дает оценку стимула в единицах предложенной шкалы.

Метод выбора. Индивиду предлагается несколько объектов, из которых он должен выбрать, те, которые соответствуют заданному критерию.

По предмету измерения все методики делятся на:

1) методики шкалирования объектов;
2) методики шкалирования индивидов;
3) методики совместного шкалирования объектов и индивидов.

Методики шкалирования объектов выстраиваются в контекст экспериментальной или измерительной процедуры. По своей сути они не являются задачей исследователя, а представляют собой экспериментально задачу испытуемого. Исследователь использует эту задачу для выявления испытуемого, чтобы определить особенности его психики.

Хронометрирование. Хронометрирование можно рассматривать как составную часть педагогического наблюдения. Однако в отдельных случаях оно может использоваться и как самостоятельный метод. Основное содержание хронометрирования – определение времени, затрачиваемого на выполнение каких-либо действий

Графическое изображение распределения времени называется хронографированием. В практике работы наибольшее распространение получило хронометрирование различных видов занятий физической культурой и спортом для определения общей и моторной (двигательной) плотности.

Общая плотность – это отношение педагогически оправданного или целесообразно использованного тренером времени к общей продолжительности занятия или его частей, выраженное в процентах.

Двигательная (или моторная) плотность – это отношение времени непосредственного выполнения физических упражнений, включая строевые, к продолжительности всего занятия или его отдельных частей, выраженное в процентах.

Метод пульсометрии предназначен для определения умения педагогом регулировать физическую нагрузку на занятиях в целом, в отдельных его частях или физических упражнениях, изменяя ее объем или интенсивность. Данный метод позволяет выявить характер соответствия физической нагрузки на уроке возрасту и индивидуальным особенностям отдельных учащихся, а также содержанию и условиям проведения урока.

Педагогический эксперимент. Педагогический эксперимент – это специально организуемое исследование, проводимое с целью выяснения эффективности применения тех или иных методов, средств, форм, видов, приемов и нового содержания обучения и тренировки.

Эксперимент всегда предполагает создание нового опыта, в котором активную роль должно играть проверяемое нововведение. Для большей объективности выражения результатов педагогического эксперимента в последние годы при обработке его показателей стали широко использоваться некоторые математические методы, и прежде всего методы математической статистики и теории вероятностей. Методы ни в коем случае не должны противоречить общим принципам. Каковы бы ни были результаты эксперимента, знания занимающихся, приобретаемые навыки и умения, уровень здоровья не должны в итоге исследований снижаться или ухудшаться.

Одним из основных мотивов педагогического эксперимента является введение каких-то усовершенствований в учебно-тренировочный процесс, повышающих его качество. Он отличается от педагогического наблюдения активным вмешательством исследователя в процесс или явление. В экспериментах, в которых исследуются учебный или учебно-тренировочный процессы, как правило, создаются экспериментальные и контрольные группы. Экспериментальные группы обеспечиваются специальными, созданными исследователем условия, контрольные – занимаются в обычных, общепринятых, традиционных условиях. Разница в результатах, полученных в конце эксперимента, свидетельствует о степени решения проблемы.

Необходимость проведения педагогического эксперимента может возникнуть в следующих случаях, когда:

– исследователем выдвигаются новые идеи или предположения, требующие проверки;

– необходимо научно проверить интересный опыт, педагогические находки практиков, подмеченные и выделенные исследователями, дать им обоснованную оценку;

– нужно проверить разные точки зрения или суждения по поводу одного и того же педагогического явления, уже подвергшегося проверке;

– необходимо найти рациональный и эффективный путь внедрения в практику обязательного и признанного положения.

Эксперимент может быть естественным, когда в ходе его допускаются незначительные отступления от традиционных, общепринятых условий и способов деятельности (например, тренировочный); модельным, в котором эти условия и способы резко меняются, исходя из интересов исследователя, и лабораторным, проводимым в специально созданных условиях.

Виды педагогических экспериментов.

Независимый эксперимент проводится на основе изучения линейной цепи ряда экспериментальных групп, без сравнения их с контрольными, путем накопления и сопоставления данных в области проверки поставленной гипотезы.

В случае, когда в одной группе работа (обучение, тренировка) проводится с применением новой методики, а в другой – по общепринятой или иной, чем в экспериментальной группе, и ставится задача выявления наибольшей эффективности различных методик, можно говорить о сравнительном эксперименте. Такой эксперимент всегда проводится на основе сравнения двух сходных параллельных групп, классов, потоков – экспериментальных и контрольных.

Прямой эксперимент, характерен тем, что занятия в экспериментальных и контрольных группах проводятся параллельно и после проведения серии занятий определяется результативность изучаемых факторов. В методике проведения такого эксперимента с целью получения объективных и достоверных результатов немаловажное значение приобретают оценка и правильный отбор уравниваемых и варьируемых условий.

Сравниваемые группы требуют выполнения некоторых условий идентичности:

– они должны иметь полное равенство начальных данных (состав испытуемых в экспериментальных и контрольных группах примерно одинаковый по количеству, подготовке, разряду, возрасту, полу и т. п.);

– иметь равенство условий работы (одна и та же смена, использование одинакового, стандартного инвентаря, типовых залов, стадионов, бассейнов и т. д.);

– быть независимыми от личности преподавателя, тренера. При этом допускается, что в экспериментальных и контрольных группах занятия может вести один и тот же преподаватель или разные.

В зависимости от условий проведения педагогические эксперименты можно подразделить на:

– естественные;

– лабораторные.

При этом проведение эксперимента без нарушения хода учебно-тренировочного процесса в обычных для занимающихся условиях, с обычным контингентом занимающихся и т. п. можно назвать естественным, т. е. все происходит в естественных, в обыденных условиях.

В лабораторном эксперименте допускается искусственная изоляция одного или нескольких спортсменов, учеников от основной массы, постановка их в особые, специально создаваемые условия, значительно отличающиеся от обычных.

Методика проведения педагогического эксперимента. Организация педагогического эксперимента связана с планированием его проведения, которое определяет последовательность всех этапов работы, а также с подготовкой всех условий, обеспечивающих полноценное исследование. Сюда входит подготовка соответствующей обстановки, приборов, средств, инструктаж помощников, планирование наблюдения, выбор экспериментальных и контрольных групп, оценка всех особенностей экспериментальной базы и т. д.

Планирование эксперимента – это сложный и многоэтапный процесс, включающий в себя ряд обязательных действий исследователя, в число которых входят следующие:

– определение целей и задач эксперимента, обоснование его необходимости;

– формулировка научной гипотезы;

– выбор типа эксперимента;

– выбор и оценка общих условий проведения эксперимента;

– оценка и отбор уравниваемых данных, их показателей в методике сбора этих данных;

– составление общей программы эксперимента, программ ведения занятий в экспериментальных и контрольных группах, а также программы ведения наблюдений.

Одной из труднейших задач при проведении эксперимента является подведение его итогов.

В целом при подведении итогов педагогического эксперимента необходимо учитывать следующее:

– соотнесение вывода и результатов с общей и частной гипотезой;

– четкое ограничение области, на которую могут быть распространены полученные выводы;

– высказывание предположений о возможности их распространения на некоторые пограничные области и указание основных направлений дальнейших исследований в этой и смежных областях;

– оценку степени надежности выводов в зависимости от чистоты условий эксперимента;

– оценку роли и места эксперимента в системе других применявшихся в данном исследовании методов;

– практические предложения о внедрении в практику результатов проведенного исследования.

Обработка результатов очень ответственный этап исследования. Оценка может производиться как в качественном (на основе теоретических, логических выводов и обобщений), так и количественном аспектах. Количественная обработка материалов может осуществляться методами математической статистики, – науки, изучающей количественные показатели тех или иных явлений.

1.2. Статистические методы обработки данных спортивно-педагогических исследований

Понятие о статистическом наблюдении, этапы его проведения. Прежде чем начать использование статистических методов спортивно-педагогических исследований, нужно иметь в своем распоряжении исчерпывающую информационную базу, в полной мере и достоверно описывающую объект исследования. Процесс статистического исследования предполагает проведение таких этапов, как:

– сбор информации по статистике (статистическое наблюдение) и ее первичная обработка;

– группировка и последующая обработка данных, которые получены вследствие статистического наблюдения, на базе их сводки и группировки;

– обобщение и анализ результатов обработки статистических материалов, формулировка выводов и рекомендаций по результатам всего статистического исследования.

Следовательно, статистическое наблюдение – это первый и исходный этап статистического исследования.

Планомерность статистического наблюдения состоит в том, что оно проводится по специально разработанному плану, который содержит в себе вопросы, связанные с организацией и техникой сбора статистической информации, контроля ее достоверности и качества, представления итоговых материалов.

Массовый характер статистического наблюдения обеспечивается наиболее полным диапазоном всех случаев проявления исследуемого явления или процесса, т. е. количественные и качественные характеристики подвергаются измерению и регистрации не отдельных единиц изучаемой совокупности, а всей массы единиц совокупности в процессе статистического наблюдения.

Систематичность статистического наблюдения не должна носить стихийного характера. Работы, связанные с проведением такого наблюдения, должны выполняться либо непрерывно, либо регулярно, через одинаковые интервалы времени.

Процесс подготовки статистического наблюдения предполагает установление цели и объекта наблюдения, выбор единицы наблюдения, состава признаков, подлежащих регистрации. Для сбора данных необходимо разработать бланки документов и выбрать средства и методы их получения.

Следовательно, статистическое наблюдение является трудоемкой и кропотливой работой, которая требует привлечения квалифицированных кадров, всесторонне взвешенной ее организации, планирования, подготовки и проведения.

Виды и способы статистического наблюдения. Статистическое наблюдение представляет собой процесс, который с точки зрения его организации может иметь разнообразные способы, формы и виды проведения. Задачей общей теории статистики является определение сущности способов, форм и видов наблюдения для решения вопроса, где, когда и какие приемы наблюдения будут применяться.

Статистические наблюдения имеют две основные группы:

– охват единиц совокупности;

– время регистрации фактов.

По уровню охвата исследуемой совокупности статистическое наблюдение делится на два типа: сплошное и несплошное.

Под *сплошным* (полным) наблюдением понимается охват всех единиц изучаемой совокупности. Сплошное наблюдение обеспечивает полноту информации об изучаемых явлениях и процессах. Для сбора и обработки всего объема необходимой информации требуется значительное время, поэтому потребность в оперативной информации не удовлетворяется. Нередко сплошное наблюдение вообще невозможно (например, когда исследуемая совокупность чересчур велика или отсутствует возможность получения информации обо всех единицах совокупности). В результате этого проводят несплошные наблюдения.

Под *несплошным* наблюдением понимается только охват определенной части изучаемой совокупности. Проводя несплошное наблюдение, необходимо заблаговременно определить, какая именно часть исследуемой совокупности будет подвергнута наблюдению, и какой критерий будет положен в основу выборки. Существует несколько видов несплошного наблюдения: выборочное; наблюдение основного массива; монографическое.

Точность наблюдения и методы проверки достоверности данных.

Каждое конкретное измерение величины данных, осуществляемое в процессе наблюдения, дает, как правило, приближенное значение величины явления, в той или иной мере отличающееся от исходного значения этой величины.

Точностью статистического наблюдения называется степень соответствия какого-либо показателя или признака, исчисленного по материалам наблюдения, действительной его величине. Расхождение между результатом наблюдения и истинным значением величины наблюдаемого явления называется **ошибкой наблюдения.**

В зависимости от характера, стадии и причин возникновения различают несколько типов ошибок наблюдения.

По своему характеру ошибки делятся на случайные и систематические. **Случайные ошибки** – это ошибки, возникновение которых обусловлено действием случайных факторов. К ним относятся оговорки и описки опрашиваемого лица. Они могут быть направлены в сторону уменьшения или увеличения значения признака. На конечном результате они, как правило, не отражаются, так как взаимопогашаются при сводной обработке результатов наблюдения.

Систематические ошибки имеют одинаковую тенденцию либо к уменьшению, либо к увеличению значения показателя признака. Это связано с тем, что измерения, например, производятся неисправным измерительным прибором или ошибки являются следствием неясной формулировки вопроса программы наблюдения и др. Систематические ошибки представляют большую опасность, так как в значительной мере искажают результаты наблюдения.

В зависимости от стадии возникновения различают: ошибки регистрации; ошибки, возникающие в ходе подготовки данных к машинной обработке; ошибки, проявляющиеся в процессе обработки на вычислительной технике.

К **ошибкам регистрации** относятся те неточности, которые возникают при записи данных в статистический формуляр (первичный документ, бланк, отчет, переписной лист) или при вводе данных в вычислительную технику, искажение данных при передаче через линии связи (телефон, электронную почту). Часто ошибки регистрации возникают из-за несоблюдения формы бланка, т. е. запись производится не в установленную строку или графу документа. Случается и преднамеренное искажение значений отдельных показателей.

Ошибки при подготовке данных к машинной обработке или в процессе самой обработки возникают в вычислительных центрах или центрах подготовки данных. Возникновение таких ошибок связано с небрежным, неправильным, нечетким заполнением данных в формулярах, с физическим дефектом носителя данных, с потерей части данных вследствие несоблюдения технологии хранения информационных баз. Иногда ошибки вызваны сбоями в работе оборудования.

Зная виды и причины возникновения ошибок наблюдения, можно в значительной мере снизить процент подобных искажений информации. Различают несколько видов ошибок:

– ошибки измерения, связанные с определенными погрешностями, которые возникают при однократном статистическом наблюдении явления и процессов общественной жизни;

– ошибки репрезентативности, возникающие в ходе несплошного наблюдения и связанные с тем, что сама выборка нерепрезентативна и результаты, полученные на ее основе, не могут распространяться на всю совокупность;

– преднамеренные ошибки, возникающие по причине сознательного искажения данных с разными целями, среди которых желание приукрасить действительное состояние объекта наблюдения или, наоборот, показать неудовлетворительное состояние объекта и т. д. Следует заметить, что такое искажение информации является нарушением закона;

– непреднамеренные ошибки, как правило, носящие случайный характер и связанные с низкой квалификацией работников, их невнимательностью или небрежностью. Часто такие ошибки связаны с субъективными факторами, когда люди дают неправильную информацию о своем возрасте, семейном положении, образовании, принадлежности к социальной группе и ином или просто забывают некоторые факты, сообщая регистратору информацию, которая только что возникла в памяти.

Статистические таблицы. После того как данные статистического наблюдения собраны и даже сгруппированы, их трудно воспринимать и анализировать без определенной, наглядной систематизации. Результаты статистических сводок и группировок получают оформление в виде статистических таблиц.

Статистическая таблица – таблица, которая дает количественную характеристику статистической совокупности и представляет собой форму наглядного изложения полученных в результате статистической сводки и группировки числовых (цифровых) данных. По внешнему виду она представляет собой комбинацию вертикальных и горизонтальных строк. В ней обязательно должны быть общие боковые и верхние заголовки. Еще одной особенностью статистической таблицы является наличие в ней *подлежащего* (характеристика статистической совокупности) и *сказуемого* (показателя, характеризующего совокупности). Статистические таблицы являются формой наиболее рационального изложения результатов сводки или группировки.

Подлежащее таблицы представляет ту статистическую совокупность, о которой идет речь в таблице, т. е. перечень отдельных или всех единиц совокупности либо их групп. Чаще всего подлежащее помещается в левой части таблицы и содержит перечень строк.

Сказуемое таблицы – это те показатели, с помощью которых дается характеристика явления, отображаемого в таблице.

Подлежащее и сказуемое таблицы могут располагаться по-разному. Это технический вопрос, главное, чтобы таблица была легко читаемой, компактной и легко воспринималась.

В статистической практике и исследовательских работах используются таблицы различной сложности. Это зависит от характера изучаемой совокупности, объема имеющейся информации, задач анализа. Если в подлежащем таблицы содержится простой перечень каких-либо объектов или территориальных единиц, таблица называется простой. В подлежащем простой таблицы нет каких-либо группировок статистических данных.

Простая таблица содержит только описательные сведения, ее аналитические возможности ограничены. Глубокий анализ исследуемой совокупности, взаимосвязей признаков предполагает построение более сложных таблиц – групповых и комбинационных.

Групповые таблицы в отличие от простых содержат в подлежащем не простой перечень единиц объекта наблюдения, а их группировку по одному существенному признаку. Простейшим видом групповой таблицы являются таблицы, в которых представлены ряды распределения. Групповая таблица может быть более сложной, если в сказуемом приводится не только число единиц в каждой группе, но и ряд других важных показателей, количественно и качественно характеризующих группы подлежащего. Такие таблицы часто используются в целях сопоставления обобщающих показателей по группам, что позволяет сделать определенные практические выводы. Более широкими аналитическими возможностями располагают комбинационные таблицы.

Комбинационными называются статистические таблицы, в подлежащем которых группы единиц, образованные по одному признаку, подразделяются на подгруппы по одному или нескольким признакам. В отличие от простых и групповых таблиц комбинационные позволяют проследить зависимость показателей сказуемого от нескольких признаков, которые легли в основу комбинационной группировки в подлежащем.

Наряду с перечисленными выше таблицами в статистической практике применяют таблицы сопряженности (или таблицы частот). В основе построения таких таблиц лежит группировка единиц совокупности по двум или более признакам, которые называются уровнями.

Перечислим основные правила построения статистических таблиц:

– статистическая таблица должна быть компактной и отражать только те исходные данные, которые прямо отражают исследуемое социально-экономическое явление в статике и динамике;

– заголовок статистической таблицы и название граф и строк должны быть четкими, краткими, лаконичными. В заголовке должны быть отражены объект, признак, время и место совершения события;

– графы и строки следует нумеровать;

– графы и строки должны содержать единицы измерения, для которых существуют общепринятые сокращения;

– лучше всего располагать сопоставляемую в ходе анализа информацию в соседних графах (либо одну под другой). Это облегчает процесс ее сравнения;

– для удобства чтения и работы числа в статистической таблице следует проставлять в середине граф, строго одно под другим: единицы под единицами, запятая под запятой;

– числа целесообразно округлять с одинаковой степенью точности (до целого знака, до десятой доли);

– отсутствие данных обозначается знаком умножения «*», если данная позиция не подлежит заполнению, отсутствие сведений обозначается многоточием (...), либо н. д., либо н. св., при отсутствии явления ставится знак тире (-);

– для отображения очень малых чисел используют обозначение 0.0 или 0.00;

– если число получено на основании условных расчетов, то его берут в скобки, сомнительные числа сопровождают вопросительным знаком, а предварительные – знаком «!».

В случае необходимости дополнительной информации статистические таблицы сопровождаются сносками и примечаниями, в которых разъясняются, например, сущность специфического показателя, примененной методологии и т. д. Сносками пользуются для того, чтобы указать на ограничивающие обстоятельства, которые надо принять во внимание при чтении таблицы.

При соблюдении этих правил, статистическая таблица становятся основным средством представления, обработки и обобщения статистической информации о состоянии и развитии изучаемых социально-экономических явлений.

Статистические группировки – первый этап статистической сводки, позволяющий выделить из массы исходного статистического материала однородные группы единиц, обладающих общим сходством в качественном и количественном отношениях. Важно понимать, что группировка – это не субъективный технический прием расчленения совокупности на части, а научно обоснованный процесс расчленения множества единиц совокупности по определенному признаку.

Самая простая группировка – ряд распределения. *Рядами распределения* называются ряды чисел (цифр), характеризующие состав или структуру какого-либо явления после группировки статистических данных об этом явлении. Ряд распределения – это группировка, в которой для характеристики групп применяется один показатель – численность группы, т. е. это ряд чисел, показывающий, как распределяются единицы совокупности по изучаемому признаку.

Ряды, построенные по атрибутивному признаку, называют *атрибутивными рядами.* Приведенный ряд распределения содержит три элемента: разновидности атрибутивного признака (мужчины, женщины); численности единиц в каждой группе, называемые частотами ряда распределения; численности групп, выраженные в долях (процентах) от общей численности единиц, называемые *частостями.* Сумма частостей равна 1, если они выражены в долях единицы, и 100%, если они выражены в процентах.

Ряды распределения, построенные по количественному признаку, называются *вариационными рядами*. Числовые значения количественного признака в вариационном ряду распределения называются *вариантами* и располагаются в определенной последовательности. Варианты могут выражаться числами положительными и отрицательными, абсолютными и относительными. Вариационные ряды делятся на:

– дискретные;

– интервальные.

Дискретные вариационные ряды характеризуют распределение единиц совокупности по дискретному (прерывному) признаку, т. е. принимающему целые значения. При построении ряда распределения с дискретной вариацией признака все варианты выписываются в порядке возрастания их величины, подсчитывается, сколько раз повторяется одна и та же величина варианта, т. е. частота, и записывается в одной строке с соответствующим значением варианта. Частоты в дискретном вариационном ряду, как и в атрибутивном, могут быть заменены *частостями*.

В случае *непрерывной* вариации величина признака может принимать любые значения в определенном интервале, например распределение работников фирмы по уровню дохода.

При построении *интервального* вариационного ряда необходимо выбрать оптимальное число групп (интервалов признака) и установить длину интервала. Оптимальное число групп выбирается так, чтобы отразить многообразие значений признака в совокупности. Чаще всего число групп устанавливается по формуле:

$$k = 1 + 3{,}32\lg N = 1{,}441\lg N + 1 \qquad (1.2.1)$$

где k – число групп;

N – численность совокупности.

Если полученная группировка не удовлетворяет требованиям анализа, то можно произвести перегруппировку. Не следует стремиться к очень большому количеству групп, так как в такой группировке нередко исчезают различия между группами. Также надо избегать образования и слишком малочисленных групп, включающих несколько единиц совокупности, потому что в таких группах перестает действовать закон больших чисел и возможно проявление случайности. Когда не удается сразу наметить возможные группы, собранный материал сначала разбивают на значительное количество групп, а затем укрупняют их, уменьшая количество групп и создавая качественно однородные группы.

Таким образом, во всех случаях группировки должны быть построены так, чтобы образованные в них группы как можно полнее отвечали действительности, были бы видны различия между группами и не объединялись бы в одну группу существенно различающиеся между собой явления.

Распределением признака называется закономерность встречаемости разных его значений.

В спортивно-педагогических исследованиях чаще всего ссылаются на нормальное распределение. Нормальное распределение характеризуется тем, что крайние значения признака в нем встречаются достаточно редко, а значения, близкие к средней величине – достаточно часто.

Нормальным такое распределение называется потому, что оно очень часто встречалось в естественнонаучных исследованиях и казалось «нормой» всякого массового случайного проявления признаков. Это распределение следует закону, открытому тремя учеными в разное время: Муавром в 1733 г. в Англии, Гуассом в 1809 г. в Германии и Лапласом в 1812 г. во Франции.

Рис. 1.2.1. График нормального распределения статистических данных

График нормального распределения представляет собой так называемую колоколообразную кривую.

Параметры распределения – это его числовые характеристики, указывающие, где «в среднем» располагаются значения признака, насколько эти значения изменчивы и наблюдается ли преимущественное появление определенных значений признака.

Наиболее практически важными параметрами являются математическое ожидание, дисперсия, показатели асимметрии и эксцесса.

В реальных спортивно-педагогических исследованиях мы оперируем не параметрами, а их приближенными значениями, так называемыми *оценками параметров.* В дальнейшем, говоря о параметрах, мы будем иметь в виду их оценки.

Среднее арифметическое (оценка математического ожидания) вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = M = \frac{\sum x_i}{n}, \tag{1.2.2}$$

где x_i – каждое наблюдаемое значение признака;

i – индекс, указывающий на порядковый номер данного значения признака;

n – количество наблюдений;

Σ - знак суммирования.

Дисперсия

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \tag{1.2.3}$$

где x_i – каждое наблюдаемое значение признака;

x – среднее арифметическое значение признака;

n – количество наблюдений.

Величина, представляющая собой квадратный корень из несмещенной оценки дисперсии (S), называется *стандартным отклонением* или *средним квадратическим отклонением*. Обычно обозначают греческой буквой σ (сигма)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.2.4}$$

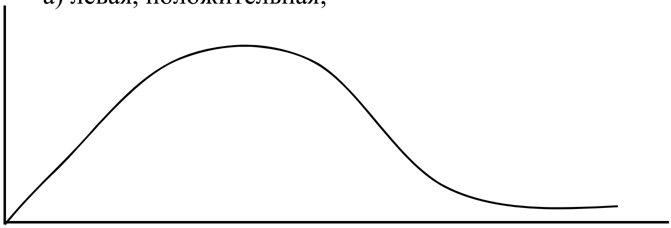
В тех случаях, когда какие-нибудь причины благоприятствуют более частому появлению значений, которые выше или, наоборот, ниже среднего, образуется асимметрические распределения.

При левосторонней или положительной асимметрии в распределении чаще всего встречаются более низкие значения признака, а при правосторонней или отрицательной более высокие.

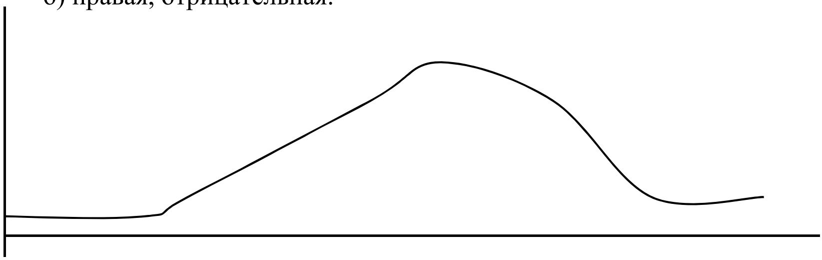
Показатель асимметрии (A) вычисляется по формуле:

$$A = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot \sigma^3} \tag{1.2.5}$$

а) левая, положительная;



б) правая, отрицательная.



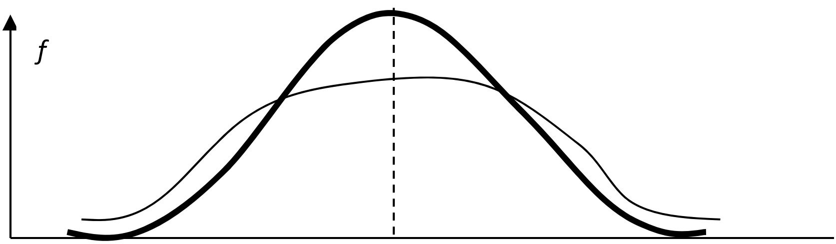
В тех случаях, когда какие-либо причины способствуют преимущественному появлению средних или близких к средним значений, образуется распределение с положительным эксцессом.

Если же в распределении преобладают крайние значения, причем одновременно с более низкие, и более высокие, то такое распределение характеризуется отрицательным эксцессом и в центре распределения может образоваться впадина, превращающая его в двухвершинное.

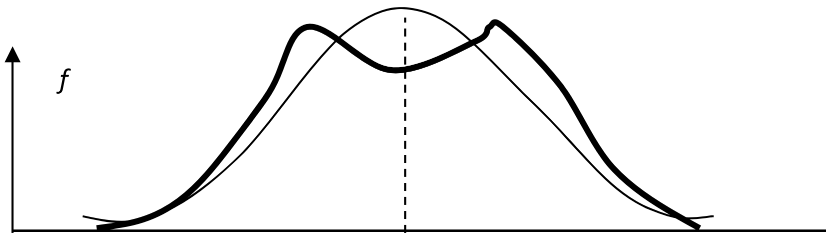
Показатель эксцесса (Е) определяется по формуле:

$$\mathrm{E} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4}{n - \sigma^4} - 3 \qquad (1.2.6)$$

а) положительный эксцесс;



б) отрицательный эксцесс.



На практике исследователь может рассчитывать параметры любого распределения, если единицы, которые он использовал при измерении, признаются разумными в научном сообществе.

Статистические гипотезы. Формирование гипотез систематизирует предположения исследователя и представляет их в четком и лаконичном виде. Благодаря гипотезам исследователь не теряет путеводной нити в процессе расчетов и ему легко понять после их окончания, что, собственно, он обнаружил.

Статистические гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные, направленные и ненаправленные.

Нулевая гипотеза – это гипотеза об отсутствии различий. Она обозначается H_0 называется нулевой потому, что содержит число 0: $x_1 – x_2=0$, где x_1, x_2 – сопоставляемые значения признаков.

H_0 – это то, что мы хотим опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий.

Альтернативная гипотеза – это гипотеза о значимости различий. Она обозначается H_1. H_1 – это то, что мы хотим доказать, поэтому иногда ее называют экспериментальной.

Бывают задачи, когда мы хотим доказать, как раз не значимость различий, т.е. подтвердить нулевую гипотезу. Однако чаще нам все-таки требуется доказать значимость различий, т.к. они более информативны для нас в поиске нового.

Нулевая и альтернативная гипотеза могут быть направленными и ненаправленными.

Если мы хотим доказать, что в группе А под влиянием каких-то экспериментальных воздействий произошли более выраженные изменения, чем в группе Б, то нам тоже необходимо сформулировать <u>направленные</u> гипотезы.

Если же мы хотим доказать, что различаются формы распределения признака в группе А и Б, то формируются ненаправленные гипотезы.

Статистические гипотезы

↙ ↘

направленные ↙ ↘ нулевая, альтернативная

ненаправленные ↙ ↘ нулевая, альтернативная

Проверка гипотез осуществляется с помощью критериев статистической оценки различий.

Статистические критерии. Статистический критерий – это решающее правило, обеспечивающее надежное поведение, т.е. принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью. Статистические критерии обозначают также метод расчета определенного числа и само это число.

Когда мы говорим, что достоверность различий определялась по критерию t_β, то имеет в виду что использовали метод Стьюдента для расчета определенного числа. Когда мы говорим, далее, что t_β=2,6, то имеем в виду определенное число, рассчитанное по методу Стьюдента. Это число обозначается как эмпирическое значение критерия.

По соотношению эмпирического и критического значений критерия можно судить о том, подтверждается ли или опровергается нулевая гипотеза. Например, если $t_{\beta эмп} > t_{\beta кр}$, H_0 отвергается.

Критерии делятся на параметрические и непараметрические.

Параметрические критерии – включающие в форму расчета параметры распределения, т.е. x, s (t – критерий Стьюдента, критерий F – Фишира и др.).

Непараметрические критерии – не включающие в форму расчета параметров распределения и основанные на оперировании частотами или рангами критерий T – Вилкоксона, критерий W – Манна-Уитни и др.).

И те, и другие критерии имеют свои преимущества и недостатки.

Из всего мы видим, что параметрические критерии могут оказаться несколько более мощными, чем не параметрические, но только в том случае, если признак измерен по интервальной шкале и нормально распределен.

По сравнению с параметрическими критериями они ограничены лишь в одном – с их помощью невозможно оценить взаимодействие двух или более условий или факторов, влияющих на изменение признака. Эту задачу может решить только дисперсионный двухфакторный анализ

Таблица 1.2.1

Статистические критерии

Параметрические критерии	Непараметрические критерии
1. Позволяют прямо оценить различия в средних, полученных в двух выборках (t-критерий Стьюдента)	1. Позволяют оценить лишь средние тенденции, например. Ответить на вопрос, чаще ли в выборке А встречаются более высокие, а в выборке Б – более низкие значения признака (критерии Q, U, W, φ^* и др.)
2. Позволяют прямо оценить различия в дисперсиях (критерий Фишера)	2. Позволяют оценить лишь различия в диапазонах вариативности признака (критерий φ^*)
3. Позволяют выявить тенденции измерения признака при переходе от условия к условию (дисперсионный и однофакторный анализ), но лишь при условии нормального распределения признака	3. Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию при любом распределении признака (критерии тенденции L и S)

Окончание таблицы 1.2.1

Параметрические критерии	Непараметрические критерии
4. Позволяют оценить взаимодействие двух или более факторов и их влиянии на изменения признака (двух факторный дисперсионный анализ)	4. Эта возможность отсутствует
5. Экспериментальные данные должны отвечать двум, а иногда трем условиям: 1) значения признака измерены по интервальной шкале; 2) распределение признака является нормальным; 3) в дисперсионном анализе должно соблюдаться требование равенства дисперсий в ячейках комплекса	5. Экспериментальные данные могут не отвечать ни одному из этих условий: 1) значения признака могут быть представлены в любой шкале, начиная от шкалы наименований; 2) распределение признака может быть любым и совпадение с каким-либо теоретическим законом распределения – необязательно и не нуждается в проверке; 3) требование равенства дисперсий отсутствует
6. Математические расчеты довольно сложны	6. Математические расчеты по большей части просты и занимают мало времени (за исключением критериев χ^2 λ)
7. Если условия, перечисленные в п.5, выполняются, параметрические критерии оказываются несколько более мощными, чем непараметрические	7. Если условия, перечисленные в п. 5, не выполняются, непараметрические критерии оказываются более мощными, чем параметрические, т.к. они менее чувствительны к «засорением»

Уровень статистической достоверности. Мощность критериев. Уровень значимости – это вероятность того, что мы сочли различия существенными, а они на самом деле случайны.

Если:

β=95%, то α=5%	0,95	0,05
β=99%, то α=1%	0,99	0,01
β=99,9%, то α=0,1%	0,999	0,001

Уровень значимости – это вероятность отклонения нулевой гипотезы, в то время как она верна.

Ошибка, состоящая в том, что мы отклонили нулевую гипотезу, в то время как она верна, называется *ошибкой 1 рода*.

Вероятность такой ошибки обычно обозначается α (обозначается не $\rho \leq 0{,}05$ или $\rho \leq 0{,}01$, а $\alpha \leq 0{,}05$, $\alpha \leq 0{,}01$).

Если вероятность ошибки – это α, то вероятность правильного решения: 1-α. Чем меньше α,тем больше вероятность правильного решения.

Принято считать низшим уровнем статистической значимости 5%-ный уровень ($\rho \leq 0{,}05$); достаточным – 1%-ный уровень ($\rho \leq 0{,}01$) и высшим 0,1%-ный уровень ($\rho \leq 0{,}001$).

Мощность критерия – это его способность выявлять различия, если они есть. Т.е. это его способность отклонить нулевую гипотезу об отсутствии различий, если она неверна.

Ошибка, состоящая в том, что мы приняли нулевую гипотезу, в то время как она неверна, называется *ошибкой 2 рода*.

Вероятность такой ошибки обозначается как β.

Мощность критерия – это его способность не допускать ошибку 2 рода. Поэтому Мощность = $1 - \beta$.

Мощность критерия определяется эмпирическим путем. Одни и те же задачи могут быть решены с помощью разных критериев, при этом обнаруживается, что некоторые критерии позволяют выявить различия там, где другие оказываются неспособными это сделать, или выявляют более высокий уровень значимости различий.

Возникает вопрос: а зачем же тогда использовать менее мощные критерии? Да, дело в то, что основанием для выбора критерия может быть не только мощность, но и другие характеристики:

– простота;
– более широкий диапазон использования;
– применимость по отношению к неравным по объему выборкам;
– большая информативность результатов.

ГЛАВА 2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ СПОРТИВНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2.1. Числовые характеристики выборки

Характеристики положения.

Вариационные ряды и графики эмпирических распределений дают наглядное представление о том, как варьирует признак в выборочной совокупности. Но они недостаточны для полной характеристики выборки, поскольку содержат много деталей, охватить которые невозможно без применения обобщающих числовых характеристик.

Числовые характеристики выборки дают количественное представление об эмпирических данных и позволяют сравнивать их между собой. Наибольшее практическое значение имеют характеристики положения, рассеяния и асимметрии эмпирических распределений.

При определении характеристик положения, определяющих положение центра эмпирического распределения, чаще всего производится расчет ***среднего арифметического, медианы и моды.***

Среднее арифметическое.

Средним арифметическим, или просто средним, – одна из основных характеристик выборки. Она представляет собой такое значение признака, сумма отклонений от которого выборочных значений признака равна нулю (с учетом знака отклонения).

Среднее принято обозначать той же буквой, что и варианты выборки, с той лишь разницей, что над буквой ставится символ усреднения – черта. Например, если обозначить исследуемый признак через X, а его числовые значения – через x_i, то среднее арифметическое имеет обозначение $\bar{x}$.

Для несгруппированных данных среднее арифметическое рассчитывается как частное от деления суммы всех значений вариант рассматриваемой совокупности на их число (n):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{или} \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (2.1.1)$$

где x_i – варианты выборки; n – объем выборки; $\sum x_i$ – сумма n чисел x_i, где индекс i (порядковый номер) суммируемых чисел от 1 до n (1, 2, …, n).

Если данные сгруппированы, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i, \qquad (2.1.2)$$

где n – объем выборки; k – число интервалов группировки; n_i – частоты интервалов; x_i – срединные значения интервалов.

Среднее арифметическое, вычисленное по формуле (2.1.2), называют также ***взвешенным средним***, подчеркивая этим, что в формуле (2.1.2) x_i суммируются с коэффициентами (весами), равными частотам попадания в интервалы группировки.

К свойствам среднего арифметического относятся следующие:

а) измеряется в тех же единицах, что и основные варианты;

б) если каждое число совокупности уменьшить (увеличить) на одно и то же число, то ее среднее уменьшится (увеличится) на это же число;

в) если каждое число совокупности увеличить (уменьшить) в несколько раз, то ее среднее увеличится (уменьшится) в такое же число раз;

г) сумма отклонений статистических данных совокупности от их точного среднего всегда равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

Пример 2.1.1. При проведении тестирования студентов об уровне их общей работоспособности судили по результатам абсолютных значений теста PWC_{170}. Всего было обследовано 11 человек. Требуется определить средний результат в исследуемой группе, если полученные данные таковы:

x_i, кг м/мин ~ 897; 1250; 875; 860; 520; 670; 652; 410; 721; 910; 734.

Решение.

1. Среднее арифметическое находим по формуле (2.1.1):

$$\bar{x} = \frac{1}{11} \cdot (897 + 1250 + 860 + \ldots + 734) = \frac{1 \cdot 8499}{11} \approx 772{,}636 \approx 773(\text{кг} \cdot \text{м/мин}).$$

Так как все показатели целые числа, то величину среднего арифметического также округляем до цифры, соответствующей точности измерения признака.

Пример 2.1.2. Вычислим среднее арифметическое результатов в беге на 30 м для экспериментальных данных.

Решение.

1. Для вычисления средней предварительно проведем дополнительные промежуточные расчеты, результаты которых представлены в таблице 2.1.1.

Таблица 2.1.1

Расчет среднего арифметического результатов в беге на 30 м

№ п/п	x_i, *с*	n_i	$n_i \cdot x_i$
1	5,0	7	35,0
2	5,2	4	20,8
3	5,4	5	27,0
4	5,6	9	50,4
5	5,8	6	34,8
6	6,0	15	90,0
7	6,2	4	24,8
Сумма			282,8

2. Подставим полученные данные в формулу (2.1.2):

$$\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot 282{,}8 = 5{,}656 \approx 5{,}7(c).$$

Медиана.

Медианой *(Me)* называется такое значение признака *X,* когда одна половина значений экспериментальных данных меньше ее, а вторая половина – больше.

Собственно, этим и ограничивается смысловое значение медианы. Широкое использование этой характеристики на практике объясняется простотой ее вычисления и независимостью от формы распределения эмпирических данных.

Если данных немного (объем выборки невелик), медиана вычисляется очень просто. Для этого выборку ранжируют, т. е. располагают данные в порядке возрастания или убывания, и в ранжированной выборке, содержащей n членов, ранг R (порядковый номер) медианы определяется как

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2}. \tag{2.1.3}$$

Пусть, например, имеется ранжированная выборка показателей, содержащая нечетное число членов $n = 9$: 12 14 14 18 20 22 22 26 28. Тогда ранг медианы

$$R_{Me} = \frac{9+1}{2} = 5,$$

и медиана, обозначаемая символом Me, совпадает с пятым членом ряда: $Me = 20$.

Если выборка содержит четное число членов, то медиана не может быть определена столь однозначно. Например, получен ряд из 10 членов: 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24.

Ранг медианы оказывается равным

$$R_{Me} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5.$$

Медианой в этом случае может быть любое число между 14 и 16 (5-м и 6-м членами ряда). Для определенности принято считать в качестве медианы среднее арифметическое этих значений, т. е.

$$Me = \frac{14+16}{2} = 15.$$

Если необходимо найти медиану для сгруппированных данных, то поступают следующим образом.

Вначале находят интервал группировки, в котором содержится медиана, путем подсчета накопленных частот. Медианным будет тот интервал, в котором накопленная частота впервые окажется больше $n/2$ *(n* — объем выборки). Внутри медианного интервала медиана определяется по следующей формуле:

$$Me = x_{Me\cdot н} + k\,\frac{0{,}5n - n_{x\,Me-1}}{n_{Me}}, \tag{2.1.4}$$

где $x_{Me\cdot н}$ – нижняя граница медианного интервала;

$0{,}5_n$ – половина объема выборки;

k – ширина интервалов группировки;

$n_{x_{Me-1}}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} – частота медианного интервала.

В качестве примера найдем медиану для экспериментальных данных

Медиана содержится в интервале (5,7; 5,9), которому соответствует накопленная частота 31 (n/2 = 25). По формуле (2.1.4) находим

$$\text{Me} = 5{,}7 + 0{,}2 \cdot \frac{25 - 25}{6} = 5{,}7\text{с}.$$

Определив медиану, мы тем самым нашли, что в группе испытуемых одна половина бегунов показала результат лучше 5,7 с, а другая – хуже.

Как видим, медиана несколько отличается от ранее найденного среднего арифметического. Так бывает всегда, когда имеет место несимметричная форма эмпирического распределения.

Для тех случаев, когда эмпирическое распределение оказывается сильно асимметричным, среднее арифметическое теряет свою практическую ценность, поскольку при этом значительно большая часть значений признака оказывается выше или ниже среднего арифметического. В этой ситуации медиана представляет собой лучшую характеристику центра распределения.

Мода.

Мода *(M_o)* представляет собой значение признака, встречающееся в выборке наиболее часто.

Интервал группировки с наибольшей частотой называется модальным.

Для определения моды используется следующая формула:

$$\text{M}_O = \text{x}_n + i \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2p_1 - p_2 - p_3}\right), \tag{2.1.5}$$

где x_n – показатель нижней границы модального класса, т.е. класса с наибольшей частотой накопления вариант;

p_1 – частота модального класса;

p_2 – частота класса, предшествующего модальному;

p_3 – частота класса, следующего за модальным;

i – интервал модального класса, который равен интервалу классов k.

Для данных результатов в беге на 30 м имеем:

$$M_O = 5{,}9 + 0{,}2 \cdot \frac{15 - 6}{30 - 6 - 4} = 5{,}9 + 0{,}2 \cdot \frac{9}{20} = 5{,}99 \approx 6{,}0 \quad (\text{с}),$$

т.е. наибольшее число бегунов в исследуемой группе показали результат, близкий к 6,0 с.

На рисунке 2.1.1 представлена гистограмма распределения результатов в беге на 30 м с нанесенными на нее средним арифметическим, медианой и модой. Из приведенного графика видно, что указанные характеристики положения отличаются друг от друга. Это свидетельствует об асимметрии эмпирического распределения. Вообще, среднее, медиана и мода совпадают только в том случае, если распределение унимодальное (с одним максимумом) и симметричное. Чем больше распределение отличается от симметричного, тем сильнее различие между этими характеристиками.

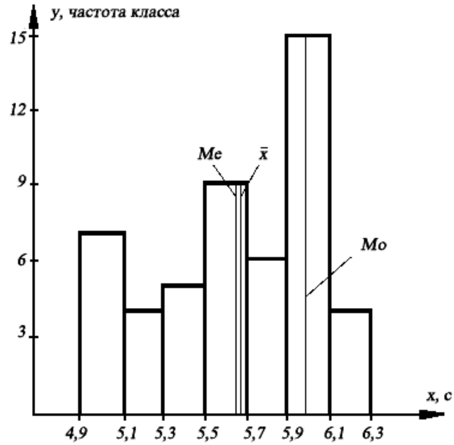


Рис. 2.1.1. Гистограмма распределения и характеристики положения результатов в беге на 30 м

Таким образом, расчет числовых значений характеристик положения позволяет выявить закономерность распределения показателей. При нормальном распределении данных необходимо соблюдение главного условия: полное совпадение по абсолютным величинам трех показателей: средней арифметической, медианы и моды. Если они имеют отличия, то распределение асимметрично.

Характеристики рассеяния

Средние значения не дают полной информации о варьирующем признаке. Можно представить себе два эмпирических распределения, у которых средние одинаковы, но при этом у одного из них значения признака рассеяны в узком диапазоне вокруг среднего, а у другого – в широком. Поэтому наряду со средними значениями вычисляются и характеристики рассеяния выборки, такие как *размах вариации, дисперсия, стандартное отклонение, стандартная ошибка среднего арифметического и коэффициент вариации.*

Размах вариации.

Размах вариации вычисляется как разность между максимальной и минимальной вариантами выборки:

$$R = x_{max} - x_{min}. \tag{2.1.6}$$

Как видно из формулы (2.1.6), размах вычисляется очень просто, но информативность этого показателя невелика, так как можно привести очень много распределений, сильно отличающихся по форме, но имеющих одинаковый размах. Поэтому размах вариации используется иногда в практических исследованиях (например, при построении графиков вариационных рядов) при малых (не более 10) объемах выборки. В этом случае по этому показателю легко оценить, например, насколько различаются лучший и худший результаты в группе спортсменов. При больших объемах выборки к его использованию надо относиться очень осторожно.

Дисперсия.

Дисперсией (σ^2) называется средний квадрат отклонения значений признака от среднего арифметического. Это числовая характеристика служит для того, чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее среднего арифметического.

Дисперсия, вычисляемая по выборочным данным, называется *выборочной дисперсией.*

Выборочную дисперсию вычисляют по приведенным ниже формулам.

Для несгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \tag{2.1.7}$$

где $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ – сумма квадратов отклонений значений признака x_i от среднего арифметического $\bar{x}$. Для получения среднего квадрата отклонений эта сумма поделена на объем выборки n.

Для сгруппированных в интервальный вариационный ряд данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2, \tag{2.1.8}$$

где x_i – срединные значения интервалов группировки;

$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$ – взвешенная сумма квадратов отклонений.

На практике выборочная дисперсия в виде (2.1.7) или (2.1.8) вычисляется редко, а вместо этих формул используются следующие.

Для несгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2. \tag{2.1.9}$$

Для данных, сгруппированных в интервалы:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2. \tag{2.1.10}$$

Различие этих формул от формул расчета выборочной дисперсии в том, что в последних деление сумм квадратов отклонений производится не на объем выборки n, как того требует вычисление среднего квадрата, а на $n - 1$.

Поясним смысл такого изменения формулы.

Так как выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$ является несмещенной оценкой генерального среднего μ, т. е. не содержит систематической ошибки и стремится к истинному значению соответствующего генерального параметра, то одним из ее свойств то, что сумма квадратов отклонений значений признака от среднего арифметического меньше, чем сумма квадратов отклонений от любой другой величины (в том числе и от генерального среднего μ), т. е. $\sum(x_i - \bar{x})^2 < \sum(x_i - \mu)^2$ для любой выборки. Поэтому вычисление оценки дисперсии по формуле $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ будет содержать систематическую ошибку, и такая оценка будет смещенной.

Можно также показать, что если использовать оценку $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, то она будет несмещенной, т. е. при неограниченном повторении выборки из генеральной совокупности и усреднении выборочной дисперсии, полученной на основании этой формулы, по всем выборкам получается истинное значение генеральной дисперсии.

Кроме того, вычисление дисперсии по формулам (2.1.7) – (2.1.10) неудобно по следующим причинам:

1. При вычислении суммы квадратов отклонений приходится каждый раз вычитать из значений признака (или срединных значений интервалов) x_i предварительно вычисленное $\bar{x}$ а затем возводить полученные разности в квадрат. При ручных методах вычислений это вызывает трудности, особенно в случаях многоразрядных значений x_i.

2. Среднее арифметическое $\bar{x}$ входящее в эти формулы, обычно вычисляется с некоторой погрешностью округления. Она приводит к накоплению ошибки округления результатов (дисперсии и стандартного отклонения). Опасность существенных ошибок округления увеличивается с увеличением объема выборки.

Поэтому на практике используют другие расчетные формулы, более удобные как для ручных расчетов, так и для вычислений на ЭВМ.

Для несгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \tag{2.1.11}$$

или

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]. \tag{2.1.12}$$

Для сгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \tag{2.1.13}$$

или

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i\right)^2}{n}\right]. \tag{2.1.14}$$

Формулы (2.1.11) и (2.1.13) применяются для определения дисперсии, если среднее арифметическое уже вычислено. При этом следует иметь в виду, что при подставке $\bar{x}$ в эти формулы его значение не следует округлять, иначе результат может получиться с большой ошибкой. Кроме того, формулы (2.1.12) и (2.1.14) используются в тех случаях, когда среднее и дисперсия вычисляются одновременно.

Стандартное отклонение.

Основной мерой статистического измерения изменчивости признака у членов совокупности служит *среднее квадратическое отклонение* σ (сигма) или, как часто ее называют, *стандартное отклонение*. Теория вариационной статистики показала, что для характеристики любой генеральной совокупности, имеющей нормальный тип распределения достаточно знать два параметра: среднюю арифметическую и среднее квадратическое отклонение. Эти параметры заранее не известны и их оценивают с помощью *выборочной средней арифметической* и *выборочного стандартного отклонения*, которые вычисляются при обработке случайной выборки.

В основе среднего квадратического отклонения лежит сопоставление каждой варианты (x_i) со средней арифметической данной совокупности. Так как в совокупности всегда будут варианты как меньше, так и больше, чем она, то сумма отклонений $(x_i - \bar{x})$, имеющих знак "–", будет погашаться суммой отклонений, имеющих знак "+", т.е. $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$.

Отклонение вариант от среднего арифметического в совокупности выражает изменчивость признака. Если бы изменчивость признака у членов совокупности отсутствовала, тогда разность $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$.

Но т.к. $\sum(x_i - \bar{x})$всегда равна нулю, то для измерения изменчивости берут отклонение в квадрате, т.е. $(x_i - \bar{x})^2$.

Если просуммировать квадраты отклонений, то эта сумма не будет равна нулю. А чтобы получить коэффициент, способный измерить изменчивость, берут среднее отклонение из выражения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (2.1.15)$$

Величина σ^2 в данном случае называется *девиатой* (*или взвешенной дисперсией*), *вариансой* (*или средним квадратом*). Тогда среднее квадратическое отклонение можно вычислить по следующим формулам:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \text{ при } n > 30; \qquad (2.1.16)$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \text{ при } n \leq 30. \qquad (2.1.17)$$

Свойства среднего квадратического (стандартного) отклонения:

1. Стандартное отклонение всегда измеряется в тех же единицах измерения, что и основные варианты.
2. При вычислении стандартное отклонение определяют с точностью на один десятичный знак больше, чем точность, которую применяют для вычисления средней арифметической для того же ряда.
3. Если каждую варианту совокупности увеличить на одну и ту же величину, то, как и дисперсия, стандартное отклонение от этого не изменяется.
4. При умножении каждой варианты на одно и тоже число *К* стандартное отклонение увеличится в *К* раз. При делении каждой варианты на одно и то же число оно уменьшится в *К* раз.
5. Чем больше стандартное отклонение, тем больше изменчивость признака, так как среднее квадратическое отклонение характеризует варьирование значений этого признака вокруг центра распределения, т. е.

средней арифметической, является мерой степени влияния на признак различных второстепенных причин, вызывающих его варьирование.

6. В вариационных рядах с нормальным распределением частот 99,73% всех членов совокупности, находящихся в границах от x_1 до x_2, которые отстоят от средней арифметической на величину от -3σ до $+3\sigma$. За пределами $\pm 3\sigma$ находятся только 0,27% всех членов совокупности.

Пример 2.1.3. Рассмотрим вначале пример вычисления характеристик рассеяния по несгруппированным первичным данным. Необходимо определить дисперсию и стандартное отклонение результатов измерения пульса покоя для контрольной группы студентов.

Решение.

1. Промежуточные расчеты приведены в таблице 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Расчет дисперсии результатов измерения пульса покоя

1	2	3		1	2	3
№ п/п	x_i, уд/мин	x_i^2		№ п/п	x_i, уд/мин	x_i^2
1	68	4624		7	83	6889
2	72	5184		8	85	7225
3	72	5184		9	71	5041
4	73	5329		10	82	6724
5	75	5625		11	75	5625
6	74	5476		12	70	4900
				Сумма	900	67826

2. По формуле (2.12) получаем:

Таблица 2.1.3

Расчет дисперсии результатов в беге на 30 м

xi, с	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
5,0	7	35,0	175,0
5,2	4	20,8	108,16
5,4	5	27,0	145,8
5,6	9	50,4	282,24
5,8	6	34,8	201,84
6,0	15	90,0	540,0
6,2	4	24,8	153,76
Сумма		282,8	1606,8

$$\sigma^2 = \frac{1}{12-1} \cdot \left[67826 - \frac{900^2}{12}\right] = \frac{326}{11} \approx 29{,}64(\text{уд/мин})^2.$$

3. Стандартное отклонение составит:

$$\sigma = \pm\sqrt{29{,}6} \approx \pm 5{,}4(\text{уд/мин}).$$

Вывод: для показателей пульса величина дисперсии (σ^2) составляет 29,64 (уд/мин)^2, а стандартного отклонения (σ) – ±5,4 уд/мин.

Пример 2.1.4. В качестве примера расчета для сгруппированных данных найдем дисперсию и стандартное отклонение результатов в беге на 30 м по данным.

Решение.

1. Взвешенная сумма квадратов срединных значений интервалов группировки на основании расчетов в таблице 2.1.3 составит:

$$\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i^2 = 1606{,}8.$$

2. Взвешенная сумма срединных значений $\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i = 282{,}8.$

3. По формуле (2.1.14) находим

$$\sigma^2 = \frac{1}{50-1} \cdot \left[1606{,}8 - \frac{282{,}8^2}{50}\right] = \frac{7{,}2832}{49} \approx 0{,}149(c^2).$$

Отсюда стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{0{,}149} \approx 0{,}39(c)$.

Вывод: для результатов в беге на 30 м $\sigma^2 = 0{,}149$ с^2, а $\sigma = \pm 0{,}39$ с.

Стандартная ошибка среднего арифметического или ошибка репрезентативности.

Характеристики генеральной совокупности – средняя величина (μ) дисперсия (σ^2) и среднее квадратическое отклонение (σ) – представляют собой величины постоянные (параметры). По отношению к ним соответствующие выборочные характеристики (среднее выборки, выборочная дисперсия и стандартное отклонение), которые служат оценками генеральных параметров, являются величинами случайными: они могут совпадать и не совпадать с величиной генеральных параметров.

Возможные отклонения выборочных показателей от их параметров в генеральной совокупности, которая обычно представляет собой совокупность неограниченно большого объема, называются *ошибками репрезентативности*.

Размеры выборочных ошибок или ошибок репрезентативности зависят, главным образом, от объема выборки и от размаха варьирования признака; на них также сказываются способы отбора вариант из генеральной совокупности.

Если взять очень много независимых выборок объема n из одной и той же генеральной совокупности и определить для каждой из них среднее арифметическое, то оказывается, что полученные средние арифметические варьируют вокруг своего среднего значения (равного μ) в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем отдельные варианты выборки.

Поэтому *в качестве оценки стандартного отклонения выборочного среднего от среднего генеральной совокупности* используется величина, называемая *стандартной ошибкой среднего арифметического* или *ошибкой репрезентативности (m),* которая вычисляется по следующим формулам:

$$m = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}, \text{ при } n \le 30; \qquad (2.1.18)$$

$$m = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ при } n > 30. \qquad (2.1.19)$$

Величина m показывает, какая ошибка в среднем допускается, если использовать вместо генерального среднего μ его выборочную оценку $\bar{x}$.

Поэтому вычисленное среднее арифметическое часто указывают в виде $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$, чтобы оценить точность оценки $\overline{x}$.

Из формулы (2.1.17) видно, как зависит стандартная ошибка m от объема выборки n: с увеличением объема выборки n стандартная ошибка m уменьшается пропорционально корню квадратному из n.

Свойства стандартной ошибки среднего арифметического следующие:

1. Стандартная ошибка выражается в тех же единицах измерения, что и сопровождаемые ею показатели.

2. При вычислении стандартное отклонение определяют с точностью на один десятичный знак больше, чем точность, которую применяют для вычисления средней арифметической для того же ряда.

3. Если каждую варианту совокупности увеличить на одну и ту же величину, то, как и дисперсия, стандартное отклонение от этого не изменяется.

4. При умножении каждой варианты на одно и тоже число K стандартное отклонение увеличится в K раз. При делении каждой варианты на одно и то же число оно уменьшится в K раз.

5. При увеличении объема выборки стандартная ошибка уменьшается. Это свойство ошибки репрезентативности обусловлено действием статистического *закона больших чисел*.

Пример 2.1.5. Найдем стандартную ошибку среднего арифметического показателей пульса покоя 12 исследуемых из примера 2.1.3.

Решение.

1. Расчет выборочного среднего произведем по формуле (2.1.1):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{900}{12} = 75(\text{уд/мин}).$$

2. Величина стандартного отклонения составляет:

$$\sigma = \pm\sqrt{29,6} \approx \pm 5,4(\text{уд/мин}).$$

3. Объем выборки $n = 12$, отсюда стандартная ошибка среднего арифметического равна:

$$m = \pm\frac{5,4}{\sqrt{12-1}} \approx \pm 1,6(\text{уд/мин}).$$

Вывод: стандартное отклонение выборочного среднего от среднего генеральной совокупности (его стандартная ошибка) составляет ±1,6 уд/мин.

Пример 2.1.6. Найдем стандартную ошибку среднего арифметического результатов в беге на 30 м из примера 2.1.4.

Решение.

1. Рассчитанные в примере 2.1.4 значения выборочных характеристик:

$$\bar{x} = 5,7c \text{ и } \sigma = \sqrt{0,149} \approx 0,39c.$$

2. Объем выборки $n = 50$, отсюда стандартная ошибка среднего арифметического равна:

$$m = \pm\frac{0,39}{\sqrt{50}} \approx \pm 0,06(c).$$

Вывод: стандартное отклонение выборочного среднего от среднего генеральной совокупности (его стандартная ошибка) составляет ±0,06 с.

Коэффициент вариации.

Изложенные выше характеристики совокупности (среднее арифметическое и стандартное отклонение) имеют один недостаток: они дают показатель варьирования (изменчивости) признака в именованных величинах, а не в относительных. Поэтому сопоставление (или сравнение) разноименных признаков по этим параметрам невозможно. Пусть, например, результаты в беге на 30 м, показанные группой школьников 11 лет, имеют стандартное отклонение 0,38 с (данные примера 2.1.4), а исследование роста тех же учащихся показывает, что его стандартное отклонение составляет 5,3 см (при среднем росте 147 см). Какой из признаков варьирует сильнее? Очевидно, что только на основании стандартных отклонений на этот вопрос ответить нельзя. Требуется сопоставить стандартные отклонения со средними арифметическими этих признаков. Поэтому вводится относительный показатель

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \qquad (2.1.20)$$

называемый *коэффициентом вариации* или *коэффициентом изменчивости (V)* признака.

Обычно он выражается в относительных величинах, а именно в процентах:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%. \qquad (2.1.21)$$

Коэффициент вариации является относительной мерой рассеяния признака.

Для рассматриваемых выше примеров:

$$V_1 = \frac{0{,}39}{5{,}7} \cdot 100\% \approx 6{,}8\%; \qquad V_2 = \frac{5{,}3}{147} \cdot 100\% \approx 3{,}6\%.$$

Как видим, результаты в беге на основании полученных выборочных данных варьируют сильнее, чем рост учащихся.

Коэффициент вариации используется и как показатель однородности выборочных наблюдений. В спортивной практике вариативность результатов измерений в зависимости от величины коэффициента вариации считают небольшой, если они находятся в пределах от 0 до 10%, средней – от 11 до 20% и большой при $V > 20\%$.

Коэффициент вариации можно использовать как относительную меру рассеяния только в тех случаях, когда значения признака измерены в шкале с абсолютным нулем. На практике коэффициент вариации применяется в основном для сравнения выборок из однотипных генеральных совокупностей.

Кроме того, необходимо еще отметить, что в практике спортивных исследований при образовании вариационных рядов часто возникают затруднения, связанные с тем, что один или несколько показателей резко отличаются от остальных. В этом случае возникает естественный вопрос: чем вызвано такое различие? Означает ли это, что исследователь ошибся и провел неверные измерения или такое отличие указывает на какую-то скрытую закономерность исследуемых объектов. Понятно, что в первом случае от таких измерений следует избавляться и дальнейший расчет проводить без них, во втором случае к ним следует отнестись с полным вниманием.

Для определения этого существует такое приближенное правило:

1) следует вычислить среднее арифметическое ($\bar{x}$) и среднее квадратическое отклонение (σ) выборки без варианты, которая резко отличается от остальных;

2) вычислить величину ($\bar{x} \pm 3\sigma$);

3) если сомнительная варианта выходит за пределы ($\bar{x} \pm 3\sigma$), её следует исключить из дальнейших расчетов. В противном случае этот показатель не случаен и подлежит дальнейшим исследованиям.

Таким образом, для определения пригодности резко отличающихся параметров выборки можно пользоваться формулой:

$$(\bar{x} - 3\sigma) \leq A \leq (\bar{x} + 3\sigma), \qquad (2.1.22)$$

где A – величина сомнительного показателя;

$\bar{x}, \sigma$ – среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение, вычисленные без учета сомнительного показателя.

Иногда в формуле (2.1.22) вместо 3σ употребляют R_z, где R есть так называемый размах вариации, равный $R = x_{max} - x_{min}$, т. е. разности максимального и минимального значения вариант, а z – величина, зависящая от объема совокупности n и определяемая по таблице 2.1.4.

Таблица 2.1.4

5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	26-23	64-150
1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Таким образом, сомнительная варианта остается в ряду, если её значение не выходит за пределы:

$$(\bar{x} - R_z) \leq A \leq (\bar{x} + R_z). \qquad (2.1.23)$$

Пример 2.1.7. При проведении измерений показателей пульса покоя в группе яхтсменов, состоящей из 20 спортсменов, получили величины (x_i) от 69 до 91 уд/мин. При этом два показателя имели значения, равные 86 и 91 уд/мин. Остальные – 69-80. Следует ли результаты измерений, равные 86 и 91 уд/мин, исключить из дальнейших расчетов?

Решение.

Расчет среднего арифметического и стандартного отклонения производим для сгруппированных показателей, используя данные таблицы 2.1.5. При этом сомнительные варианты 86 и 91 уд/мин исключаем:

Таблица 2.1.5

xi, с	n_i	$n_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
69	1	69	-5	25	25
70	5	350	-4	16	80
73	3	219	-1	1	3
75	4	300	1	1	4
80	5	400	4	16	80
86	1	–			
91	1	–			
	n = 20	$\sum$ = 2038			$\sum$ = 192

$\bar{x} = \frac{1338}{18} =\approx 74{,}3 = 74(\text{уд/мин});$ $\sigma^2 = \frac{192}{18} \approx 10{,}67(\text{уд/мин})^2;$

$$\sigma = \pm\sqrt{10{,}67} \approx \pm 3{,}27 \approx \pm 3{,}3(\text{уд/мин}); \quad 3\sigma = 9{,}9 \approx 10(\text{уд/мин}).$$

Отсюда $\bar{x} \pm 3\sigma = 74 \pm 10(\text{уд/мин})$.

Таким образом, сомнительные варианты 86 и 91 уд/мин не должны выходить за пределы от 74 уд/мин – 10 уд/мин = 64 уд/мин до 74 уд/мин + +10 уд/мин = 84 уд/мин. Варианты 86 уд/мин и 91 уд/мин, как показывает расчет, представляют собой значения, выше допустимого.

Проверим этот же расчет по формуле (2.1.23). Здесь R есть величина размах ряда с показателями от 69 до 80 уд/мин и R = 80 уд/мин – 69 уд/мин = =11 уд/мин. Находим из таблицы 2.4 для n = 18 z = 1,1. Тогда значения сомнительных показателей не должны выходить за пределы $\bar{x} \pm R_z = 74 \pm \pm 11 \cdot 1{,}1 = 74 \pm 12{,}1(\text{уд/мин})$.

Следовательно, варианты 86 и 91 уд/мин не должны выходить за пределы от 61,9 до 86,1 уд/мин. Поэтому показатель 86 уд/мин из расчетов исключить нельзя, в то время как варианту со значение 91 уд/мин следует исключить, так как она больше верхнего предела 86,1 уд/мин.

Как видно из примера, более точный расчёт получается по формуле (2.1.23).

Таким образом, при помощи расчетов числовых характеристик выборки можно решать множество задач в области физической культуры и спорта, производя анализ какого-либо процесса или явления. При этом наиболее распространенными из них будут задачи, носящие анализирующий, разделяющий, нормативный и сравнительный характер. Уместно также заметить, что какими бы ни были числовые значения показателей, принцип и схема их обработки одинаковы.

Пример 2.1.8. У 18 исследуемых проведено измерение показателей пульса после выполнения стандартной пробы Руфье. Определить однородность и симметричность распределения полученных данных с помощью расчета основных статистических характеристик, если данные выборки таковы:
x_i,уд/мин~168;162;114;126;120;120;174;132;108;114;174;180;108;162;126;114;102;174.

Решение.

1. Заносим данные тестирования в рабочую таблицу.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
168	30	900
162	24	576
114	-24	576
126	-12	144
120	-18	324
120	-18	324
174	36	1296
132	-6	36
108	-30	900
114	-24	576
174	36	1296
180	42	1764
108	-30	900

Окончание таблицы

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
162 126 114 102 174	24 -12 -24 -36 36	576 144 576 1296 1296
$\overline{X}$ = 138 уд/мин	$\sum(x_i - \bar{x})$ = -6 уд/мин	$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 13500

2. Рассчитываем величину среднего арифметического по формуле (2.1.1):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2478}{18} = 138{,}33 \approx 138 \text{ (уд/мин)}.$$

3. Рассчитываем в рабочей таблице величины отклонений вариант от среднего арифметического и их квадраты, а суммы этих отклонений.

4. Рассчитываем величину стандартного отклонения по формуле (2.1.17):

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{13500}{17}} = \pm\sqrt{813{,}18} \approx 28{,}5 \text{ (уд/мин)}.$$

5. Рассчитываем величину стандартной ошибки среднего по формуле (2.1.18):

$$m = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \pm\frac{28{,}5}{\sqrt{17}} \approx \pm 6{,}91 \approx \pm 6{,}9 \text{ (уд/мин)}.$$

6. Ранжируем данные выборки в порядке возрастания и определяем ранг медианы и ее величину по формуле (2.1.3):

x_i,уд/мин~ 102;108;108;114;114;114;120;120;126;126;132;162;162;168; 174;174;174;180.

(ранги) 1 2,5 2,5 5 5 5 7,5 7,5 9,5 9,5 11 12,5 12,5 14, 16, 16, 16, 18

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2} = \frac{18+1}{2} = 9{,}5; \qquad Me = 126 \text{ уд/мин}.$$

7. Рассчитываем величину моды, предварительно определив интервалы классов и частоту накопления величин в них, используя формулу (2.1.5):

№ классов	Границы классов	Частота классов
1	102 уд/мин$\leq x_i <$115 уд/мин	6
2	115уд/мин$\leq x_i <$128 уд/мин	4
3	128 уд/мин $\leq x_i <$141 уд/мин	1
4	141 уд/мин $\leq x_i <$154 уд/мин	0
5	154 уд/мин $\leq x_i <$167 уд/мин	2
6	167 уд/мин $\leq x_i \leq$180 уд/мин	5

R = 180 – 102 = 78 уд/мин

lg18 = 1,25527≈ 1,26

N = 1+3,32·1,26 ≈5,18 ≈ 6

$k = i$ = 13 уд/мин

$$M_O = \mathrm{x}_n + i \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2p_1 - p_2 - p_3}\right);$$

$$Mo = 102 + 13 \cdot \left(\frac{6-0}{12-0-4}\right) = 102 + 13 \cdot \frac{3}{4} \approx 102 + 9{,}75 \approx 111{,}75 \approx 112 \text{(уд/мин)}.$$

8. Рассчитать величину коэффициента вариации по формуле (2.1.21):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%; \qquad V = \frac{28{,}5 \text{ уд/мин}}{138 \text{ уд/мин}} \cdot 100\% \approx 20{,}65\%.$$

Вывод: 1) расчет значений $\bar{x}$ =138 уд/мин, Ме =126 уд/мин, Мо =112 уд/мин свидетельствует о том, что данные выборки имеют асимметричное или случайное распределение, т.к. $\bar{x} \neq$ Ме $\neq$ Мо;

2) по показателю пульса нагрузки группа неоднородна, т. к. наблюдается большая вариабельность признака при V = 20,65% > 20%.

Пример 2.1.9. Получены результаты прыжков в длину с места у группы из 11 исследуемых. Определить однородность и симметричность распределения с помощью расчета основных статистических характеристик, если данные выборки таковы:

x_i, см ~ 205; 214; 210; 215; 235; 190; 218; 200; 225; 214; 225.

Решение.

1. Занести данные тестирования в рабочую таблицу.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
205	205 – 214 = -9	81
214	214 – 214 = 0	0
210	210 – 214 = -4	16
215	215 – 214 = 1	1
235	235 – 214 = 21	441
190	190 – 214 = -24	576
218	218 – 214 = 4	16
200	200 – 214 = -14	196
225	225 – 214 = 11	121
214	214 – 214 = 0	0
225	225 – 214 = 11	11
$\bar{X}$ = 214 см	$\sum(x_i - \bar{x})$ = -3 см	$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 1459

2. Рассчитать величину среднего арифметического по формуле (2.1.1):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}; \qquad \bar{x} = \frac{2351\text{см}}{11} \approx 213{,}7\text{см} \approx 214 \quad \text{см.}$$

3. Рассчитать в рабочей таблице величины отклонений вариант от среднего арифметического и их квадраты, а суммы этих отклонений.

4. Рассчитать величину стандартного отклонения по формуле (2.1.17):

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum(x \quad - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ для } n \leq 30;$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1459}{10}} \approx \pm\sqrt{145{,}9} \approx 12{,}08 \approx \pm 12{,}1(\text{см}).$$

5. Рассчитать величину стандартной ошибки среднего по формуле (2.1.18):

$$m = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \text{ для } n \leq 30;\ m = \pm\frac{12{,}1\text{см}}{\sqrt{10}} \approx \pm 3{,}8\text{см.}$$

6. Проранжировать данные выборки в порядке неубывания и определить ранг медианы и ее величину по формуле (2.1.3):

x_i, см ~ 190; 200; 205; 210; 214; 214; 215; 218; 225; 225; 235.

(ранги) 1 2 3 4 5,5 5,5 7 8 9,5 9,5 11

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6; \qquad Me = 214 \quad \text{см.}$$

7. Рассчитать величину моды, предварительно определив интервалы классов и частоту накопления величин в них, используя формулу (2.1.5):

№ классов	Границы классов	Частота классов
1	190 см $\leq x_i <$ 199 см	1
2	199 см $\leq x_i <$ 208 см	2
3	208 см $\leq x_i <$ 217 см	4
4	217 см $\leq x_i <$ 226 см	3
5	226 см $\leq x_i \leq$ 235 см	1

$R = 235 - 190 = 45$ см

$N = 5$

$k = i = 9$ см

$$M_O = x_n + i \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2p_1 - p_2 - p_3}\right);$$

$$Mo = 208 + 9 \cdot \left(\frac{4-2}{8-2-3}\right) = 208 + 9 \cdot \frac{2}{3} = 214 \quad \text{см}$$

8. Рассчитать величину коэффициента вариации по формуле:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%; \quad V = \frac{12{,}1}{214} \cdot 100\% \approx 5{,}65\%.$$

Вывод: 1) расчет значений $\bar{x}$ = Me = Mo = 214 см свидетельствует о том, что данные выборки имеют симметричное распределение, близкое к графику закона нормального распределения;

2) по результатам прыжка в длину с места исследуемая группа однородна, т.к. V = 8,51%.

2.2. Статистические гипотезы и их виды

Нулевая гипотеза (нуль-гипотеза) и альтернатива (альтернативная гипотеза).

В спорте часто при анализе какого-либо явления приходится по некоторым измерениям показателя делать обобщающий вывод. Например, после тренировочного занятия 15 легкоатлетов у трех наблюдается неполное восстановление. Можно ли на этом основании судить о трудности тренировочного процесса или это случайность? Наверное, если такой неприятный факт случится со всеми 15 спортсменами, сомнений в неправильном построении занятия не будет. Следовательно, в данном случае можно говорить о представительности (*репрезентативности*) выборки, на основании которой можно сделать вывод. Этот же вопрос можно сформулировать иначе: сколько испытуемых необходимо обследовать, чтобы получить достоверные результаты измерений? Это очень важно исследователям, так как является необходимостью научно решаемых задач. А так как почти во всех случаях выборочного наблюдения параметры генеральной совокупности остаются неизвестными, то о них приходится судить по выборочным данным, т. е. гипотетически, так как выборочные показатели являются величинами случайными. Поэтому такие вопросы, как сравнение результатов различных групп, оценка точности результатов измерений, оценка достоверности коэффициентов взаимосвязи и другие, решаются с использованием некоторых приемов проверки статистических гипотез.

Статистической гипотезой (или просто гипотезой) называется проверяемое математическими методами предположение о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Паусcона;

2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

Эти две различные статистические гипотезы. В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй – о параметрах двух известных распределений. Гипотезы предстоит проверить с помощью какого-то метода – *критерия.*

Статистические гипотезы обычно рассматривают две генеральные совокупности, одна из которых может представлять собой теоретическую модель (например, нормальное распределение), а о второй судят по выборке из нее. В других случаях обе генеральные совокупности представлены выборками.

Для оценки величины генеральных параметров по выборочным показателям используется *нулевая (основная) гипотеза,* или *нуль-гипотеза*, т. е. предположение о том, что генеральные параметры, о которых судят по выборочным данным, не отличаются друг от друга, и что разница, наблюдаемая между выборочными показателями, носит не систематический, а исключительно случайный характер. Обратное нуль-гипотезе утверждение о том, что в действительности между генеральными совокупностями есть различия, называется *альтернативной (противоположной) гипотезой* или *альтернативой*.

Итак, вначале выдвигается нулевая гипотеза о том, что различия между генеральными совокупностями равно нулю. Затем получают выборку или несколько выборок, и если выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе, т. е. различия можно объяснить только случайностью выборки, то нулевая гипотеза принимается. Если же полученные результаты не удается объяснить только воздействием случайных факторов, то нулевая гипотеза отвергается, а принимается альтернативная гипотеза.

Нулевую гипотезу принято обозначать, как H_0, а альтернативную – H_1.

Например, при оценке эффективности применения нового метода тренировки юных спортсменов–спринтеров по среднему значению спортивного результата в контрольной и экспериментальной группах, нулевую гипотезу можно сформулировать следующим образом: средние значение результатов в группах не изменилось, т. е. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Для краткости это записывается так: $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Если же заранее нельзя сказать, к чему приведет применение новой методики тренировки – к увеличению или снижению результатов, то альтернативная гипотеза H_1 будет состоять в том, что средние значения генеральных совокупностей неодинаковы: $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$.

Ошибки при проверке гипотез.

При сравнении статистических характеристик почти никогда не встречается случая их абсолютного равенства. В силу каких-то случайных или закономерных причин значения их отличаются друг от друга. Задача при проверке гипотез состоит в том, чтобы отличить случайные влияния от закономерных.

При проверке статистической гипотезы решение экспериментатора никогда не принимается с уверенностью, т.е. всегда существует некоторый риск принять неправильное решение. Оценка степени этого риска и представляет собой суть проверки статистической гипотезы. Ясно, что исключить на 100% этот риск невозможно. Но экспериментатор может выбрать *вероятность*, или *уровень значимости*, который характеризует вероятность отклонения, признаваемого невозможным в силу лишь случайных причин. Самыми распространенными уровнями являются: 0,001; 0,01; 0,05. Уровень 0,05 означает, что выборочное значение может встретиться в среднем не чаще чем 5 раз в 100 наблюдениях.

Ошибки, допускаемые при проверке гипотез, удобно разделить на два вида: 1) отклонение гипотезы H_0, когда она верна, – *ошибка первого рода*; 2) принятие гипотезы H_0, когда в действительности верна какая-то другая гипотеза, – *ошибка второго рода*.

Вероятность ошибки первого рода обозначается α. Величина α называется *уровнем значимости критерия*, по которому проверяется справедливость гипотезы H_0.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β, которую принято называть *доверительной вероятностью*. Её величина зависит от альтернативной гипотеза H_1 (при уровне значимости 0,05 доверительная вероятность равна 0,95 и т.п.). Отсюда, опираясь на теорему суммы вероятностей противоположных событий, вытекает, что $\alpha + \beta = 1$.

Вероятности α и β удобно представить, как это сделано в таблице 2.2.1.

Таблица 2.2.1

Ошибки при проверке гипотез

	Решение	
	Принятие H_0	Принятие H_1
Справедлива H_0	Правильное с вероятностью $1 - \alpha$	Ошибочное с вероятностью α
Справедлива H_1	Ошибочное с вероятностью β	Правильное с вероятностью $1 - \beta$

Наглядным способом интерпретации ошибок является их графическое представление.

Предположим, что проверяется гипотеза H_0: $\mu = \mu_0$ о равенстве среднего значения генеральной совокупности и заданной величине μ_0.

Для этого берется выборка объема n, находится её среднее арифметическое $\bar{x}$ и по его величине судят о справедливости гипотезы H_0.

Распределение среднего арифметического $\bar{x}$ при условии, что верна гипотеза H_0, буде $f(\bar{x}/\mu_0)$. Это распределение чисто качественно представлено на рисунке 2.2.1.

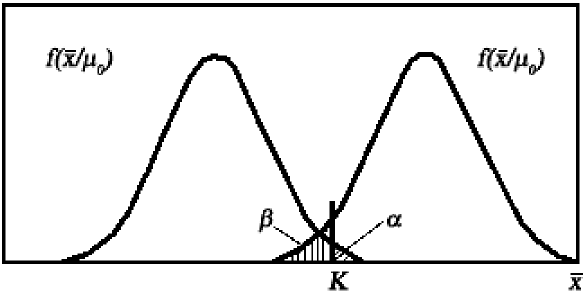


Рис. 2.2.1. Ошибки первого и второго рода

Распределение среднего арифметического $\bar{x}$ при условии, что верна альтернативная гипотеза H1: μ = μ1, будет уже другим – $f(\bar{x}/\mu_1)$.

Будем считать, что гипотеза H0 отвергается, если выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$ окажется больше некоторого значения K, т. е. $\bar{x} > K$, как показано на рисунке 2.2.1.

Область непринятия гипотезы H_0 называется *критической областью критерия.* Она показана на рисунке 2.2.1. наклонной штриховкой. Уровень значимости будет соответствовать площади критической области.

Вероятность ошибки второго рода β будет равна площади под кривой распределения $f(\bar{x}/\mu_1)$, показанной вертикальной штриховкой.

Величин 1 – β называется *мощностью критерия,* т.е. вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

При этом необходимо помнить, что единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода при доказательстве гипотез состоит в увеличении объема выборок.

Следует особо подчеркнуть, что *любая гипотеза должна формулироваться, а уровень значимости α задаваться исследователем всегда до получения экспериментальных данных, по которым эта гипотеза будет проверяться*.

Отсюда следует, что как принятие, так и отклонение гипотезы осуществляется на основе определенного критерия. *Статистическим критерием* называют правило, обеспечивающее принятие истинной или отклонение ложной гипотезы с заранее заданной вероятностью.

Таким образом, систематизирую все сказанное, запишем основные этапы проверки гипотезы:

1. Формулировка гипотезы (нуль-гипотезы), которую в дальнейшем необходимо принять или отклонить.
2. Выбор уровня значимости.
3. Определение выборочного значения статистических характеристик (на основе измерения или наблюдения выборочной совокупности).
4. Выбор критерия для проверки статистической гипотезы.
5. Сравнение расчетного значения с критическим значением критерия для выбранного уровня значимости и принятие или отклонение гипотезы.

Критерии значимости.

Методы, с помощью которых для каждой выборки формально точно определяются, удовлетворяют ли выборочные данные нулевой гипотезе или нет, называются *критериями значимости*.

Процедура проверки гипотез обычно сводится к тому, что по выборочным данным вычисляется значение некоторой величины, называемой *статистикой критерия*, или просто *критерием*, который имеет известное стандартное распределение (нормальное, t-распределение Стьюдента и т. п.). Найденное значение критерия сравнивается с критическим (граничным) значением критерия, взятым из соответствующих таблиц, и по результатам сравнения делается вывод: принять гипотезу или отвергнуть.

Если вычисленное по выборке значение критерия не превосходит граничного значения, то гипотеза H_0 принимается на заданном уровне значимости α. В этом случае наблюдаемое по экспериментальным данным различие генеральных совокупностей можно объяснить только случайностью выборки. Однако принятие гипотезы H_0 совсем не означает доказательства равенства параметров генеральных совокупностей. Просто имеющийся в распоряжении статистический материал не дает оснований для отклонения гипотезы о том, что эти параметры одинаковы. Возможно, появится другой экспериментальный материал, на основании которого эта гипотеза будет отклонена.

Когда вычисленное значение критерия оказывается больше граничного (критического) значения при заданном уровне значимости α, то наблюдаемое различие генеральных совокупностей уже нельзя объяснить только случайностями. В этом случае гипотеза H_0 отклоняется в пользу гипотезы H_1 при данном уровне значимости α, и говорят, что наблюдаемое различие *значимо* (*статистически значимо*) на уровне значимости α.

Следует подчеркнуть разницу между *статистической значимостью* и *практической значимостью*. Заключение о практической значимости всегда делается человеком, изучающим данное явление. И здесь истинным критерием является опыт и интуиция исследователя, а *статистические критерии значимости – лишь формально точный инструмент, используемый в исследовании.* Чем больше исследователь знает об изучаемом явлении, тем точнее будет сформулированная им гипотеза, и тем точнее будут выводы, сделанные с помощью критериев значимости.

Ранее уже подчеркивалось, что уровень значимости α должен выбираться исследователем до получения экспериментальных данных, по которым будет проверяться гипотеза. Но часто с предварительным выбором возникают затруднения. Обычно говорят, что для научных исследований (в том числе и в спорте) достаточен уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, но если выводы, которые предстоит сделать по результатам проверки гипотез, связаны с большой ответственностью, то рекомендуется выбирать $\alpha = 0{,}01$ или $\alpha = 0{,}001$.

Критерии значимости подразделяются на три типа:

1. Критерии значимости, которые служат для проверки гипотез о параметрах распределений генеральной совокупности (чаще всего нормального распределения). Эти критерии называются *параметрическими*.

2. Критерии, которые для проверки гипотез не используют предположений о распределении генеральной совокупности. Эти критерии не требуют знания параметров распределений, поэтому называются *непараметрическими.*

3. Особую группу критериев составляют *критерии согласия*, служащие для проверки гипотез о согласии распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка, с ранее принятой теоретической моделью (чаще всего нормальным распределением).

В спортивной практике при проведении исследований необходимо также учитывать, что различия сравниваемых параметров может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому, выбирая критерии значимости, необходимо учитывать тот факт, что ни могут быть двусторонними и односторонними.

Если цель исследования состоит в том, чтобы выявить различие параметров двух генеральных совокупностей, и при этом часто неизвестно, какой из этих параметров будет больше, а какой меньше, то применяется *двусторонняя* гипотеза, допускающая, что различие может быть любого знака. При этом нулевая гипотеза состоит в том, что дисперсии совокупностей равны между собой ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$), а цель – исследования доказать наличие различия между дисперсиями ($H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

Если же цель исследования состоит в том, чтобы доказать увеличение или уменьшение отдельного параметра (например, средний результат в экспериментальной группе выше, чем в контрольной), и при этом не допускается, что различие может быть другого знака, то применяются односторонние гипотезы. При этом альтернативная гипотеза $H_1: \mu_2 > \mu_1$ (или $H_1: \mu_2 < \mu_1$), а обратное ей утверждение $H_0: \mu_2 \leq \mu_1$ (или$H_0: \mu_2 \geq \mu_1$).

Критерии значимости, служащие для проверки двусторонних гипотез, называются *двусторонними*, а для односторонних – *односторонними*.

При этом необходимо помнить, что *ни в коем случае нельзя выбирать тот или иной критерий после проведения эксперимента на основе анализа экспериментальных данных, поскольку это может привести к неверным выводам*. И если имеются основания для применения одностороннего критерия, его следует предпочесть двустороннему, потому что односторонний критерий полнее использует информацию об изучаемом явлении и поэтому чаще дает правильные результаты.

Критерии, основанные на нормальном распределении.

Сравнение двух выборочных средних. t-критерия Стьюдента

Из параметрических критериев при сравнении средних величин главным образом применяется *t*-критерий Стьюдента.

Английский биометрик Вильям Госсет (1908), печатающий под псевдонимом Стьюдент (*Student*), исследуя закон распределения малой выборки ($n < 30$), впервые установил, что выборочная случайная величина $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ имеет непрерывную функцию распределения (для $-\infty < t < +\infty$) с плотностью, под которой понимается число случаев, приходящихся на единицу ширины классового интервала непрерывно варьирующего признака (отношение частоты данного интервала к его ширине, выраженное в единицах измерения вариант данного ряда), равной:

$$f(t) = C_{n-1}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{2.2.1}$$

где C – константа, зависящая только от числа степеней свободы n – 1.

Закон Стьюдента, в дальнейшем уточненный Р.Э. Фишером (1924), является основой "теории малой выборки". В соответствии с этим законом, если варианты генеральной совокупности распределены нормально, величина t подчиняется так называемому t-распределению, которое не зависит от параметров генеральной совокупности μ и σ, а определяется только числом степеней свободы $f = n - 1$. С увеличением числа наблюдений, t-распределение быстро приближается к нормальному.

Более наглядное представление о t-распределении дает рисунок 2.2.2, где на фоне нормальной кривой нанесена (более плоская) кривая t-распределения при $n = 3$.

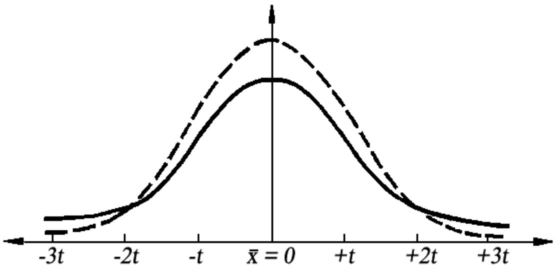


Рис. 2.2.2. T-критерий распределения при $n = 3$
(на фоне кривой нормальной кривой)

Отсюда следует, что t-распределение Стьюдента представляет частный случай нормального распределения, оно симметрично и отражает специфику распределения малой выборки по нормальному закону в зависимости от ее объема n.

При сравнении данных двух выборок на основании расчета t-критерия Стьюдента могут представиться следующие случаи:

Группы по объему входящих в них данных могут быть:

а) обе группы большие ($n > 30$);

б) обе группы малые ($n \leq 30$);

в) одна – большая ($n > 30$), вторая – малая ($n \leq 30$).

2. Группы по своему составу могут разделяться:

а) группы с зависимыми вариантами, когда i-тая варианта первой группы сравнивается с i-той вариантой второй группы (сравнение результатов повторных тестирований одной и той же выборки, $n_x = n_y$) ;

б) группы с независимыми вариантами (можно менять варианты местами внутри выборки, т.е. данные тестирования по одному и тому же показателю у разных групп).

Исходя из таких условий, задачи могут быть трех типов: сравнение двух больших (или одной большой, одной малой) групп с независимыми вариантами, сравнение двух малых групп с независимыми вариантами и сравнение двух малых или больших групп с зависимыми вариантами.

Здесь еще необходимо учесть, что при применении методов сравнения, основанных на расчете t-критерия, необходимо производить расчет числа степеней свободы. *Под числом степеней свободы понимают разность между числом измеряемых (наблюдаемых) значений и числом линейных отношений (связей), возникающих между ними*. Это понятие также было более полно раскрыто Стьюдентом. Расчет степеней свободы производится по формуле:

$$k = n_x + n_y - 2, \qquad (2.2.2)$$

где n_x – объем выборки X; n_y – объем выборки Y.

Число степеней свободы необходимо при сравнении расчетного значения критерия с критическим (граничным) значением из статистических таблиц. При этом необходимо помнить, что все статистические таблицы содержат данные для различного числа степеней свободы. Поэтому при использовании каждого критерия надо правильно определять число степеней свободы.

При *сравнении двух больших (или одной большой, одной малой) групп с независимыми вариантами* применяется расчет t-критерия Стьюдента, основанный на предположении, что обе выборки, у которых наблюдаются различия в значениях средних величин, получены из одной генеральной совокупности, имеющей приближенно нормальное распределение, и, следовательно, значимо они не отличаются друг от друга. Сравнение проводится по формуле:

$$t = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{m_{\bar{x}}^2+m_{\bar{y}}^2}}, \qquad (2.2.3),$$

где $\bar{x}, \bar{y}$– величины средних выборок X и Y;

$m_{\bar{x}}, m_{\bar{y}}$ – стандартные ошибки средних выборок X и Y.

После того, как произведено вычисление значения t-критерия ($t_{фак}$), его необходимо сравнить с критическим значением (t_{st}). Для этого пользуются таблицей теоретического t-распределения Стьюдента (прил. 1) при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы k. При этом если расчетное значение t-критерия меньше минимального табличного значения ($t_{фак} < t_{st}$), то выборочные средние не различаются на уровне значимости α. В противном случае ($t_{фак} \geq t_{st}$) различие статистически значимо и необходимо отвергнуть предположение о том, что выборки взяты из одной генеральной совокупности.

Пример 2.2.1. При проведении тестирования школьников одной из школ краснодарского края необходимо было выявить, существуют ли возрастные различия в показателях ЖЕЛ у учащихся 11 и 12 лет. Предварительный расчет показал, что в группе X (школьники 11 лет) среднегрупповой показатель ЖЕЛ был равен 2484 мл ($n_x = 60$), а в группе Y (школьниики 12 лет) он составил 2696 мл ($n_y = 62$), а стандартные ошибки средних значений были следующие: $m_x = \pm 37{,}7$ мл, $m_y = \pm 51{,}7$ мл.

Решение.

1. На основании данных средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x} = 2484$ мл < $\bar{y} = 2696$ мл, то предположим, что показатели ЖЕЛ ниже в группе X (ученики 11 лет), чем в группе Y (ученики 12 лет).

2. Сравнение данных выборок произведем, используя расчет t-критерия по формуле (9.3), предположив, что распределение результатов тестирования школьников по показателям ЖЕЛ в выборках с большими объемами (n >30) подчиняется закону нормального распределения:

Тогда $t = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{m_{\bar{x}}^2+m_{\bar{y}}^2}} = \frac{|2484-2696|}{\sqrt{1421{,}29+2672{,}89}} \approx \frac{212}{63{,}99} \approx 3{,}31.$

3. Число степеней свободы в соответствии с формулой (2.2.2) равно:

$$k = n_x + n_y - 2 = 60 + 62 - 2 = 120.$$

4. Сравниваем полученное значение t-критерия с табличным значением (прилож. 1) для $k = 120$. При $\beta = 99\%$ – $t_{st} = 2{,}62$, а при $\beta = 99{,}9\%$ – $t_{st} = 3{,}37$. Полученный показатель выше второго порога доверительной вероятности, но ниже третьего.

Вывод: т.к. $t_ф = 3{,}31 > t_{st} = 2{,}62$, то различия в показателях ЖЕЛ у школьников 11 и 12 лет достоверны по второму порогу доверительной вероятности ($\beta = 99\%$).

Пример 2.2.2. Данные психофизиологическое тестирование учеников одной из школ показали, что средний показатель времени ответа на каждый вопрос компьютерного теста в группе X ($n_x = 50$) составил 457 мс, а в группе Y он был равен 441 мс ($n_y = 54$). Стандартные ошибки средних значений были следующие: $m_x = \pm$ 6,6 мс, $m_y = \pm$ 6,8 мс. Необходимо определить достоверность различий между группами в показателях времени ответа при компьютерном тестировании.

Решение.

1. На основании данных средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x} = 457$ мс $> \bar{y} = 441$ мс, то предположим, что в группе X показатели времени ответа на каждый вопрос выше, чем в группе Y.

2. Сравнение данных выборок произведем, используя расчет t-критерия по формуле (9.3) предположив, что распределение результатов времени ответа на каждый вопрос компьютерного тестирования в выборках с большими объемами (n >30) было нормальное:

Тогда $t = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{m_{\bar{x}}^2+m_{\bar{y}}^2}} = \frac{|457-441|}{\sqrt{43{,}56+46{,}24}} \approx \frac{16}{9{,}48} \approx 1{,}68.$

3. Число степеней свободы в соответствии с формулой (2.2.2) равно:

$$k = n_x + n_y - 2 = 50 + 54 - 2 = 102.$$

4. Сравниваем полученное значение t-критерия с табличным значением (прилож. 1) для $k = 100$. При этом полученный показатель меньше минимального табличного значения $t_{st} = 1{,}98$ для $\beta = 95\%$.

Вывод: т.к. $t_ф = 1{,}68 < t_{st} = 1{,}98$ для k = 100 при $\beta = 99\%$, то различия в показателях у школьников 11 и 12 лет достоверны по второму порогу доверительной вероятности.

При *сравнении двух малых групп с независимыми вариантами* расчет t-критерия Стьюдента также основан на предположении, что обе выборки, у которых наблюдаются различия в значениях средних величин, достоверно не различаются, если они получены из одной генеральной совокупности. Сравнение проводится по формуле:

$$t = \frac{|\bar{x}-\bar{y}| \cdot \sqrt{n_x \cdot n_y \cdot (n_x+n_y-2)}}{\sqrt{[\ \sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2] \cdot (n_x+n_y)}}. \qquad (2.2.4)$$

После того как произведен расчет t-критерия Стьюдента и числа степеней свободы по формуле (2.2.1), из таблицы t-критерия Стьюдента (прилож. 1) находится критическое значение t-критерия для трех порогов доверительной вероятности β и уровней значимости α. В случае, если расчетное значение t-критерия меньше минимального значения из таблицы ($t_ф < t_{st}$), то различия между данными двух выборок нельзя считать достоверными, это предположение ошибочно, т. е. выборки примерно одинаковы по избранному показателю. Если же $t_ф \geq t_{st}$, т. е. расчетная величина t-критерия соответствует табличным данным или выше их, то говорят о достоверности различий при определенной степени доверительной вероятности β (или уровне значимости α) и числе степеней свободы k.

Пример 2.2.3. Проведено измерение показателей роста у двух групп исследуемых. Определить достоверность различий методом Стьюдента в полученных результатах, если данные выборок таковы:

x_i, см ~ 176; 180; 187; 172; 175; 190; 170; 191 (n_x = 8);

y_i, см ~ 180; 170; 162; 168; 165; 173; 175; 183; 180; 169 (n_y = 10).

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и делаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$
176	-4	16	180	8	64
180	0	0	170	-2	4
187	7	49	162	-10	100
172	-8	64	168	-4	16
175	-5	25	165	-7	49
190	10	100	173	1	1
170	-10	100	175	3	9
191	11	121	183	11	121
			180	8	64
			169	-3	9
$\bar{x}$ = 180		$\sum(x_i-\bar{x})^2$= 475	$\bar{y}$ = 172		$\sum(y_i-\bar{y})^2$ = 437

На основании расчета средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x} = 180$см > $\bar{y} = 172$ см, то предположим, что в группе X исследуемые более высокорослы, чем группы Y.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом величины t-критерия Стьюдента, используя формулу (2.2.4):

$$t_ф = \frac{|180-172| \cdot \sqrt{8 \cdot 10 \cdot (8+10-2)}}{\sqrt{(475+437) \cdot (8+10)}} = \frac{8 \cdot \sqrt{1280}}{\sqrt{72960}} \approx \frac{8 \cdot 35{,}78}{270{,}11} \approx 1{,}06$$

4. Рассчитаем число степеней свободы по формуле (2.2.2):

$$k = n_x + n_y - 2 = 8 + 10 - 2 = 16.$$

5. Сравнить расчетное значение t-критерия ($t_ф$ = 1,06) с табличным значением для k = 16 при α = 5% (β = 95%) (прилож. 1) и сделаем вывод.

***Вывод**:* т.к. $t_ф$ = 1,06 < t_{st} = 2,12 для k = 16 при β = 95%, то различия в показателях роста двух групп исследуемых недостоверны, т.е. по данному параметру они примерно равные.

Пример 2.2.4. Проведено тестирование двух групп легкоатлетов в беге на 800 м. Определить достоверность различий методом Стьюдента в полученных результатах, если данные выборок таковы:

x_i, с ~ 117,0; 118,5; 120,0; 122,0; 120,0; 124,0; 124,5; 120,5; 121,0; 121,0; 122,0; 123,5; 123,5 (n_x = 13).

y_i, с ~ 120,5; 122,0; 125,5; 126,0; 123,5; 129,5; 131,0; 124,0; 126,0; 125,0; 127,0; 129,0; 130,5 (n_y = 13).

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и делаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
117,0	-4,3	18,49	120,5	-5,6	31,36
118,5	-2,8	7,84	122,0	-4,1	16,81
120,0	-1,3	1,69	125,5	-0,6	0,36
122,0	0,7	0,49	126,0	-0,1	0,01
120,0	-1,3	1,69	123,5	-2,6	6,76
124,0	2,7	7,29	129,5	3,4	11,56
124,5	3,2	10,24	131,0	4,9	24,01
120,5	-0,8	0,64	124,0	-2,1	4,41
121,0	-0,3	0,09	126,0	-0,1	0,01
121,0	-0,3	0,09	125,0	-1,1	1,21
122,0	0,7	0,49	127,0	0,9	0,81
123,5	2,2	4,84	129,0	2,9	8,41
123,5	2,2	4,84	130,5	4,4	19,36
$\bar{x}$ = 121,3		$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 58,72	$\bar{y}$ = 126,1		$\sum(y_i - \bar{y})^2$ = 125,08

2. На основании расчета средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

***Рабочая гипотеза**:* т.к. $\bar{x} = 121{,}3$ с < $\bar{y} = 126{,}1$ с, то предположим, что исследуемые группы X показали более высокие результаты в беге на 800 м, чем группы Y.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом величины t-критерия Стьюдента, используя формулу (2.2.4).

$$t_ф = \frac{|121{,}3 - 126{,}1| \cdot \sqrt{13 \cdot 13 \cdot (13 + 13 - 2)}}{\sqrt{(58{,}72 + 125{,}08) \cdot (13 + 13)}} = \frac{4{,}8 \cdot \sqrt{4056}}{\sqrt{4778{,}8}} \approx \frac{4{,}8 \cdot 63{,}69}{69{,}13} \approx 4{,}42.$$

Рассчитаем число степеней свободы по формуле (2.2.2):

$$k = n_x + n_y - 2 = 13 + 13 - 2 = 24.$$

5. Сравним расчетное значение t-критерия ($t_ф$ = 4,42) с табличным значением для k = 24 при α = 0,1% (β = 99,9%) (прилож. 1) и сделать вывод.

Вывод: т.к. $t_ф$ = 4,42 > t_{st} = 3,75 для k = 24 при α = 0,1%, то с уверенностью β = 99,9% можно говорить о том, что различия результатов в беге на 800 м у двух групп исследуемых достоверны, т.е. в группе X данный показатель выше, чем в группе Y.

В спорте часто на одних и тех же спортсменах проводится измерение через некоторое время (до и после тренировочного занятия, до и после этапа тренировки и т.п.). При этом стараются определить, изменилось ли состояние спортсменов. В таких случаях *выборки всегда равночисленны* ($n_x = n_y$), а все измерения могут быть объединены в пары (каждая пара – это результаты измерений на одном человеке в начале и конце эксперимента). Подобные выборки называют *связанными (или коррелированными)*: между данными первого и второго измерения может быть корреляция.

При *сравнении двух малых групп с зависимыми вариантами* методом Стьюдента расчет t-критерия проводится по формуле:

$$t = \frac{|\bar{z}| \cdot \sqrt{n \cdot (n-1)}}{\sqrt{\sum (z_i - \bar{z})^2}}, \qquad (2.2.5)$$

где $z_i = x_i - y_i$; $\left|\bar{z}\right| = \left|\bar{x} - \bar{y}\right|$; n – число испытуемых.

Расчет числа степеней свободы в данном случае, т. к. $n_x = n_y$, производится по формуле:

$$k = 2 \cdot (n - 1). \qquad (2.2.6)$$

После того как произведен расчет t-критерия Стьюдента и числа степеней свободы, из таблицы t-критерия Стьюдента (прилож. 1) находится критическое значение t-критерия для трех порогов доверительной вероятности β и уровней значимости α. Если $t_ф < t_{st}$ (минимального значения из таблицы), то между данными двух выборок не наблюдается достоверности различий, то есть они примерно равные по данному показателю, и, следовательно, предложение о различиях в показателях выборок оказывается ошибочным. Если же $t_ф \geq t_{st}$, т. е. расчетная величина t-критерия соответствует табличным данным или выше их, то говорят о достоверности различий при определенной степени доверительной вероятности.

Пример 2.2.5. С помощью метода Стьюдента определить достоверность различий в показателях роста у 11 учеников первого класса, проведенных в начале и конце учебного года, если данные выборок таковы:

Начало года: x_i, см ~ 136; 130; 127; 132; 125; 138; 120; 131; 118; 123; 128.

Конец года: y_i, см ~ 139; 135; 131; 136; 128; 142; 125; 135; 122; 124; 132.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

X_i	y_i	$z_i = (x_i - y_i)$	$(z_i - \bar{z})$	$(z_i - \bar{z})^2$
136	139	-3	-3 + 4 = 1	1
130	135	-5	-5 + 4 = -1	1
127	131	-4	-4 + 4 = 0	0
132	136	-4	-4 + 4 = 0	0
125	128	-3	-3 + 4 = 1	1
138	142	-4	-4 + 4 = 0	0
120	125	-5	-5 + 4 = -1	1
131	135	-4	-4 + 4 = 0	0
118	122	-4	-4 + 4 = 0	0
123	124	-1	-1 + 4 = 3	9
128	132	-4	-4 + 4 = 0	0
$\bar{x}$ =128	$\bar{y}$ =132	$\bar{z}$ =-4		$\sum (z_i - \bar{z})^2$ =13

2. На основании расчета средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x}$ =128 см < $\bar{y}$ =132 см, то предположим, что в течение учебного года у исследуемых наблюдается достоверное увеличение показателей роста.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом величины *t*-критерия Стьюдента, используя формулу (2.2.5).

$$t = \frac{|\bar{z}| \cdot \sqrt{n \cdot (n-1)}}{\sqrt{\sum(z_i - \bar{z})^2}} = \frac{|-4| \cdot \sqrt{11 \cdot (11-1)}}{\sqrt{13}} \approx \frac{4 \cdot \sqrt{110}}{3{,}61} \approx 11{,}62.$$

4. Рассчитать число степеней свободы по формуле (2.2.6):

$$k = 2 \cdot (n - 1) = 2 \cdot (11\text{-}1) = 20.$$

5. Сравним расчетное значение *t*-критерия ($t_ф$ = 11,62) с табличным значением для k = 20 при α = 0,1% (β = 99,9%) (прилож. 1) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $t_ф$ = 11,62 > t_{st} = 3,85 для k = 20 при α = 0,1%, то с уверенностью β = 99,9% можно говорить о том, что различия в показателях роста у исследуемых школьников в начале и конце учебного года достоверны.

Пример 2.2.6. Проведено измерение показателей кистевой динамометрии правой и левой рук у 9 исследуемых. Определить достоверность различий методом Стьюдента в полученных результатах, если данные выборок таковы:

Правая рука: x_i , кГ ~ 36; 29; 38; 35; 39; 42; 37; 38; 39.

Левая рука: y_i, кГ ~ 30; 32; 38; 26; 43; 35; 30; 32; 40.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	y_i	$z_i = (x_i - y_i)$	$(z_i - \bar{z})$	$(z_i - \bar{z})^2$
36	30	6	3	9
29	32	-3	-6	36
38	38	0	-3	9
35	26	9	6	36
39	43	-4	-7	49
42	35	7	4	16
37	30	7	4	16
38	32	6	3	9
39	40	-1	-4	16
$\bar{x}$ =37	$\bar{y}$ =34	$\bar{z}$ =3		$\sum(z_i - \bar{z})^2$ =196

2. На основании расчета средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x}$ =37 кГ > $\bar{y}$ =34 кГ, то предположим, что у исследуемых выше показатели кистевой динамометрии правой руки, чем левой.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом величины *t*-критерия Стьюдента, используя формулу (2.2.5):

$$t = \frac{|\bar{z}| \cdot \sqrt{n \cdot (n-1)}}{\sqrt{\sum(z_i - \bar{z})^2}} = \frac{|3| \cdot \sqrt{9 \cdot (9-1)}}{\sqrt{196}} = \frac{3 \cdot \sqrt{72}}{14} \approx 1{,}82.$$

4. Рассчитаем число степеней свободы по формуле (2.2.6):

$$k = 2 \cdot (n - 1) = 2 \cdot (9 - 1) = 16.$$

5. Сравниваем расчетное значение t-критерия ($t_ф$ = 1,82) с табличным значением для k = 16 при α = 5% (β = 95%) (прилож. 1) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $t_ф$ = 1,82 < t_{st} = 2,12 для k = 16 при β = 95%, то можно говорить о том, что различия в показателях кистевой динамометрии правой и левой рук у исследуемой группы недостоверны.

Сравнение двух выборочных дисперсий из нормальных совокупностей. F-критерий Фишера-Снедекора.

Для проверки гипотезы о равенстве генеральных дисперсий t-критерий оказывается недостаточно точным, особенно на малочисленных выборках. В поисках лучшего критерия Р.Э. Фишер нашел, что если две независимые выборки получены из генеральных совокупностей X и Y с одинаковыми дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2, то при доказательстве предположения о том, что обе выборки независимы и получены из нормально распределенных генеральных совокупностей, вместо разности $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ лучше взять разность натуральных логарифмов этих величин ($ln\sigma_x^2 - ln\sigma_{y1}^2$), где $\sigma_x^2 \geq$ $\geq \sigma_y^2$, то эта величина, обозначенная через Z, распределяется нормально не только при наличии больших, но и среднего объема совокупностей. При вычислении Z вместо натуральных логарифмов можно использовать десятичные логарифмы, имея в виду, что Z = 2,3036($lg\sigma_x^2 - lg\sigma_y^2$), или Z = = 2,3026 · $lg\sigma_x^2 / \sigma_y^2$, а также Z = 1,1513 · $lg\sigma_x^2 / \sigma_y^2$, где $\sigma_x^2 \geq \sigma_y^2$.

Д. Снедекор предложил вместо логарифма отношений использовать отношение выборочных дисперсий F (*F-критерий или критерий Фишера-Снедекора*):

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}. \qquad (2.2.7)$$

Критерий F функционально связан с вероятностью, он имеет непрерывную функцию распределения и зависит только от чисел степеней свободы: $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$ сравниваемых дисперсий. Характерным для F оказывается то, что он полностью определяется выборочными дисперсиями и не зависит от генеральных параметров, так как предполагается, что обе дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 из одной и той же генеральной совокупности. Поэтому при $k \to \infty$ отношение $\sigma_x^2/\sigma_y^2 \to 1$. График плотности вероятности F распределения для k_1 и k_2 и критических границ F_1 и F_2 приводится на рисунке 2.2.3. Видно, что распределение F при небольшом объеме выборки n имеет асимметричную форму, которая по мере увеличения числа испытаний ($n \to \infty$) приближается к нормальной кривой.

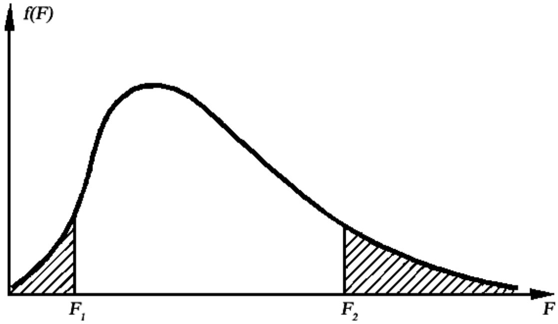


Рис. 2.2.3. График плотности вероятности F-распределения для типичных значений k_1 и k_2 числа степеней свободы и критические границы F_1 и F_2.

Закономерность функции $F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ для двух уровней значимости $p_1 = 0{,}05$ и $p_2 = 0{,}01$ и соответствующих степеней свободы k_1 и k_2 табулирована в виде критических (стандартных) значений критерия F (прил. 2). В этой таблице степени свободы для большей дисперсии берутся по горизонтали (верхняя строка), а по вертикали (первая графа) – степени свободы для меньшей дисперсии. При этом всегда берется отношение большей дисперсии (σ_x^2) к меньшей (σ_y^2), поэтому $F \geq 1$. В случае равенства значений дисперсий ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$), величина F-критерия равна единице (F = 1). Чем значительнее расхождение между выборочными дисперсиями, тем больше будет величина F-критерия, и, наоборот, чем меньше разница между дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2, тем меньше окажется величина F-критерия. Нулевая гипотеза исходит из признания равенства дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Если эмпирические значения критерия Фишера ($F_ф$) меньше теоретических, указанных в таблице (F_{st}) для соответствующего уровня значимости и степеней свободы k_1 и k_2 (прилож. 2), они рассматриваются как случайные, различия между выборками не достоверны, т. е. они принадлежат к одной генеральной совокупности. Если же $F_ф \geq F_{st}$, нулевая гипотеза отвергается, разница между сравниваемыми величинами признается статистически достоверной, т. е. выборки взяты из разных совокупностей.

Пример 2.2.7. Проведено измерение результатов в беге на 30 м у двух групп исследуемых. Определить с помощью метода Фишера, являются ли полученные показатели выборками из одной генеральной совокупно, если данные таковы:

x_i, с ~ 6,4; 6,6; 6,2; 6,1; 6,5; 6,3; 6,0; 6,2; 6,4; 6,5; 6,3; 7,4; 5,9; 6,8 (n_x = 14);

y_i, с ~ 6,1; 5,8; 5,9; 6,0; 5,9; 5,7; 5,9; 6,0; 6,1; 5,9; 6,7 (n_y = 11).

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
6,4	0	0	6,1	0,1	0,01
6,6	0,2	0,04	5,8	-0,2	0,04
6,2	-0,2	0,04	5,9	-0,1	0,01
6,1	-0,3	0,09	6,0	0	0
6,5	0,1	0,01	5,9	-0,1	0,01
6,3	-0,1	0,01	5,7	-0,3	0,09
6,0	-0,4	0,16	5,9	-0,1	0,01
6,2	-0,2	0,04	6,0	0	0
6,4	0	0	6,1	0,1	0,01
6,5	0,1	0,01	5,9	-0,1	0,01
6,3	-0,1	0,01	6,7	0,7	0,49
7,4	1,0	1,00			
5,9	-0,5	0,25			
6,8	0,4	0,16			
$\bar{x}$ = 6,4		$\sum(x_i - \bar{x})^2$= 1,82	$\bar{y}$ = 6,0		$\sum(y_i - \bar{y})^2$ = 0,68

2. На основании расчета средних величин выборок выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x}$ = 6,4 с > $\bar{y}$ = 6,0 с, то предположим, что результаты в беге на 30 м в группе Y выше, чем в группе X, и выборки взяты из разных генеральных совокупностей.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом F-критерия Фишера по формуле (2.2.7), рассчитав величины дисперсий выборок x и y:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{1,82}{13} \approx 0,14; \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{0,68}{10} \approx 0,07.$$

Тогда, т.к. $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$, то $F_{\text{ф}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{0,14}{0,07} = 2,00.$

4. Рассчитаем число степеней свободы для выборок x и y как

$k_1 = n_x - 1 = 14 - 1 = 13$ и $k_2 = n_y - 1 = 11 - 1 = 10$.

5. Сравним расчетное значение F-критерия ($F_{ф}$ = 2,0) с табличным значением для k_1 = 13 и k_2 = 10 при α = 5% (прилож. 2) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $F_{ф} = 2 < F_{st} = 2,89$ для k_1 = 13 и k_2 = 10 при α = 5%, то различия результатов в беге на 30 м в исследуемых группах недостоверны, а, следовательно, выборки взяты из одной генеральной совокупности.

Пример 2.2.8. Проведено измерение показателей ЖЕЛ у двух групп школьников 13-14 лет. Определить с помощью метода Фишера, являются ли полученные показатели выборками из одной генеральной совокупно, если данные таковы:

x_i, мл ~ 2200; 2700; 2700; 2700; 2400; 2600; 2700; 2300; 2400; 2500; 3000; 2200; 2300; 2500; 2600; 2400; 2300; 2700 (n_x = 18).

y_i , мл ~ 3400; 2400; 2700; 2500; 2600; 2900; 2800; 3200; 2300; 3300; 3300; 2900; 3400; 2100; 2100; 2500; 3200 (n_y = 17);

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$
2200	-300	90000	3400	600	360000
2700	200	40000	2400	-400	160000
2700	200	40000	2700	-100	10000
2700	200	40000	2500	-300	90000
2400	-100	10000	2600	-200	40000
2600	100	10000	2900	100	10000
2700	200	40000	2800	0	0
2300	-200	40000	3200	400	160000
2400	-100	10000	2300	-500	250000
2500	0	0	3300	500	250000
3000	500	250000	3300	500	250000
2200	-300	90000	2900	100	10000
2300	-200	40000	3400	600	360000
2500	0	0	2100	-700	490000
2600	100	10000	2100	-700	490000
2400	-100	10000	2500	-300	90000
2300	-200	40000	3200	400	160000
2700	200	40000			
$\bar{x} = 2500$		$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 800000$	$\bar{y} = 2800$		$\sum(y_i - \bar{y})^2 = 3180000$

2. На основании расчета средних величин выборок выдвинем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $\bar{x} = 2500$ мл $< \bar{y} = 2800$ мл, то предположим, что показатели ЖЕЛ в группе *Y* выше, чем группе *X*, и выборки взяты из разных генеральных совокупностей.

3. Подтвердим выдвинутое предположение расчетом *F*-критерия Фишера по формуле (2.2.7), рассчитав величины дисперсий выборок *x* и *y*:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{800000}{17} \approx 47058{,}8; \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{3180000}{16} = 198750.$$

Тогда, т.к. $\sigma_y^2 > \sigma_x^2$, то $F_ф = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{198750}{47058{,}8} \approx 4{,}22.$

4. Рассчитаем число степеней свободы для выборок *x* и *y* как

$$k_1 = n_y - 1 = 18 - 1 = 17 \text{ и } k_2 = n_x - 1 = 17 - 1 = 16.$$

5. Сравним расчетное значение *F*-критерия ($F_ф = 4{,}22$) с табличным значением для $k_1 = 17$ и $k_2 = 16$ при $\alpha = 1\%$ (прилож. 2) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $F_ф = 4{,}22 > F_{st} = 3{,}34$ для $k_1 = 17$ и $k_2 = 16$ при $\alpha = 1\%$, то различия в показателях ЖЕЛ у двух групп исследуемых достоверны с уверенностью $\beta = 99\%$, а, следовательно, выборки взяты из разных генеральных совокупностей.

Непараметрические критерии.

Применение параметрических критериев было связано с целым рядом допущений. Например, сравнивая выборочные средние значения с помощью *t*-критерия, принимались следующие предположения: обе выборки являются случайными, т.е. каждая из них получена в результате измерений; обе выборки получены из генеральных совокупностей, имеющих нормальное распределение; дисперсии генеральных совокупностей равны между собой.

На практике эти предположения строго никогда не выполняются, поэтому применение параметрических критериев всегда связано с опасностью ошибочных выводов, возникающих из-за нарушения принятых допущений. В последнее время в математической статистике по этой причине интенсивно разрабатываются непараметрические методы, которые строятся так, чтобы их применение зависело от возможно меньшего числа допущений.

Отметим в связи с этим еще одно важное обстоятельство. Параметрические критерии значимости применимы только для сравнения выборочных данных, представляющих собой результаты измерений, выраженных в единицах метрических шкал (метры, килограммы, секунды и т.д.). Но в спортивных исследованиях часто приходится иметь дело с данными, выраженными в шкалах наименований или порядка, например произвольная нумерация игроков футбольной команды, места, занятые спортсменами на соревнованиях и т.д. Такие данные нельзя сравнивать с помощью параметрических критериев, а непараметрические критерии могут быть успешно применены и к данным этого типа.

Если рассматривать только те случаи, когда выборки можно считать полученными из нормально распределенных совокупностей, непараметрические критерии всегда проигрывают соответствующим параметрическим критериям, оптимальным в этих случаях, потому что применение непараметрических критериев обычно связано с потерей части информации об измеренных значениях признаков. Поэтому вводится показатель *эффективности критерия (Е)*. Он представляет собой отношение объема выборки параметрического критерия к объему выборки непараметрического критерия при одинаковой мощности критериев в условиях нормального распределения генеральной совокупности. Этим показателем и принято оценивать эффективность непараметрических критериев.

Важную группу непараметрических критериев составляют *ранговые критерии.* Они хорошо разработаны, и эффективность их оказывается очень высокой (для большинства из них при больших объемах выборки эффективность близка к единице). В то же время они просты в пользовании и не требуют сложных математических вычислений.

Рассмотрим некоторые из ранговых критериев.

Ранговый Т-критерий Уайта.

Одним из критериев, применяемых для установления достоверности различий, при сравнении двух независимых распределений, является непараметрический критерий Т Уайта, который в равной мере применим к выборкам равновеликого и неодинакового объема.

Сущность методики, лежащей в основе применения этого критерия, следующая. Все члены сравниваемых выборок располагаются в возрастающем порядке в один ранжированный ряд. Затем каждой варианте присваивается порядковый номер или ранг, причем одинаковым по величине членам ряда присваивается один и тот же средний ранг. Общая сумма рангов должна быть при этом равна

$$T = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \qquad (2.2.8)$$

где $n = n_1 + n_2$ – общее число наблюдений.

Если сравниваемые выборки не отличаются друг от друга, то суммы их рангов должны быть равны между собой. В противном случае такого равенства не будет. И чем значительнее расхождение между выборками, тем больше разница между суммами их рангов. А так как эта разница может быть случайной, то ее следует оценить с помощью T-критерия Уайта, критические значения которого (T_{st}) даются в таблицах для 5% и 1% уровней значимости с учетом объемов n_1 и n_2 сравниваемых выборок (прилож. 3).

Для оценки T-критерия всегда берется меньшая из двух сумма рангов, которая сравнивается с табличным (стандартным) значением этого критерия для n_1 и n_2, т. е. объемов сравниваемых совокупностей и принятого порога доверительной вероятности. Если $T_ф < T_{st}$, это указывает на достоверность наблюдаемой разности и нулевая гипотеза о принадлежности выборок к одной генеральной совокупности несостоятельна и должна быть отвергнута. Если же $T_ф \geq T_{st}$, то нулевую гипотезу отвергнуть нельзя; разница между сравниваемыми выборками признается статистически недостоверной.

Пример 2.2.9. Две группы школьников выполняют штрафные броски по баскетбольному кольцу, учитывается число попаданий из 20 бросков. Результаты таковы:

1 группа – 7, 10, 14, 15, 12, 16, 12 $\bar{x}_1 = 12{,}3$ ($n_1 = 7$);

2 группа – 11, 12, 16, 13, 18, 15 $\bar{x}_2 = 14{,}2$ ($n_2 = 6$).

Разность средних величин составляет 1,9. Необходимо выяснить, достоверна ли она, то есть, достоверны ли различия между выборками.

Решение.

1. Результаты двух выборок, объединив в один ряд, проранжируем, подчеркнув данные первой группы:

Показатели:	<u>7</u>	<u>10</u>	11	<u>12</u>	12	<u>12</u>	13	<u>14</u>	15	<u>15</u>	16	<u>16</u>	18.
Ранги:	1	2	3	5	5	5	7	8	9,5	9,5	11,5	11,5	13

2. Подсчитываем суммы рангов выборок. Для первой групп она равна $T_1 = 42$, а для второй – $T_2 = 49$. Общая сумма рангов, рассчитанная по формуле (2.2.8), равна 13 (13+1)/2 = 91

3. Меньшую сумму рангов ($T_ф = 42$) сравним с табличным значение при 5% уровне значимости для $n_1 = 7$ и $n_2 = 6$. Табличное значение при этом равно 27 (T_{st} = 27). Сделаем вывод.

Вывод: т. к. $T_ф > T_{st}$, и нулевую гипотезу о том, что во второй группе результаты бросков лучше, отвергать нельзя. То есть различия в результатах штрафных бросков между данными двух групп достоверны по 5% уровню значимости, или с уверенностью в 95% можно говорить о том, что более результативны игроки второй группы.

Критерий Вилкоксона (W-критерий).

Критерий Вилкоксона применяется для сравнения независимых выборок, а также и сопряженных пар.

При установлении *достоверности различий между данными независимых выборок применение W-критерия Вилкоксона* основано на единственном предположении: выборки получены из однотипных непрерывных распределений. При этом вид распределения генеральных совокупностей X и Y никак не оговаривается. Допущение о непрерывности распределений может быть принято, когда исследуемый признак имеет большое число возможных градаций.

Если выдвигается утверждение о том, что функции распределения обеих генеральных совокупностей одинаковы $F(x)=F(y)$, то обе выборки получены из одной и той же генеральной совокупности, и эффект обработки отсутствует.

Поскольку функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ равны, то, следовательно, равны и характеристики положения этих распределений (среднее значение и медиана). Поэтому если эффект оценивается по различию средних арифметических двух выборок, то нулевую гипотезу можно было бы записать в виде $H_0 : \mu_x = \mu_y$. В этом случае критерий Вилкоксона является непараметрическим аналогом t-критерия для независимых выборок. Но если эмпирическое распределение получается сильно асимметричным, то среднее арифметическое теряет свою практическую ценность (оно плохо отражает среднее значение признака), и в этих случаях более подходящей характеристикой положения является медиана Me.

Одним из ценных свойств ранговых критериев является и то, что они могут применяться к данным, выраженным в шкале порядков или в шкале наименований. Для таких данных вычисление среднего арифметического не имеет смысла, а в качестве характеристики положения также используется Me. Поэтому гипотезу H_0 для непараметрических критериев обычно записывают в виде $H_0 : Me_x = Me_y$. Эта запись относится к медианам генеральных совокупностей, хотя здесь используется тот же символ Me, что и для выборочной медианы. В частном случае, когда распределение симметричное (нормальное), эта запись эквивалентна H_0: $\mu_x = \mu_y$, так как для симметричных распределений среднее значение и Me совпадают.

Альтернатива – $H_1 : Me_x \neq Me_y$ (это двусторонняя альтернатива). Ее, как обычно, применяют тогда, когда нет уверенности в знаке ожидаемого различия (допускается как положительный, так и отрицательный эффект обработки). Если нужно доказать, что, результаты в экспериментальной группе выше, чем в контрольной, то можно сформулировать и одностороннюю альтернативу, например, $H_1 : Me_y > Me_x$,

Если учесть, что сравниваемые выборки получены из однотипных непрерывных распределений, то последовательность применение W-критерия Вилкоксона будет следующей. Данные двух выборок объединят в одну и ранжируют в порядке возрастания. Отдельно рассчитывают суммы рангов первой и второй выборок (R_x и R_y). Для контроля правильности подсчета сумм рангов выборок рассчитывается общая сумма рангов по формуле:

$$R = R_x + R_y = \frac{n\cdot(n+1)}{2}, \qquad (2.2.9)$$

где n – объем объединенной выборки, равный $n_x + n_y$;

R_x и R_y – суммы рангов выборок X и Y.

Далее меньшую из сумм рангов (R_x или R_y) принимают в качестве эмпирического значения критерия ($W_ф$) и сравниваю с критическим значением

(W_{st}) критерия Вилкоксона (прилож. 4) для уровня значимости α и при объемов выборок n_1 и n_2. Если $W_ф > W_{st}$ нулевая гипотеза о принадлежности выборок к однотипным непрерывным распределениям отбрасывается, т. е. различие считается статистически значимым на уровне значимости α. В противном случае, если $W_ф \leq W_{st}$, различие статистически незначимо.

Рассмотрим применение W-критерия Вилкоксона это на конкретном примере.

Пример 2.2.10. В двух групп исследуемых произведен расчет показателей индекса Руфье. Необходимо определить наблюдаются ли различия в полученных результатах, если данные выборок таковы:

x_i, усл.ед. ~ 18,3; 10,8; 7,4; 7,8; 13,2; 6,4; 15,4; 5,4; 7,1 (n_x = 9).

y_i, усл.ед. ~ 8,8; 8,8; 2,8; 14,8; 14,2; 17,1; 7,9; 7,8; 11,9; 15,3 (n_y = 10).

Решение.

1. Производим расчет рангов и значений медиан (Me_x *и* Me_y), проранжировав данные выборок в порядке возрастания.

x_i ~ 5,4; 6,4; 7,1; 7,4; 7,8; 10,8; 13,2; 15,4; 18,3
ранги: 1 2 3 4 5 6 7 8 9
y_i ~ 2,8; 7,8; 7,9; 8,8; 8,9; 11,9; 14,2; 14,8; 15,3; 17,1
ранги: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Тогда $R_{Me_x} = \frac{9+1}{2} = 5;$ $R_{Me_y} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5;$

$$Me_x = 7{,}8; \qquad Me_y = \frac{8{,}9 + 11{,}9}{2} = 10{,}4.$$

2. ***Рабочая гипотеза*:** т.к. $Me_x = 7{,}8 < Me_y = 10{,}4$, то предположим, что полученные показатели индекса Руфье в группе X выше, чем группе Y (H_0: $Me_x < Me_y$). Выбираем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Объединяем обе выборки в одну, объем которой будет $n = n_x + n_y = 19$. Ранжируем объединенную выборку, располагая данные в порядке возрастания, и заносим в рабочую таблицу. При этом отмечаем данные, относящиеся к одной из выборок (все равно какой), например второй.

1	2	3	1	2	3
№ п/п	xi, yi	R	№ п/п	xi, yi	R
1	$\underline{2,8}$	$\underline{1}$	11	10,8	11
2	5,4	2	12	$\underline{11,9}$	$\underline{12}$
3	6,4	3	13	13,2	13
4	7,1	4	14	$\underline{14,2}$	$\underline{14}$
5	7,4	5	15	$\underline{14,8}$	$\underline{15}$
6	7,8	6,5	16	$\underline{15,3}$	$\underline{16}$
7	$\underline{7,8}$	$\underline{6,5}$	17	15,4	17
8	$\underline{7,9}$	$\underline{8}$	18	$\underline{17,1}$	$\underline{18}$
9	$\underline{8,8}$	$\underline{9}$	19	18,3	19
10	$\underline{8,9}$	$\underline{10}$			

4. Находим ранги R_i объединенной выборки. Отмечаем ранги, относящиеся ко второй выборке, подчеркиванием.

5. Производим расчет сумм рангов выборок X и Y, учитывая, что общая сумма рангов рассчитывается по формуле (2.2.9):

$$R = R_x + R_y = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190;$$

$R_x = 80{,}5$; $R_y = 109{,}5$.

6. Меньшую сумму рангов (R_x) принимаем в качестве расчетного значения W-критерия Вилкоксона.: $W_ф = R_x = 80{,}5$.

7. Из таблицы приложения 4 находим критическое значение W-критерия Вилкоксона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и при объемах выборки $n_1 = 9$ т $n_2 = 10$ (в прилож.4 n_1 и n_2 – меньший и больший объемы выборок показателей x и y), для которых Wst = 65.

Вывод: т.к. $W_ф = 80{,}5 > W_{st} = 65$ для $n_1 = 9$ и $n_2 = 10$ при $\alpha = 5\%$, следовательно, различия в показателях индекса Руфье у двух групп исследуемых достоверно значимы по первому порогу доверительной вероятности $\beta = 95\%$, т.е. данный показатель выше в группе X, чем в группе Y.

Пример 2.2.11. Проведено тестирование двух групп исследуемых в показателях становой динамометрии. Определить достоверность различий методом Вилкоксона в полученных результатах, если данные выборок таковы:

x_i, кГ ~ 140; 140; 130; 115; 120; 105; 125; 125; 140; 120 ($n_x = 10$).

y_i, кГ ~ 145; 125; 125; 105; 120; 125; 105; 130; 143; 140 ($n_y = 10$).

Решение.

1. Производим расчет рангов и значений медиан (*Me_x и Me_y),* проранжировав данные выборок в порядке возрастания:

x_i ~ 105; 115; 120; 120; 124; 126; 140; 140; 140; 140
ранги: 1 2 3,5 3,5 5 6 8,5 8,5 8,5 8,5

y_i ~ 105; 105; 120; 125; 125; 125; 130; 140; 143; 145
ранги: 1,5 1,5 3 5 5 5 7 8 9 10

Тогда $R_{Me_x} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5;$ $R_{Me_y} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5;$

$$Me_x = 125; \qquad Me_y = 125.$$

2. ***Рабочая гипотеза***: т.к. $Me_x = Me_y = 125$ кг, то предположим, что по показателям становой динамометрии группы различий не имеют (H_0: $Me_x = Me_y$). Выбираем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Объединяем обе выборки в одну, объем которой будет $n = n_x + n_y = 20$. Ранжируем объединенную выборку, располагая данные в порядке возрастания, и заносим в рабочую таблицу, отмечая данные, относящиеся ко второй выборке.

1	2	3	1	2	3
№ п/п	x_i, y_i	R	№ п/п	x_i, y_i	R
1	105	2	11	125	10
2	105	2	12	126	12
3	105	2	13	130	13
4	115	4	14	140	16
5	120	6	15	140	16
6	120	6	16	140	16
7	120	6	17	140	16
8	124	8	18	140	16
9	125	10	19	143	19
10	125	10	20	145	20

4. Находим ранги R_i объединенной выборки. Отмечаем ранги, относящиеся ко второй выборке.

5. Рассчитать суммы рангов выборок X и Y, учитывая, что общая сумма рангов рассчитывается по формуле (9.9):

$$R = R_x + R_y = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210;$$

$R_x = 108$; $R_y = 102$.

6. Меньшую сумму рангов (R_y) принимаем в качестве расчетного значения W-критерия Вилкоксона.: $W_ф = R_y = 102$.

7. Из таблицы приложения 4 находим критическое значение W-критерия Вилкоксона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и при объемах выборки $n_1 = 10$ т $n_2 = 10$ (в прилож.4 n_1 и n_2 – меньший и больший объемы выборок показателей X и Y): $W_{st} = 78$.

Вывод: т.к. $W_ф = 102 > W_{st} = 78$ для $n_1 = 10$ и $n_2 = 10$ при $\alpha = 5\%$, то у двух групп исследуемых наблюдаются достоверные различия в показателях становой динамометрии с уверенностью $\beta = 95\%$, несмотря на то что выявлено равенство в значениях медиан. Значения показателей становой динамометрии выше в группе Y, чем в группе X.

Как видно из примеров, применение критерия Вилкоксона основано на очень простых вычислениях сумм рангов. Это характерно для всех ранговых критериев. В то же время эффективность этого критерия довольно высока. Если он применяется для сравнения выборок из нормальных генеральных совокупностей, то при неограниченном увеличении объема выборок эффективность его равна 0,95. Это означает, что при $n = 1000$ критерий Вилкоксона имеет такую же мощность (т. е. с такой же вероятностью правильно обнаруживает различие), как и оптимальный для этого случая t-критерий при $n = 950$. Если же распределения несимметричны, то эффективность критерия Вилкоксона может быть и значительно больше, чем t-критерия.

В тех случаях, когда сравниваемые выборки коррелированы друг с другом, т. е. представлены рядами сопряженных попарно вариант, для оценки достоверности различий в предположении нормальности распределения разностей результатов измерений используется t-критерий для связанных выборок. Если же предположение о нормальности не делается, то наиболее часто в таких случаях применяется непараметрический критерий *W-критерий Вилкоксона для связанных выборок*, являющийся непараметрическим аналогом упомянутого t-критерия.

Нулевая гипотеза H_0 в данном случае – это утверждение о том, что распределение разностей $d_i = x_i - y_i$ связанных пар наблюдений x_i и y_i является симметричным относительно нуля. Вид распределения при этом не имеет значения. Это означает, что медиана распределения разностей (Me_d) и среднее значение (μ_d), в том случае, если оно может быть определено, равны нулю, т.е. $H_0 : Me_d = 0$.

Альтернатива $H_1 : Me_d \neq 0$ в двустороннем случае, когда допускается как положительный, так и отрицательный эффект обработки. Можно сформулировать и одностороннюю альтернативу, например, $H_1 : Me_d > 0$

Методика использования критерия Вилкоксона сводится к следующему. Сначала находятся разности между парными вариантами сопряженных рядов (d_i); при этом учитываются знаки разностей. Затем эти разности (по абсолютным величинам) ранжируют и определяют их ранги

(R_i). Ранги суммируются отдельно с положительными и отрицательными знаками. Причем, если разность между парными вариантами равна нулю, она в расчет не принимается, т. е. исключается, и число наблюдений (n) соответственно уменьшается.

Меньшая сумма рангов, независимо от знака, принимается в качестве расчетного значения критерия Вилкоксона ($W_ф$) и сравнивается с критическим, указанным в таблице (прилож. 4) для уровня значимости α и числа парных наблюдений n, которое не должно быть меньше 6. Если $W_ф < W_{st}$, т. е. табличное (стандартное) значение критерия W превышает его фактическое значение (меньшую сумму рангов), это указывает на достоверность наблюдаемых различий. В противном случае, если $W_ф \geq W_{st}$, нулевая гипотеза сохраняется и различия, наблюдаемые между рядами сопряженных вариант, признаются статистически недостоверными.

Ниже приводятся примеры использования критерия Вилкоксона.

Пример 2.2.12. В группе из 10 легкоатлетов на двух этапах годичного цикла тренировки произведена регистрация результатов в беге на 500 м. Определить достоверность различий методом Вилкоксона в полученных результатах, если данные выборок таковы:

Первый этап: x_i, с ~ 77,1; 76,8; 77,8; 80,0; 79,4; 75,9; 78,4; 76,6; 78,1; 78,9.

Второй этап: y_i, с ~ 77,0; 76,2; 78,0; 79,2; 79,4; 75,4; 78,0; 76,7; 77,9; 78,2.

Решение.

1. Полученные данные заносим в рабочую таблицу и рассчитываем разности показателей первого и второго тестирования.

№ п/п	x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$	Ранги (Rd_i)
1	77,1	77,0	0,1	3(+)
2	76,8	76,2	0,6	7(+)
3	77,8	78,0	-0,2	2(–)
4	80,0	79,2	0,8	9(+)
5	79,4	79,4	0	
6	75,9	75,4	0,5	6(+)
7	78,4	78,0	0,4	5(+)
8	76,6	76,7	-0,1	1(–)
9	78,1	77,9	0,2	4(+)
10	78,9	78,2	0,7	8(+)

2. Производим расчет разностей $d_i = x_i - y_i$, вычисляем значение медианы разностей (Me_d) и выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $Me_d = 0,4 > 0$, то предположим, что результаты в беге на 500 м на втором этапе у исследуемой группы выше, чем на первом.

3. Ранжируем разности показателей по абсолютным величинам, отбросив пары с нулевыми разностями (объем выборки теперь $n = 10 - 1 = 9$). Отмечаем ранги, относящиеся к положительным и отрицательным значениям разностей.

4. Рассчитываем суммы рангов отрицательных и положительных разностей $R(-)$ и $R(+)$,учитывая, что общая сумма рангов разностей рассчитывается по формуле (2.2.9):

$$R = R(-) + R(+) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45;$$

R(-) = 3;   *R(+)* = 42.

5. Меньшую сумму рангов *R(–)* принимаем в качестве значения *W*-критерия ($W_ф$ = 3), сравниваем с табличным значением для *n* = 10 при α = 1% (прилож. 4) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $W_ф = 3 < W_{st} = 4$ для *n* = 10 при α = 1%, то с уверенностью β = 99% можно говорить о том, что результаты в беге на 500 м у исследуемой группы достоверно выше на втором этапе тренировки, чем на первом.

Пример 2.2.13. В группе из 11 исследуемых дважды произведено измерение показателей пульса покоя. Определить достоверность различий методом Вилкоксона в полученных результатах, если данные выборок таковы:

1-е тестирование: x_i,уд/мин ~72; 64; 72; 65; 66; 67; 60; 56; 60; 62; 63.

2-е тестирование: y_i,уд/мин ~74; 64; 67; 64; 62; 60; 67; 60; 60; 60; 65.

Решение.

1. Полученные данные заносим в рабочую таблицу и рассчитываем разности показателей первого и второго тестирования.

№ п/п	x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$	Ранги (Rd_i)
1	72	74	-2	3(–)
2	64	64	0	
3	72	67	5	7(+)
4	65	64	1	1(+)
5	66	62	4	5,5(+)
6	67	60	7	8,5(+)
7	60	67	-7	8,5(–)
8	56	60	-4	5,5(–)
9	60	60	0	
10	62	60	2	3(+)
11	63	65	-2	3(–)

2. Производим расчет разностей $d_i = x_i - y_i$, вычисляем значение медианы разностей (Me_d) и выдвигаем рабочую гипотезу.

Рабочая гипотеза: т.к. $Me_d = 1 > 0$, то предположим, что в группе наблюдается различия в показателях пульса покоя при первом и втором тестировании.

3. Ранжируем разности показателей по абсолютным величинам, отбросив пары с нулевыми разностями (объем выборки теперь *n* = 11 –2 = 9). Отмечаем ранги, относящиеся к положительным и отрицательным значениям разностей.

4. Рассчитываем суммы рангов отрицательных и положительных разностей *R(–)* и *R(+)*,учитывая, что общая сумма рангов разностей рассчитывается по формуле (2.2.8):

$$R = R(-) + R(+) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45;$$

R(–) = 20;   *R(+)* = 25.

5. Меньшую сумму рангов *R(–)* принимаем в качестве значения *W*-критерия ($W_ф$ = 20), сравниваем с табличным значением для *n* = 11 при α = 5% (прилож. 4) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $W_ф = 20 > W_{st} = 12$ для *n* = 11 при α = 5%, то с уверенностью β = 95% можно говорить о том, что в группе данные первого и второго тестирования показателей пульса покоя не имеют достоверных различий.

2.3. Корреляционный анализ

Виды взаимосвязей между признаками.

Еще Гиппократ обратил внимание на то, что между телосложением и темпераментом людей, между строением их тела и предрасположенностью к заболеваниям существует определенная связь.

В предыдущих главах были рассмотрены простейшие ситуации, когда в ходе исследования измерялись значения только одного варьирующего признака генеральной совокупности. Остальные признаки либо считались постоянными для данной совокупности, либо относились к случайным факторам, определяющим варьирование исследуемого признака. Как правило, исследования в спорте значительно сложнее и носят комплексный характер. Например, при контроле за ходом тренировочного процесса измеряется спортивный результат, и одновременно может оцениваться целый ряд биомеханических, физиологических, биохимических и других параметров (скорость и ускорения общего центра масс и отдельных звеньев тела, углы в суставах, сила мышц, показатели систем дыхания и кровообращения, объем физической нагрузки и энергозатраты организма на ее выполнение и т. д.).

При этом часто возникает вопрос о взаимосвязи отдельных признаков. Например, как зависит спортивный результат от некоторых элементов техники спортивных движений? как связаны энергозатраты организма с объемом физической нагрузки определенного вида? насколько точно по результатам выполнения некоторых стандартных упражнений можно судить о потенциальных возможностях человека в конкретном виде спортивной деятельности? и т. п. Во всех этих случаях внимание исследователя привлекает зависимость между различными величинами, описывающими интересующие его признаки.

Этой цели служит математическое понятие функции, имеющее в виду случаи, когда определенному значению одной (независимой) переменной X, называемой *аргументом,* соответствует определенное значение другой (зависимой) переменной Y, называемой *функцией.* Однозначная зависимость между переменными величинами Y и X называется *функциональной,* т.е. $Y = f(X)$ (“игрек есть функция от икс”).

Например, в функции $Y = 0{,}5X$ каждому значению Y соответствует в два раза большее значение X. Такого вида функциональная зависимость между можностью первой и второй нагрузок и ЧСС представлена при графическом способе определения PWC_{170} в велоэргометрической пробе (рис. 2.3.1). Если же в функции $Y = -2(X + a)^2$, то каждому значению Y соответствует 2 строго определенных значения X. В биохимии этот вид функциональной зависимости выявлен между активностью ферментов и pH-среды (рис. 2.3.2).

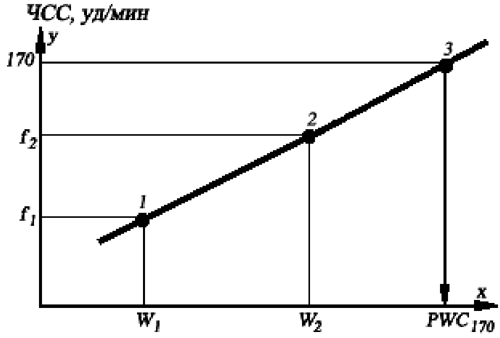


Рис. 2.3.1. Графический способ определения PWC_{170}: f_1 и f_2 – ЧСС при первой и второй нагрузках; W_1 и W_2 – мощность первой и второй нагрузок

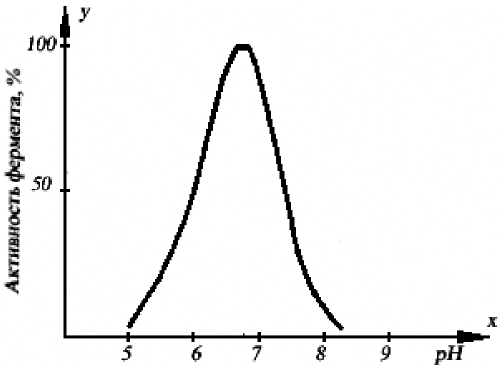


Рис. 2.3.2. Влияние pH-среды на активность ферментов

Но такого рода однозначные или функциональные связи между переменными величинами встречаются не всегда. Известно, например, что между ростом (длиной тела) и массой человека существует положительная связь: более высокие индивиды имеют обычно и большую массу, чем индивиды низкого роста. То же наблюдается и в отношении качественных признаков: блондины, как правило, имеют голубые, а брюнеты – карие глаза. Однако из этого правила имеются исключения, когда сравнительно низкорослые индивиды оказываются тяжелее высокорослых, и среди населения хотя и нечасто, но встречаются кареглазые блондины и голубоглазые брюнеты.

Причина таких “исключений” в том, что каждый биологический признак, выражаясь математическим языком, является функцией многих переменных; на его величине сказывается влияние и генетических и средовых факторов, в том числе и случайных, что вызывает варьирование признаков. Отсюда зависимость между ними приобретает не функциональный, а *статистический характер*, когда определенному значению одного признака, рассматриваемого в качестве независимой переменной, соответствует не одно и то же числовое значение, а целая гамма распределяемых в вариационный ряд числовых значений другого признака, рассматриваемого в качестве независимой переменной. Такого рода зависимость между переменными величинами называется *корреляционной* или *корреляцией* (термин “корреляция” происходит от лат. *correlatio* – соотношение, связь). При этом *данный вид взаимосвязи между признаками проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.*

Если функциональные связи одинаково легко обнаружить и на единичных, и на групповых объектах, то этого нельзя сказать о связях корреляционных, которые изучаются только на групповых объектах методами математической статистики.

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления и формы связи между признаками, измерению ее тесноты и к оценке достоверности выборочных показателей корреляции.

Корреляционная связь между признаками может быть *линейной и криволинейной (нелинейной), положительной и отрицательной.*

Прямая корреляция отражает однотипность в изменении признаков: с увеличением значений первого признака увеличиваются значения и другого, или с уменьшением первого уменьшается второй.

Обратная корреляция указывает на увеличение первого признака при уменьшении второго или уменьшение первого признака при увеличении второго.

Например, более дальний прыжок и большее количество тренировок – прямая корреляция, уменьшение времени, затраченного на преодоление дистанции, и большее количество тренировок – обратная корреляция.

Корреляционные поля и цель их построения.

Корреляция изучается на основании экспериментальных данных, представляющих собой измеренные значения (x_i, y_i) двух признаков. Если экспериментальных данных немного, то двумерное эмпирическое распределение представляется в виде двойного ряда значений x_i и y_i. При этом корреляционную зависимость между признаками можно описывать разными способами. Соответствие между аргументом и функцией может быть задано таблицей, формулой, графиком и т. д.

Корреляционный анализ, как и другие статистические методы, основан на использовании вероятностных моделей, описывающих поведение исследуемых признаков в некоторой генеральной совокупности, из которой получены экспериментальные значения x_i и y_i.

Когда исследуется корреляция между количественными признаками, значения которых можно точно измерить в единицах метрических шкал (метры, секунды, килограммы и т.д.), то очень часто принимается модель двумерной нормально распределенной генеральной совокупности. Такая модель отображает зависимость между переменными величинами x_i и y_i графически в виде геометрического места точек в системе прямоугольных координат. Эту графическую зависимость называются также *диаграммой рассеивания* или *корреляционным полем*.

Данная модель двумерного нормального распределения (корреляционное поле) позволяет дать наглядную графическую интерпретацию коэффициента корреляции, т.к. распределение в совокупности зависит от пяти параметров: μ_x, μ_y– средние значения (математические ожидания); σ_x, σ_y – стандартные отклонения случайных величин X и Y и p – коэффициент корреляции, который является мерой связи между случайными величинами X и Y.

Если $\rho = 0$, то значения x_i и y_i, полученные из двумерной нормальной совокупности, располагаются на графике в координатах x, y в пределах области, ограниченной окружностью (рис. 2.3.3, *а*). В этом случае между случайными величинами X и Y отсутствует корреляция и они называются *некоррелированными.* Для двумерного нормального распределения некоррелированность означает одновременно и независимость случайных величин X и Y.

Если $\rho = 1$ или $\rho = -1$, то между случайными величинами X и Y существует линейная функциональная зависимость ($Y = c + dX$). В этом случае говорят о полной корреляции. При $\rho = 1$ значения x_i и y_i определяют точки, лежащие на прямой линии, имеющей положительный наклон (с увеличением x_i значения y_i также увеличиваются), при $\rho = -1$ прямая имеет отрицательный наклон (рис. 2.3.3, *б*).

В промежуточных случаях ($-1 < \rho < 1$) точки, соответствующие значениям x_i, y_i попадают в область, ограниченную некоторым эллипсом (рис. 2.3.3, *в. г*), причем при $\rho > 0$ имеет место положительная корреляция (с увеличением x_i значения y_i имеют тенденцию к возрастанию), при $\rho < 0$ корреляция отрицательная. Чем ближе ρ к ± 1, тем уже эллипс и тем теснее экспериментальные значения группируются около прямой линии.

Здесь же следует обратить внимание на то, что линия, вдоль которой группируются точки, может быть не только прямой, а иметь любую другую форму: парабола, гипербола и т. д. В этих случаях мы рассматривали бы так называемую, нелинейную (или криволинейную) корреляцию (рис. 2.3.3, *д*).

Таким образом, визуальный анализ корреляционного поля помогает выявить не только наличия статистической зависимости (линейную или нелинейную) между исследуемыми признаками, но и ее тесноту и форму. Это имеет существенное значение для следующего шага в анализе – выбора и вычисления соответствующего коэффициента корреляции.

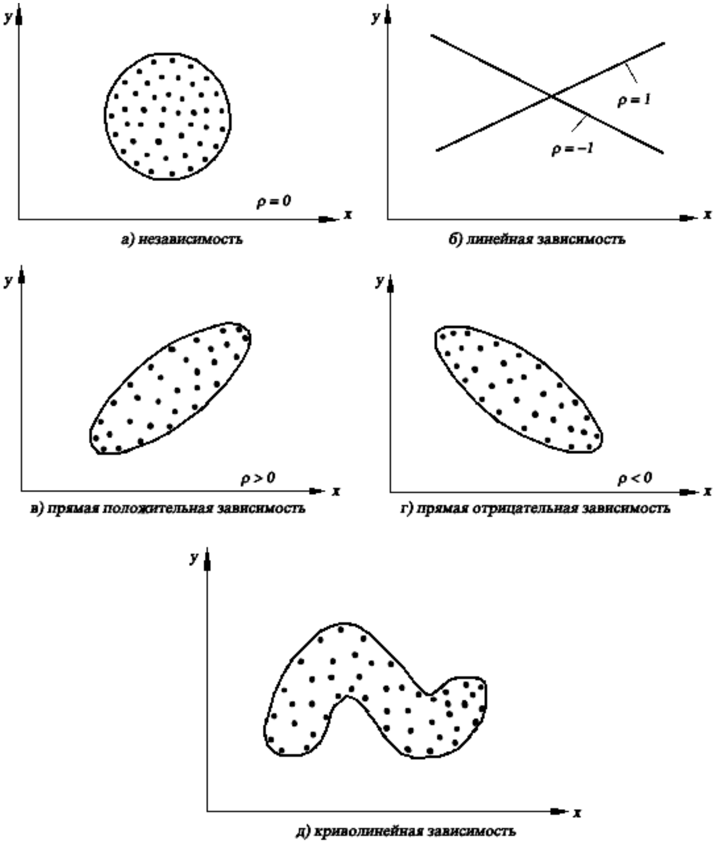


Рис. 2.3.3. Графическая интерпретация взаимосвязи
между показателями

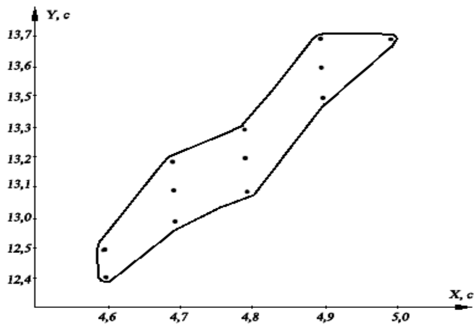
Корреляционную зависимость между признаками можно описывать разными способами. В частности, любая форма связи может быть выражена уравнением общего вида $Y = f(X)$, где признак Y – *зависимая переменная,* или *функция* от независимой переменной X, называемой *аргументом.* Соответствие между аргументом и функцией может быть задано таблицей, формулой, графиком и т. д.

Пример 2.3.1. Определить форму и направление взаимосвязи между результатами в беге на 30 и 100 м у 12 исследуемых с помощью построения графика корреляционного поля, если данные выборок таковы:

x_i, с ~ 4,6; 4,8; 4,9; 4,7; 4,6; 4,8; 4,7; 4,9; 5,0; 4,7; 4,9; 4,8;
y_i, с ~ 12,4; 13,1; 13,5; 13,1; 12,5; 13,3; 13,2; 13,7; 13,7; 13,0; 13,6; 13,2.

Решение.

1. Построим график данного корреляционного поля, отложив на оси X в порядке возрастания результаты в беге на 30 м, а на оси Y – результаты в беге на 100 м.



2. Делаем вывод о форме и направлении взаимосвязи между исследуемыми показателями.

Вывод: график данного корреляционного поля позволяет предположить, что, возможно, между результатами в беге на 30 и 100 м у исследуемой группы наблюдается прямая, положительная взаимосвязь, т.е. со снижением показателя времени в беге на 30 м будет происходить повышение результатов в беге на 100 м.

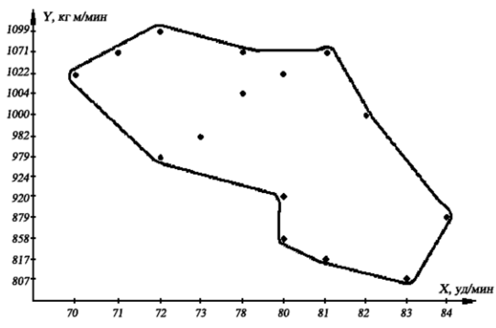
Пример 2.3.2. Определить форму и направление взаимосвязи между показателями пульса покоя и абсолютными значениями пробы PWC_{170} у 15 исследуемых с помощью построения графика корреляционного поля, если данные выборок таковы:

x_i, уд/мин ~ 80; 72; 78; 71; 80; 80; 84; 82; 78; 81; 70; 83; 72; 73; 81.

y_i, кГм/мин ~ 858; 979; 1071; 1071; 920; 1022; 879; 1000; 1004; 1071; 1022; 807; 1099; 982; 817.

Решение.

1. Построим график данного корреляционного поля, отложив на оси X в порядке возрастания показатели пульса покоя, на оси Y – абсолютные значения пробы PWC_{170}.



2. Делаем вывод о форме и направлении взаимосвязи между исследуемыми показателями.

Вывод: график данного корреляционного поля позволяет предположить, что, возможно, между пульса покоя и абсолютными значениями пробы PWC_{170} у исследуемой группы наблюдается прямая, обратная зависимость, т.е. со снижением показателя пульса покоя происходит увеличение абсолютных значений PWC_{170}.

Коэффициенты корреляции и их свойства.

Коэффициент корреляции ρ для генеральной совокупности, как правило, неизвестен, поэтому он оценивается по экспериментальным данным, представляющим собой выборку объема n пар значений (x_i, y_i), полученную при совместном измерении двух признаков X и Y. Коэффициент корреляции, определяемый по выборочным данным, называется *выборочным коэффициентом корреляции* (или просто *эмпирическим коэффициентом корреляции*). Его принято обозначать символом r.

Коэффициенты корреляции – удобный показатель связи, получивший широкое применение в практике. К их основным свойствам необходимо отнести следующие:

1. Коэффициенты корреляции способны характеризовать только линейные связи, т.е. такие, которые выражаются уравнением линейной функции. При наличии нелинейной зависимости между варьирующими признаками следует использовать другие показатели связи.

2. Значения коэффициентов корреляции – это отвлеченные числа, лежащее в пределах от –1 до +1, т.е. $-1 < r < 1$.

3. При независимом варьировании признаков, когда связь между ними отсутствует, $r = 0$.

4. При положительной, или прямой, связи, когда с увеличением значений одного признака возрастают значения другого, коэффициент корреляции приобретает положительный (+) знак и находится в пределах от 0 до +1, т.е. $0 < r < 1$.

5. При отрицательной, или обратной, связи, когда с увеличением значений одного признака соответственно уменьшаются значения другого, коэффициент корреляции сопровождается отрицательным (–) знаком и находится в пределах от 0 до –1, т.е. $-1 < r < 0$.

6. Чем сильнее связь между признаками, тем ближе величина коэффициента корреляции к $\left|1\right|$. Если $r = \pm 1$, то корреляционная связь переходит в функциональную, т.е. каждому значению признака X будет соответствовать одно или несколько строго определенных значений признака Y.

7. Только по величине коэффициентов корреляции нельзя судить о достоверности корреляционной связи между признаками. Этот параметр зависит от числа степеней свободы $k = n - 2$, где: n – число коррелируемых пар показателей X и Y. Чем больше n, тем выше достоверность связи при одном и том же значении коэффициента корреляции.

В практической деятельности, когда число коррелируемых пар признаков X и Y не велико ($n \leq 30$), то при оценке зависимости между показателями используется следующую градацию:

1) *высокая степень взаимосвязи* – значения коэффициента корреляции находится в пределах от 0,7 до 0,99;

2) *средняя степень взаимосвязи* – значения коэффициента корреляции находится в пределах от 0,5 до 0,69;

3) *слабая степень взаимосвязи* – значения коэффициента корреляции находится от 0,2 до 0,49.

Нормированный коэффициент корреляции Бравэ-Пирсона.

В качестве оценки генерального коэффициента корреляции ρ используется коэффициент корреляции r Бравэ–Пирсона. Для его определения принимается предположение о двумерном нормальном распределении генеральной совокупности, из которой получены экспериментальные данные. Это предположение может быть проверено с помощью соответствующих критериев значимости. Следует отметить, что если по отдельности одномерные эмпирические распределения значений x_i и y_i согласуются с нормальным распределением, то из этого еще не следует, что двумерное распределение будет нормальным. Для такого заключения необходимо еще проверить предположение о линейности связи между случайными величинами X и Y. Строго говоря, для вычисления коэффициента корреляции достаточно только принять предположение о линейности связи между случайными величинами, и вычисленный коэффициент корреляции будет мерой этой линейной связи.

Коэффициент корреляции Бравэ–Пирсона (r_{xy}^P) относится *к параметрическим коэффициентам* и для практических расчетов вычисляется по формуле:

$$r_{xy}^P = \frac{\sum(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}}. \qquad (2.3.1)$$

Из формулы (2.3.1) видно, что для вычисления r_{xy}^P необходимо найти средние значения признаков X и Y, а также отклонения каждого статистического данного от его среднего $(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$. Зная эти значения, находятся суммы $\sum(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y}), \sum(x_i-\bar{x})^2, \sum(y_i-\bar{y})^2$. Затем, вычислив значение r_{xy}^P, необходимо определить достоверность найденного коэффициента корреляции, сравнив его фактическое значение с табличным для $k = n-2$ (прилож. 7). Если $r_ф \geq r_{st}$, то можно говорить о том, что между признаками наблюдается достоверная взаимосвязь. Если $r_ф < r_{st}$, то между признаками наблюдается недостоверная корреляционная взаимосвязь.

Пример 2.3.3. Определить достоверность взаимосвязи между результатами в беге на 500 м и показателями пульса после выполненной нагрузки у 12 исследуемых с помощью расчета нормированного коэффициента корреляции, если данные выборок таковы:

x_i, с ~ 78,2; 77,8; 78,9; 81,2; 76,5; 79,1; 77,4; 78,9; 79,8; 80,8; 76,4; 77,6;

y_i, уд/мин ~ 162; 156; 162; 168; 156; 162; 156; 162; 168; 174; 156; 162.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
78,2	-0,4	0,16	162	0	0	0
77,8	-0,8	0,64	156	-6	36	4,8
78,9	0,3	0,09	162	0	0	0
81,2	2,6	6,76	168	6	36	15,6
76,5	-2,1	4,41	156	-6	36	12,6
79,1	0,5	0,25	162	0	0	0

Окончание таблицы

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
77,4	-1,2	1,44	156	-6	36	7,2
78,9	0,3	0,09	162	0	0	0
79,8	1,2	1,44	168	6	36	7,2
80,8	2,2	4,84	174	12	144	26,4
76,4	-2,2	4,84	156	-6	36	13,2
77,6	-1,0	1,00	162	0	0	0
$\bar{x} =$ 78,6		$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 25,96	$\bar{y}$ =162		$\sum(y_i - \bar{y})^2$ = 360	$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot$ $(y_i - \bar{y})$ = 87

2. Рассчитаем значение нормированного коэффициента корреляции Пирсона, используя формулу (10.1):

$$r_{xy}^P = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{87}{\sqrt{25{,}96 \cdot 360}} \approx \frac{87}{96{,}67} \approx 0{,}90.$$

3. Рассчитаем число степеней свободы по формуле:

$$k = n - 2 = 12 - 2 = 10.$$

4. Произведем сравнение расчетного значения нормированного коэффициента корреляции ($r_ф = 0{,}90$) с табличным значением для $k = 10$ при $\alpha = 1\%$ (прилож. 7) и сделаем вывод.

Вывод: 1) т.к. $r_ф = 0{,}90 > 0$, то между данными выборок наблюдается прямая положительная взаимосвязь, т.е. низкому результату в беге соответствует высокий показатель пульса нагрузки;

2) т.к. $r_ф = 0{,}90 > r_{st} = 0{,}71$ для $k = 10$ при $\alpha = 1\%$, то с уверенностью $\beta = 99\%$ можно говорить о том, что выявленная зависимость достоверна.

Пример 2.3.4. Определить достоверность взаимосвязи между показателями веса и количеством подтягиваний на перекладине у 11 исследуемых с помощью расчета нормированного коэффициента корреляции, если данные выборок таковы:

x_i, кг ~ 51; 50; 48; 51; 46; 47; 49; 60; 51; 52; 56;
y_i, кол-раз ~ 13; 15; 13; 16; 12; 14; 12; 10; 18; 10; 12.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
51	0	0	13	0	0	0
50	-1	1	15	2	4	-2
48	-3	9	13	0	0	0
51	0	0	16	3	9	0
46	-5	25	12	-1	1	5
47	-4	16	14	1	1	-4
49	-2	4	12	-1	1	2
60	9	81	10	-3	9	-27
51	0	0	18	5	25	0
52	1	1	10	-3	9	-3
56	5	25	12	-1	1	-5
$\bar{x}$ = 51		$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 162	$\bar{y}$ =13		$\sum(y_i - \bar{y})^2$ = 60	$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ = -34

2. Рассчитаем значение нормированного коэффициента корреляции Пирсона, используя формулу (2.3.1):

$$r_{xy}^P = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-34}{\sqrt{162 \cdot 60}} \approx \frac{-34}{98{,}59} \approx -0{,}34.$$

3. Рассчитаем число степеней свободы по формуле:

$$k = n - 2 = 11 - 2 = 9.$$

4. Произведем сравнение расчетного значения нормированного коэффициента корреляции ($r_ф$ = -0,34) с табличным значением для k = 9 при α = 5% (прилож. 7) и сделаем вывод.

***Вывод**:* 1) т.к. $r_ф$ = -0,34 < 0, то между данными выборок наблюдается прямая отрицательная взаимосвязь, т.е. с увеличение показателей веса у исследуемых снижается их результат в количестве подтягиваний на перекладине;

2) т.к. $r_ф$ = -0,34 < r_{st} = 0,60 для K = 10 при α = 5%, то с уверенностью β = 95% можно говорить о том, что выявленная зависимость недостоверна.

Оценка достоверности коэффициента корреляции.

Ошибка эмпирического коэффициента корреляции.

Эмпирический коэффициент корреляции служит оценкой генерального параметра ρ и как случайная величина сопровождается ошибкой, которая определяется по формуле

$$s_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \qquad (2.3.2)$$

или, когда объем выборки не превышает 100 наблюдений,

$$s_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}} = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}. \qquad (2.3.3)$$

Отношение выборочного коэффициента корреляции к своей ошибке служит критерием для проверки нулевой гипотезы – предложения о том, что в генеральной совокупности этот показатель равен нулю, т. е. ρ = 0. Нулевая гипотеза опровергается, если

$$t_ф = \frac{r \cdot \sqrt{n}}{1-r^2} \geq t_{st} \quad \text{или} \quad t_ф = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \geq t_{st} \quad (\text{при } n \leq 100)$$

для $k = n - 2$ и принятого уровня значимости (α).

Пример 2.3.5. Для найденной величины коэффициента корреляции r_{xy} = 0,90 между результатами в беге на 500 м и показателями пульса после нагрузки у 12 исследуемых (пример 2.3.3) t-критерий определяется следующим образом:

$$t_ф = 0{,}90 \cdot \sqrt{\frac{12-2}{1-(0{,}90)^2}} \approx 6{,}53.$$

Вывод: т.к. $t_ф$ = 6,53 > t_{st} = 4,59 для 0,1%-ного уровня значимости и k = 10 (прилож. 1), нулевая гипотеза о том, что в генеральной совокупности значение ρ = 0, опровергается.

Пример 2.3.6. Проверим нулевую гипотезу ($\rho = 0$) в отношении коэффициента корреляции, равного –0,34, между показателями веса и количеством подтягиваний на перекладине у 11 исследуемых (пример 2.3.4). В данном случае

$$t_{ф} = |-0{,}34| \cdot \sqrt{\frac{11-2}{1-(-0{,}34)^2}} \approx 1{,}08.$$

***Вывод**:* т.к. $t_{ф} = 1{,}08 < t_{st} = 2{,}26$ для $k = 11 - 2 = 9$ и 5%-ного уровня значимости (прилож. 1), то нулевая гипотеза о том, что в генеральной совокупности значение $\rho = 0$ подтверждается ($p < 0{,}05$).

Значимость, или достоверность, коэффициента корреляции можно установить, пользуясь также таблицей приложения 7. Нулевая гипотеза опровергается, если эмпирический коэффициент корреляции превысит указанную в таблице величину для принятого уровня значимости и числа степеней свободы $k=n-2$. Так, для $k = 10$ и $\alpha = 1$ % в таблице приложения 7 находим 0,79. Поскольку найденный в примере 2.3.3 эмпирический коэффициент корреляции $r_{xy} = 0{,}90$ выше стандарта, нулевая гипотеза о том, что в генеральной совокупности $\rho = 0$, отрицается. Если же значение эмпирического коэффициента корреляции ниже стандарта (пример 2.3.4), то нулевая гипотеза подтверждается на 5%-ном уровне значимости.

Установлено, что при малом объеме выборки эмпирический коэффициент корреляции (r) оказывается несколько ниже, чем генеральный параметр (ρ). Поэтому лучшая оценка ρ получается по формуле (Л. Закс, 1976):

$$r^* = r \cdot \left[1 + \frac{1-r^2}{2(n-3)}\right].$$

Так, в отношении корреляции между результатами в беге на 500 м и показателями пульса после нагрузки у 12 исследуемых более точной оценкой генерального параметра (ρ_{xy}) будет величина

$$r^*_{xy} = 0{,}90 \cdot \left[1 + \frac{1-(0{,}90)^2}{2(12-3)}\right] = 0{,}9095 \approx 0{,}91.$$

Разумеется, что при наличии большого числа наблюдений ($n > 100$) эта поправка оказывается незначительной и ее можно не вносить.

Правильное применение коэффициента корреляции предполагает нормальность распределения двумерной совокупности сопряженных значений случайных переменных величин Y и X. Из математической статистики известно, что при малом числе испытаний и сравнительно сильной корреляции ($r > 0{,}5$) распределение коэффициента корреляции n-го числа выборок, взятых из нормально распределяющейся совокупности, значительно отклоняется от нормальной кривой. Это показано на рисунке 2.3.4, где изображены кривые распределения эмпирического коэффициента корреляции при $n = 12$ для значений генерального параметра $\rho = 0$; 0,4 и 0,8. При значениях ρ, приближающихся к единице, кривая распределения эмпирического коэффициента корреляции (r) становится все более асимметричной. Следовательно, эмпирический коэффициент корреляции не будет точной оценкой генерального параметра (ρ), если он вычислен на малочисленной выборке и его величина значительно отклоняется от 0,5.

z-преобразование Фишера

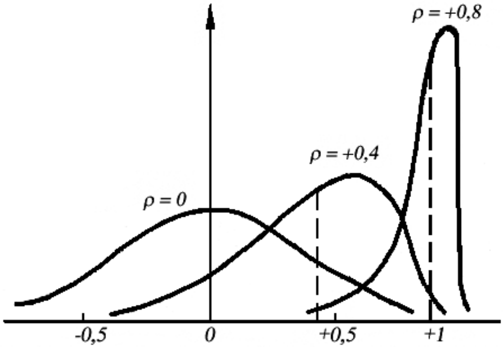


Рис. 2.3.4. Кривые распределения эмпирического коэффициента корреляции (r) при n = 12 для разных значений генерального параметра ρ

Имея в виду это обстоятельство, Фишер нашел более точный способ оценки генерального параметра ρ по величине выборочного коэффициента корреляции *r*. Этот способ сводится к замене коэффициента корреляции преобразованной величиной *z*, которая связана с эмпирическим коэффициентом корреляции, следующим образом:

$$z = \frac{1}{2} ln \cdot \frac{1+r}{1-r}, \text{ или } z = 1{,}15129\, lg \cdot \frac{1+r}{1-r}.$$

Распределение величины *z* является почти неизменным по форме, так как мало зависит от численности выборки и от значения коэффициента корреляции в генеральной совокупности. Величина *z* меняет свое значение от –∞ до +∞, а ее распределение быстро приближается к нормальному распределению со средним значением (рис. 2.3.5)

$$\bar{z} = \frac{1}{2} ln \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)} \text{ и дисперсией } \sigma_Z^2 = \frac{1}{n-3}.$$

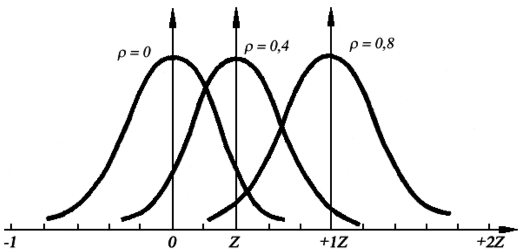


Рис. 2.3.5. Распределение величины z при n = 12

Преобразование коэффициента корреляции в величину *z* производится по таблице приложения 8. В таблице содержатся величины *z*, соответствующие значениям эмпирического коэффициента корреляции *r*. Критерием достоверности показателя *z* служит следующее отношение:

$$t_z = \frac{z}{s_z} = z \cdot \sqrt{n-3}.$$

Этот критерий пригоден для выборки любого объема; он используется во всех случаях, когда вместо коэффициента корреляции r берется отвечающее ему значение z. Нулевая гипотеза проверяется с помощью t-критерия Стьюдента для принятого уровня значимости и числа степеней свободы $k = n - 2$.

Применение z-преобразования позволяет с большей уверенностью оценивать значимость эмпирического коэффициента корреляции, а также и разность между двумя выборочными коэффициентами $r_1 - r_2$, когда возникает такого рода необходимость.

Проверим нулевую гипотезу в отношении преобразованного по z коэффициента корреляции между результатами в беге на 500 м и показателями пульса после нагрузки у исследуемых. Этот показатель, полученный в результате 12 наблюдений, оказался равным $r = 0{,}90$. В приложении 8 этой величине соответствует $z = 1{,}472$. Критерий $t_ф = 1{,}472 \cdot \sqrt{12-3} = 1{,}472 \cdot 3 = 4{,}416$. Для $k = 12 - 2 = 10$ и 1%-ного уровня значимости в приложении 1 находим $t_{st} = 3{,}17$. Так как $t_ф > t_{st}$, нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

Минимальное число наблюдений для планируемой точности коэффициента корреляции.

Статистическая недостоверность вычисленного на малочисленной выборке коэффициента корреляции ничего, собственно, не доказывает. Ведь при повторной выборке нулевая гипотеза может оказаться несостоятельной. Можно рассчитать необходимый объем выборки для заданной точности коэффициента корреляции. Для этого служит формула

$$n = \frac{t^2}{z^2} + 3, \tag{2.3.4}$$

где n – искомый объем выборки, t – величина, заданная по принятому уровню значимости; z – преобразованная (по Фишеру) величина эмпирического коэффициента корреляции.

Пример 2.3.7. Эмпирический коэффициент корреляции, рассчитанный для $n = 14$, оказался равным 0,482. Этой величине соответствует $z = 0{,}523$. Критерий $t_z = 0{,}523 \cdot \sqrt{14-3} = 1{,}73$. В приложении 1 для 5%-ного уровня значимости и $k = 14 - 2 = 12$ находим $t_{st} = 2{,}18$. Нулевая гипотеза остается в силе. Воспользуемся формулой (2.3.5) и определим необходимое число наблюдений, чтобы с $\alpha = 1\%$, которому соответствует $t = 2{,}58$, можно было бы судить о достоверности этого выборочного коэффициента:

$$n = \frac{(2{,}58)^2}{(0{,}523)^2} + 3 \approx \frac{6{,}656}{0{,}274} + 3 = 24 + 3 = 27.$$

Вывод: число наблюдений (n) нужно довести, по меньшей мере, до 27, чтобы удовлетворить требованию выдвинутых условий, т. е. с вероятностью $p > 0{,}99$ отвергнуть нулевую гипотезу и считать выборочный коэффициент корреляции статистически достоверным.

Оценка разности между коэффициентами корреляции.

При сравнении коэффициентов корреляции, вычисленных на независимых выборках, нулевая гипотеза сводится к предположению, что в генеральной совокупности разница между этими показателями равна нулю. Нулевая гипотеза проверяется с помощью t-критерия, который представляет отношение разности между эмпирическими коэффициентами корреляции r_1 и r_2 к ее статистической ошибке, определяемой по формуле

$$s_{dz} = \sqrt{s_{r_1}^2 + s_{r_2}^2}, \qquad (2.3.5)$$

где $s_{r_1}^2$ и $s_{r_2}^2$ – ошибки сравниваемых коэффициентов корреляции, вычисляемые по формулам (2.3.2) и (2.3.3), смотря по объемам выборок, для которых вычислены коэффициенты корреляции.

Нулевая гипотеза отбрасывается при $t_ф > t_{st}$ для принятого уровня значимости (α) и числа степеней свободы $k = (n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n_1 + n_2 - 4$.

Более точная оценка разности между коэффициентами корреляции, вычисленными на малочисленных выборках, получается при использовании метода z, т. е. на основании преобразованных коэффициентов корреляции. При этом t-критерий определяется по разности $z_1 - z_2$, отнесенной к своей ошибке:

$$t_{dz} = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}. \qquad (2.3.6)$$

Пример 2.3.8. При равновеликих выборках (n = 50) получены коэффициенты корреляции между данными пульса покоя и восстановления после выполнения пробы Руфье: r_1 = 0,44 и r_2 = 0,57. Разница составляет: $r_2 - r_1$ = 0,13. Проверим достоверность этой разницы. Переводим коэффициенты корреляции в значения z: z_1 = 0,472 и z_2 = 0,648. Отсюда критерий достоверности

$$t_{dz} = \frac{0{,}648 - 0{,}472}{\sqrt{\frac{1}{47} + \frac{1}{47}}} \approx \frac{0{,}176}{\sqrt{0{,}043}} \approx \frac{0{,}176}{0{,}206} \approx 0{,}85.$$

Вывод: т.к. $t_{dz} = 0{,}85 < t_{st}$ = 1,98 для α = 5% и k = 100 – 4 = 96 (прилож. 1), то нулевая гипотеза о том, что разности между эмпирическими коэффициентами корреляции r_1 и r_2 равна нулю, остается в силе.

Вычисление частного и множественного коэффициентов корреляции. На взаимосвязь двух показателей влияют различные факторы. На практике часто возникает необходимость оценить взаимосвязь X и Y при неизменности всех остальных показателей (Z, Q. и т. д.). В таких случаях вычисляют частные (парциальные) коэффициенты корреляции: $r_{xr\cdot z}$, $r_{XY\cdot ZQ}$ и т. д. Коэффициент $r_{xr\cdot z}$ позволяет оценить взаимосвязь X и Y при исключении (элиминировании) влияния на нее показателя Z. Вычисление производят по формуле:

$$r_{xy\cdot z} = \frac{r_{xy} - r_{xy}\cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)\cdot(1 - r_{yz}^2)}}, \qquad (2.3.7)$$

где r_{xy} , r_{xz} , r_{yz} – парные линейные коэффициенты корреляции.

Пример 2.3.9. В одном из экспериментов (В.М. Зациорский, Ю.М. Арестов, 1964) у 190 мальчиков 11-14 лет измерили помимо прочего результаты в прыжках в высоту (x), вес тела (y) и длину тела (z). Коэффициенты корреляции оказались равны: прыжки в высоту – длина тела – $r_{xz} = 0{,}832$; прыжки в высоту – вес тела – $r_{xy} = 0{,}723$; вес тела – длина тела – $r_{yz} = 0{,}913$. Таким образом, дети большого роста и веса в среднем прыгали выше. Однако очевидно, что многие из них имели больший вес потому, что они были выше. Какой была бы зависимость между весом тела и результатами в прыжках в высоту, если бы длина тела всех мальчиков была одинаковой? Расчеты показывают:

$$r_{xy\cdot z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}\cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)\cdot(1 - r_{yz}^2)}} = \frac{0{,}723 - 0{,}832\cdot 0{,}913}{\sqrt{(1 - 0{,}832^2)\cdot(1 - 0{,}913^2)}} \approx -0{,}161.$$

Следовательно, при исключении влияния длины тела корреляция становится отрицательной: при прочих равных условиях дети с большим весом тела прыгали бы несколько ниже. Если же исключить влияние веса, то частный коэффициент корреляции между длиной тела и результатами в прыжках в высоту будет равен:

$$r_{xz\cdot y} = \frac{r_{xz} - r_{xy}\cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)\cdot(1 - r_{yz}^2)}} = \frac{0{,}832 - 0{,}723\cdot 0{,}913}{\sqrt{(1 - 0{,}723^2)\cdot(1 - 0{,}913^2)}} \approx 0{,}610.$$

Как видно, значение частного коэффициента корреляции остается достаточно высоким. Иначе говоря, при прочих равных условиях более высокие дети будут иметь преимущество в этом упражнении.

Для исследования тесноты взаимосвязи между показателем X и некоторым набором других показателей используется *множественный коэффициент корреляции,* который обозначается как R_{XYZ}. При оценке взаимовлияния показателей Y и Z на показатель X значение множественного коэффициента корреляции вычисляют по формуле:

$$R_{XYZ} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2\cdot r_{xy}\cdot r_{xz}\cdot r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}}. \qquad (2.3.8)$$

Для приведенного примера 2.3.9 совместное влияние веса тела и длины тела на результаты в прыжках в высоту будет равно:

$$R_{XYZ} = \sqrt{\frac{0{,}832^2 + 0{,}723^2 - 2\cdot 0{,}832\cdot 0{,}723\cdot 0{,}913}{1 - 0{,}913^2}} \approx 0{,}837.$$

Поскольку длина тела влияет на достижения в прыжках в высоту положительно (сильно), а вес тела отрицательно (слабо), совокупное влияние этих показателей оказывается положительным, но не столь высоким, как влияние одной лишь длины тела.

Отметим, что частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от –1 до +1 (так же, как и обычный парный линейный коэффициент корреляции), а множественный коэффициент корреляции – от 0 до +1 (отрицательных значений нет).

Эти коэффициенты корреляции широко используются в теории тестов в метрологии для оценки информативности. При большом числе показателей (тестов) вычисление коэффициентов усложняется и требует применения ЭВМ.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмэна.

Если потребуется установить связь между двумя признаками, значения которых в генеральной совокупности распределены не по нормальному закону, т. е. предположение о том, что двумерная выборка (x_i и y_i) получена из двумерной нормальной генеральной совокупности, не принимается, то можно воспользоваться коэффициентом ранговой корреляции Спирмэна (r^s_{xy}):

$$r^S_{xy} = 1 - \frac{6\sum(d_x - d_y)^2}{n\cdot(n^2-1)}, \qquad (2.3.9)$$

где d_x и d_y – ранги показателей x_i и y_i; n – число коррелируемых пар.

Коэффициент ранговой корреляции также имеет пределы +1 и –1. Если ранги одинаковы для всех значений x_i и y_i, то все разности рангов $(d_x - d_y) = 0$ и $r^s_{xy} = 1$. Если ранги x_i и y_i расположены в обратном порядке, то $r^s_{xy} = -1$. Таким образом, коэффициент ранговой корреляции является мерой совпадения рангов значений x_i и y_i.

Когда ранги всех значений x_i и y_i строго совпадают или расположены в обратном порядке, между случайными величинами X и Y существует функциональная зависимость, причем эта зависимость не обязательно линейная, как в случае с коэффициентом линейной корреляции Бравэ-Пирсона, а может быть любой монотонной зависимостью (т. е. постоянно возрастающей или постоянно убывающей зависимостью). Если зависимость монотонно возрастающая, то ранги значений x_i и y_i совпадают и $r^s_{xy} = 1$; если зависимость монотонно убывающая, то ранги обратны и $r^s_{xy} = -1$. Следовательно, коэффициент ранговой корреляции является мерой любой монотонной зависимости между случайными величинами X и Y.

Из формулы (2.3.3) видно, что для вычисления r^s_{xy} необходимо сначала проставить ранги $(d_x - d_y)$ показателей x_i и y_i, найти разности рангов $(d_x - d_y)$ для каждой пары показателей и квадраты этих разностей $(d_x - d_y)^2$. Зная эти значения, находятся суммы $\sum(d_x - d_y), \sum(d_x - d_y)^2$, учитывая, что $\sum(d_x - d_y)$ всегда равна нулю. Затем, вычислив значение r^s_{xy}, необходимо определить достоверность найденного коэффициента корреляции, сравнив его фактическое значение с табличным (прилож. 9). Если $r_ф \geq r_{st}$, то можно говорить о том, что между признаками наблюдается достоверная взаимосвязь. Если $r_ф < r_{st}$, то между признаками наблюдается недостоверная корреляционная взаимосвязь.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмэна вычисляется значительно проще, чем коэффициент корреляции Бравэ-Пирсона при одних и тех же исходных данных, поскольку при вычислении используются ранги, представляющие собой обычно целые числа.

Коэффициент ранговой корреляции целесообразно использовать в следующих случаях:

1. Если экспериментальные данные представляют собой точно измеренные значения признаков X и Y и требуется быстро найти приближенную оценку коэффициента корреляции. Тогда даже в случае двумерного нормального распределения генеральной совокупности можно воспользоваться коэффициентом ранговой корреляции вместо точного коэффициента корреляции Бравэ-Пирсона. Вычисления будут существенно проще, а точность оценки генерального параметра ρ с помощью коэффициента r_{xy}^{S} при больших объемах выборки составляет 91,2% по отношению к точности оценки по коэффициенту корреляций.

2. Когда значения x_i и (или) y_i заданы в порядковой шкале (например, оценки судей в баллах, места на соревнованиях, количественные градации качественных признаков), т. е. когда признаки не могут быть точно измерены, но их наблюдаемые значения могут быть расставлены в определенном порядке.

Пример 2.3.10. Определить достоверность взаимосвязи между показателями ЖЕЛ и окружности грудной клетки у 11 исследуемых с помощью расчета рангового коэффициента корреляции, если данные выборок таковы:

x_i, мл ~ 3700;3800; 3700; 3400; 2200; 2000; 2000; 3300; 3200; 3000; 2900; 3800; 3600;

y_i,см ~ 84; 88; 86; 79; 72; 70; 63; 87; 75; 81; 68; 90; 87.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу, проставляем ранги показателей и делаем необходимые расчеты.

x_i	d_x	y_i	d_y	$(d_x - d_y)$	$(d_x - d_y)^2$
3700	10,5	84	8	2,5	6,25
3800	12,5	88	12	0,5	0,25
3700	10,5	86	9	1,5	2,25
3400	8	79	6	2	4
2200	3	72	4	-1	1
2000	1,5	70	3	-1,5	2,25
2000	1,5	63	1	0,5	0,25
3300	7	87	10,5	-3,5	12,25
3200	6	75	5	1	1
3000	5	81	7	-2	4
2900	4	68	2	2	4
3800	12,5	90	13	-0,5	0,25
3600	9	87	10,5	-1,5	2,25
				$\sum(d_x - d_y)= 0$	$\sum(d_x - d_y)^2= 40$

2. Рассчитаем значение рангового коэффициента корреляции Спирмэна, используя формулу (2.3.9):

$$r_{xy}^{S} = 1 - \frac{6\sum(d_x - d_y)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 40}{13 \cdot 168} = 1 - \frac{240}{2184} \approx 1 - 0{,}11 \approx 0{,}89.$$

3. Произведем сравнение расчетного значения рангового коэффициента корреляции ($r_ф$ = 0,89) с табличным значением для n = 13 при α = 1% (прилож. 9) и сделаем вывод.

Вывод: 1) т.к. $r_ф = 0{,}89 > 0$, то между данными выборок наблюдается прямая положительная взаимосвязь, т.е. с увеличением показателей окружности грудной клетки возрастают и значения показателей ЖЕЛ;

2) т.к. $r_ф = 0{,}89 > r_{st} = 0{,}70$ для $n = 13$ при $\alpha = 1\%$, то с уверенностью $\beta = 99\%$ можно говорить о том, что выявленная зависимость достоверна.

Пример 2.3.11. Определить достоверность взаимосвязи между показателями веса и максимального количества сгибания и разгибания рук в упоре лежа у 10 исследуемых с помощью расчета рангового коэффициента корреляции, если данные выборок таковы:

x_i, кг ~ 55; 45; 43; 47; 47; 51; 48; 60; 53; 50;

y_i, кол-во раз ~ 26; 20; 25; 22; 27; 28; 16; 15; 18; 24.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу, проставляем ранги показателей и делаем необходимые расчеты.

x_i	d_x	y_i	d_y	$(d_x - d_y)$	$(d_x - d_y)^2$
55	9	26	9	0	0
45	2	20	4	-2	4
43	1	25	7	-6	36
47	3,5	22	5	-1,5	2,25
47	3,5	27	8	-4,5	20,25
51	7	28	10	-3	9
48	5	16	2	3	9
60	10	15	1	9	81
53	8	18	3	5	25
50	6	24	6	0	0
				$\sum(d_x - d_y) = 0$	$\sum(d_x - d_y)^2 = 186{,}5$

2. Рассчитаем значение рангового коэффициента корреляции, используя формулу (2.3.9):

$$r_{xy}^S = 1 - \frac{6\sum(d_x - d_y)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 186{,}5}{10 \cdot 99} = 1 - \frac{1119}{990} \approx 1 - 1{,}13 \approx -0{,}13.$$

3. Произведем сравнение расчетного значения рангового коэффициента корреляции Спирмэна ($r_ф = -0{,}13$) с табличным значением для $n = 10$ при $\alpha = 5\%$ (прилож.9) и сделаем вывод.

Вывод*:* 1) т.к. $r_ф = -0{,}13 < 0$, то между данными выборок наблюдается прямая отрицательная взаимосвязь, т.е. увеличением показателей веса вызывает снижение максимального количество сгибаний и разгибаний рук в упоре лежа в группе исследуемых;

2) т.к. $r_ф = -0{,}13 < r_{st} = 0{,}64$ для $n = 10$ при $\alpha = 5\%$, то с уверенностью $\beta = 95\%$ можно говорить о том, что выявленная зависимость недостоверна.

Вычисление тетрахорического коэффициента сопряженности.

Если требуется выявить связь (сопряженность) между качественными признаками, которые не поддаются непосредственному измерению, для этого используются *коэффициенты сопряженности*.

Здесь рассматривается только альтернативными признаками. Мерой альтернативных признаков является наличие или отсутствие их у объектов исследования. Например, человек может заниматься или не заниматься физической культурой, заболеть или не заболеть простудным заболеванием, сдать или не сдать зачет по математической статистике, установить или не установить мировой рекорд простейший случай: связь между двумя в легкой атлетике, плавании и т. д.

При исследовании сопряженности двух альтернативных признаков исходные экспериментальные данные представляют в виде четырехклеточной таблицы сопряженности признаков (табл. 2.3.1). В этой таблице содержатся частоты *a, b, c* и *d,* соответствующие для выборки объема *n* наличию (+) или отсутствию (–) каждого из признаков “1” или “2” у испытуемых.

Таблица 2.3.1

Таблица сопряженности признаков

Признак 1 / Признак 2	Наличие (+)	Отсутствие (–)
Наличие (+)	a	b
Отсутствие (–)	c	d

Взаимосвязь между двумя альтернативными признаками устанавливается с помощью *тетрахорического коэффициента сопряженности* (*или коэффициента ассоциации*), предложенного К. Пирсоном в 1901 г.

$$r_A = \frac{ad - bc}{\sqrt{[(a+b)\cdot(c+d)\cdot(a+c)\cdot(b+d)]}}, \tag{2.3.10}$$

где *a, b, c* и *d* – численности групп, или частоты вариант, распределенные по клеткам четырехпольной корреляционной таблицы.

Коэффициент ассоциации, являясь одной из модификаций пирсоновского критерия хи-квадрат, изменяется, как и коэффициент корреляции, от –1 до +1; при $ad > bc$ он имеет положительный, а при $ad < bc$ – отрицательный знак. Если же $ad = bc,$ то $r_A = 0.$

Чтобы получить более точную оценку генерального параметра (ρ_A), в формулу (2.3.10) вносится поправка Йейтса на непрерывность, равная половине объема выборки, которая вычисляется из числителя, т. е.

$$r_A = \frac{|ad - bc| - 0{,}5n}{\sqrt{[(a+b)\cdot(c+d)\cdot(a+c)\cdot(b+d)]}}. \tag{2.3.11}$$

Для проверки нулевой гипотезы о том, что в генеральной совокупности коэффициент сопряженности $\rho_A = 0$, значимость r_A определяется с помощью χ^2-критерия Пирсона, значение которого вычисляется по формуле:

$$\chi^2 = n \cdot r_A^2. \tag{2.3.12}$$

Нулевая гипотеза, или предположение о том, что в генеральной совокупности этот показатель (ρ_A) равен нулю, опровергается, если $\chi^2_\text{ф} \geq \chi^2_{st}$ для принятого уровня значимости (α) и числа степеней свободы $\nu = (2 – 1)(2 – 1)=1$. Если $\chi^2_\text{ф} < \chi^2_{st}$, то нулевая гипотеза принимается, и между признаками наблюдается отсутствие сопряженности. При этом, как правило, используется двусторонний критерий, т.е. знак предполагаемой сопряженности заранее не устанавливается.

Пример 2.3.12. Группа испытуемых (18 человек) выполняла два разных по трудности двигательных задания. Выполнение фиксировалось как “+”, невыполнение – как “–”. Определим степень взаимосвязь двух заданий. Для этого необходимо рассчитать тетрахорический коэффициент сопряженности. Данные представлены в таблице 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Исходные данные для расчета тетрахорического коэффициента сопряженности

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Задание 1	+	+	–	+	+	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	+	+	+
Задание 2	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	+	+

Решение.

1. Чтобы вычислить коэффициент r_A, заполним клетки таблицы 2.3.3. Для этого подсчитаем число совпадений соответственно для а, b, c и d клеток.

Таблица 2.3.3

Расчет тетрахорического коэффициента сопряженности

Задание 1 / Задание 2	(+)	(-)	Сумма
(+) (-)	$a = 7$ $c = 5$	$b = 4$ $d = 2$	$a + b = 11$ $c + d = 7$
Сумма	$a + c = 12$	$b + d = 6$	$n = 18$

2. По данным таблицы 2.3.3 вычислим значение r_A, используя формулу (2.3.12):

$$r_A = \frac{|ad - bc| - 0{,}5n}{\sqrt{[(a+b)\cdot(c+d)\cdot(a+c)\cdot(b+d)]}} = \frac{|7\cdot 2 - 5\cdot 4| - 0{,}5\cdot 18}{\sqrt{11\cdot 7\cdot 12\cdot 6}} \approx -0{,}040.$$

3. Так как значение $r_A = -0{,}040$, т.е. между двумя двигательными заданиями наблюдается несущественная отрицательная взаимосвязь, а, следовательно, можно выдвинуть нулевую гипотезу о независимости (об отсутствии сопряженности) между признаками ($\rho_A = 0$).

4. Для проверки нулевой гипотезы о том, что в генеральной совокупности показатель $\rho_A = 0$, произведем расчет χ^2-критерия Пирсона по формуле (2.3.11):

$$\chi^2 = n \cdot r_A^2 = 18 \cdot (-0{,}040)^2 = 0{,}0288 \approx 0{,}03.$$

5. Произведем сравнение расчетного значения хи-квадрата ($\chi^2_ф = 0{,}03$) с табличным значением для $k = 1$ при $\alpha = 5\%$ (прилож.10) и сделаем вывод.

Вывод: т.к. $\chi^2_ф = 0{,}03 < \chi^2_{st} = 3{,}84$ для $k = 1$ при $\alpha = 0{,}05$, то гипотеза об отсутствии сопряженности между двумя двигательными задания принимается, т.е. в генеральной совокупности $\rho_A = 0$.

Из формул (2.3.11) и (2.3.12) следует, что между коэффициентом ассоциации и пирсоновским критерием хи-квадрат имеет место определенная связь

$$r_A^2 = \frac{\chi^2}{n}.$$

Отсюда формула, позволяющая находить значение r_A по величине критерия хи-квадрат,

$$r_A = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}.$$

2.4. Регрессионный анализ

Понятие регрессии.

В практических исследованиях возникает необходимость *аппроксимировать (описать приблизительно)* диаграмму рассеяния *математическим уравнением.* То есть зависимость между переменными величинами Y и X можно выразить аналитически с помощью формул и уравнений и графически в виде геометрического места точек в системе прямоугольных координат. График корреляционной зависимости строится по уравнениям функции $\bar{y}_x = f(x)$ и $\bar{x}_y = f(y)$, которые называются *регрессией* (термин "регрессия" происходит от лат. *regressio* – движение назад). Здесь $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$ – средние арифметические из числовых значений зависимых переменных Y и X.

Для выражения регрессии служат эмпирические и теоретические ряды, их графики – *линии регрессии*, а также *корреляционные уравнения* (*уравнения регрессии) и коэффициент линейной регрессии*.

Показатели регрессии выражают корреляционную связь двусторонне, учитывая изменение средней величины $\bar{y}_x$ признака Y при изменении значений x_i признака X, и, наоборот, показывают изменение средней величины $\bar{x}_y$ признака X по измененным значениям y_i признака Y. Исключение составляют временные ряды, или ряды динамики, показывающие изменение признаков во времени. Регрессия таких рядов является односторонней.

Ряды регрессии, особенно их графики, *дают наглядное представление о форме и тесноте корреляционной связи между признаками*, в чем и заключается их ценность. Форма связи между показателями, влияющими на уровень спортивного результата и общей физической подготовки занимающихся физической культурой и спортом, может быть разнообразной. И поэтому задача состоит в том, чтобы любую форму корреляционной связи выразить уравнением определенной функции (линейной, параболической и т.д.), что позволяет получать нужную информацию о корреляции между переменными величинами Y и X, предвидеть возможные изменения признака Y на основе известных изменений X, связанного с Y корреляционно.

Уравнение линейной регрессии.

Обычно признак Y рассматривается как функция многих аргументов – $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ – и может быть записана в виде: $y = a + bx_1 + cx_2 + dx_3 + \ldots$, где a, b, c и d – параметры уравнения, определяющие соотношение между аргументами и функцией. В практике учитываются не все, а лишь некоторые аргументы, в простейшем случае, как при описании линейной регрессии, – всего один:

$$y = a + bx \qquad (2.4.1)$$

В этом уравнении параметр a – свободный член; графически он представляет отрезок ординаты (y) в системе прямоугольных координат. Параметр b называется *коэффициентом регрессии*. С точки зрения аналитической геометрии b – угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям, координат. В области регрессионного анализа этот параметр показывает, насколько в среднем величина одного признака (Y) изменяется при изменении на единицу меры другого корреляционно связанного с Y признака X. Наглядное представление об этом параметре и о положении линий регрессии Y по X и X по Y в системе прямоугольных координат дает рисунок 2.4.1.

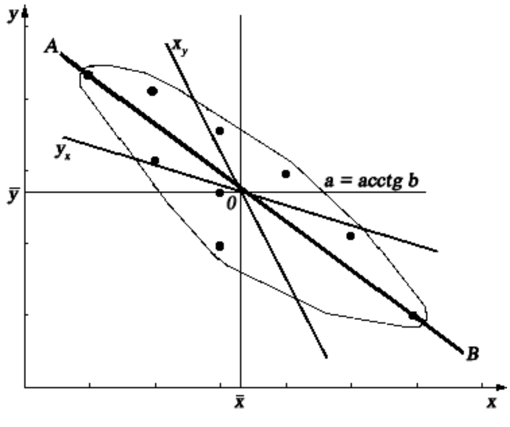


Рис. 2.4.1. Схема линий регрессии Y по X и X по Y в системе прямоугольных координат

Линии регрессии, как показано, пересекаются в точке $0\ (\bar{x}, \bar{y})$, соответствующей средним арифметическим значениям корреляционно связанных друг с другом признаков Y и X. Линия AB, проходящая через эту точку, изображает полную (функциональную) зависимость между переменными величинами Y и X, когда коэффициент корреляции $r = 1$. Чем сильнее связь между Y и X, тем ближе линии регрессии к AB, и, наоборот, чем слабее связь между варьирующими признаками, тем более удаленными оказываются линии регрессии от AB. При отсутствии связи между признаками, когда $r = 0$, линии регрессии оказываются под прямым углом (90°) по отношению друг к другу.

Уравнение регрессии тем лучше описывает зависимость, чем меньше рассеяние диаграммы, чем больше теснота взаимосвязи. Уравнение прямой линии пригодно для описания только линейных зависимостей. В случае нелинейных зависимостей математическая запись может отображаться уравнениями параболы, гиперболы и др.

Необходимо также сделать одно важное замечание о значении показателей, характеризующих взаимосвязь признаков (коэффициентов корреляции, регрессии и т. п.). Все они дают лишь количественную меру связи, но ничего не говорят о причинах зависимости. Определить эти причины – дело самого исследователя.

Коэффициенты уравнения парной линейной регрессии.

Как уже было определено выше, в случае линейной зависимости уравнение регрессии является уравнением прямой линии. Таких уравнений два:

$$Y = a_1 + b_{y/x} \cdot \bar{X} \text{ – прямое}$$

$$\text{и } X = a_2 + b_{x/y} \cdot \bar{Y} \text{ – обратное,} \qquad (2.4.2)$$

где a и b – коэффициенты, или параметры, которые надлежит определить.

Значение коэффициентов регрессии вычисляется по формуле:

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

и

$$b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2}. \qquad (2.4.3)$$

Коэффициенты регрессии b имеют размерность, равную отношению размерностей изучаемых показателей X и Y, и тот же знак, что и коэффициент корреляции.

Коэффициенты a определяются по формуле:

$$a_1 = \bar{Y} - b_{y/x} \cdot \bar{X} \quad \text{и} \quad a_2 = \bar{X} - b_{x/y} \cdot \bar{Y}. \qquad (2.4.4)$$

Чтобы вычислить этот коэффициенты, надо просто в уравнения регрессии подставить средние значения коррелируемых переменных.

Для оценки качества уравнений регрессии вычисляются *остаточные средние квадратические отклонения* (или *абсолютные погрешности уравнений*) по формуле:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2};$$

$$\sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2}. \qquad (2.4.5)$$

Эти оценки абсолютны и, следовательно, не могут быть сравнимы друг с другом. Поэтому вводят оценки *относительной погрешности уравнений*, которые выражаются в процентах и *служат для точности предсказания (прогнозирования) результатов одного показателя по заранее известным значениям другого*. Относительные погрешности уравнений регрессии определяются по формуле:

$$\sigma'_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\%;$$

$$\sigma'_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\%. \qquad (2.4.6)$$

Значение этой оценки, если $r = \pm 1$, равно нулю и, если $r = 0$, максимально. Остаточное среднее квадратическое отклонение характеризует колеблемость Y относительно линии регрессии по X в прямом уравнении регрессии и, наоборот, в обратном случае. А, следовательно, чем меньше величина относительной погрешности уравнения регрессии, тем точнее будет оно осуществлять прогноз значений одного показателя по заранее известным значениям другого.

Связь между коэффициентами регрессии и корреляции.

Между коэффициентом корреляции и параметром парной линейной регрессии существует зависимость, которая применительно к выборочным оценкам может быть представлена следующим образом:

$$b = r \cdot \frac{\sigma_{\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}}}, \qquad (2.4.7)$$

где $\sigma_{\bar{Y}}$ и $\sigma_{\bar{X}}$ – средние квадратические ошибки.

Приведенное выражение позволяет оценить параметр регрессии без решения системы нормальных уравнений при условии, что коэффициент корреляции уже определен. На основе формулы (2.4.7) легко показать, что *выборочный коэффициент корреляции* равен среднему геометрическому выборочных коэффициентов регрессии. Действительно, сравнив формулы (2.4.3) с основной формулой (2.3.1) коэффициента корреляции, видим, что их числители равны $\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$. Это свидетельствует об определенной связи между этими характеристиками. Выборочный коэффициент корреляции выражается тогда равенством $r^2 = b_{y/x} \cdot b_{x/y}$, откуда

$$r = \pm\sqrt{b_{y/x} \cdot b_{x/y}}. \qquad (2.4.8)$$

Эта формула ценна тем, что, во-первых, может быть использована для нахождения неизвестной величины коэффициента корреляции по известным значениям коэффициента регрессии $b_{y/x}$ и $b_{x/y}$, а во-вторых, позволяет контролировать правильность расчета коэффициента корреляции, если известны величины $b_{y/x}$ и $b_{x/y}$. Знак выборочного коэффициента корреляции совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии, что следует из формулы (2.4.3). Если зависимость между признаками функциональная, то $b_{y/x} = \frac{1}{b_{x/y}}$ и, следовательно, $r = 1$. И, наоборот, при полном отсутствии взаимосвязи между признаками $b_{y/x} = 0$, $b_{x/y} = 0$ и $r = 0$.

Определение параметров парной линейной регрессии.

Определение параметров линейной регрессии – одна из задач регрессионного анализа. Она решается способом наименьших квадратов, основанным на требовании, чтобы сумма квадратов отклонений вариант от линии регрессии была наименьшей. Этому требованию удовлетворяет следующая система нормальных уравнений:

$$an + b\sum x = \sum y,$$
$$a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy.$$

Ряды регрессии – это ряды усредненных значений (y_x и x_y) варьирующих признаков Y и X, соответствующих значениям аргументов y_i и x_i. Поэтому эмпирические уравнения регрессии следует записывать так:

$$y_x = a_{y/x} + b_{y/x} \cdot x \quad \text{и} \quad x_y = a_{x/y} + b_{x/y} \cdot y. \qquad (2.4.9)$$

Формулы для определения параметров a и b принимают следующие выражения:

$$a_{y/x} = \bar{y} - b_{y/x} \cdot \bar{x};$$
$$a_{x/y} = \bar{x} - b_{x/y} \cdot \bar{y}. \qquad (2.4.10)$$

Уравнение линейной регрессии можно выразить в виде отклонений вариант от их средних арифметических:

$$y_x - \bar{y} = b_{y/x} \cdot (x_i - \bar{x});$$
$$x_y - \bar{x} = b_{x/y} \cdot (y_i - \bar{y}). \qquad (2.4.11)$$

В таком случае система нормальных уравнений для определения параметров a и b будет следующая:

$$an + b\sum(x_i - \bar{x}) = \sum(y_i - \bar{y});$$
$$a\sum(x_i - \bar{x}) + b\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}).$$

Поскольку $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ и $\sum(y_i - \bar{y}) = 0$, то параметр b выразится в виде приведенной формулы (2.2.3); параметр a легко найти по формуле (2.4.4).

Если средние $\bar{y}$ и $\bar{x}$ перенести в правую часть уравнения (2.4.11), то при $a = \bar{y}$ система нормальных уравнений принимает следующий вид:

$$y_x = \bar{y} + b_{y/x} \cdot (x_i - \bar{x});$$
$$x_y = \bar{x} + b_{x/y} \cdot (y_i - \bar{y}). \qquad (2.4.12)$$

Заменив в формуле (2.4.12) параметры $b_{y/x}$ и $b_{x/y}$ на их значения из формулы (2.4.3), получим систему уравнений парной линейной регрессии:

$$y_x = \bar{y} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x});$$
$$x_y = \bar{x} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y}). \qquad (2.4.13)$$

Эти уравнения удобны для определения параметров при отыскивании эмпирических уравнений регрессии в практической работе для точности прогнозирования результатов.

Графическое представление уравнения парной линейной регрессии.

Эмпирические ряды регрессии Y по X и X по Y изображаются в виде линейного графика, при построении которого наиболее точным является использование *способа наименьших квадратов,* предложенного в 1806 г. К. Гауссом и независимо от него А. Лежандром. В основу этого способа положена теорема, согласно которой сумма квадратов отклонений вариант (x_i) от среднего арифметического ($\bar{x}$) есть величина наименьшая, т. е. $\sum\ (x_i-\bar{x})^2=min$. Отсюда и название метода, который нашел широкое применение не только в биологии, но и в технике. Мы уже говорили об этом методе и применяли его, когда находили параметры a и b линейной регрессии, отыскивая эмпирическое уравнение.

При графическом изображении эмпирического уравнения регрессии (например, показатели роста и веса 10 исследуемых спортсменов), представленного на рисунке 2.4.2 используется следующая последовательность:

1. Определив форму и направление взаимосвязи между эмпирическими данными на основе данных расчета нормированного коэффициента корреляции, производят расчет уравнений регрессии (прямого и обратного) по формуле (2.4.13).

2. Подставляя в конечный вид уравнений, выражающих зависимость между переменными величинами Y и X, эмпирические данные x_i и y_i находят координаты точек линий регрессии для усредненных значений y_x и x_y.

3. На графике, выполненном в прямоугольной системе координат, на оси x откладывают значения переменных x_i, на оси y – значения y_i и отмечают точками рассчитанные координаты линий регрессии для усредненных значений y_x и x_y (рис. 2.4.2).

4. Две линии регрессии на графике пересекаются в точке M с координатами средних значений показателей x_i и y_i.

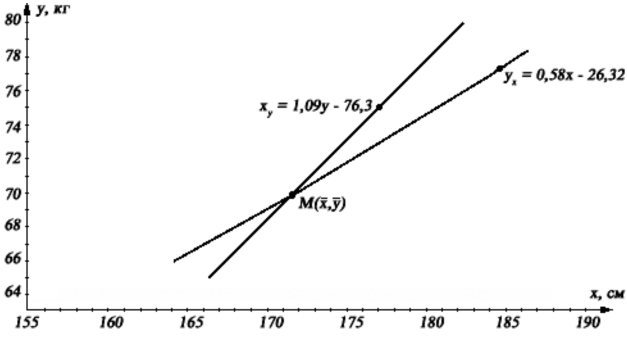


Рис. 2.4.2. Графическое изображение эмпирического уравнения регрессии

График линий регрессии отражает ряды теоретически ожидаемых значений функции по известным значениям аргумента. При этом, чем сильнее взаимосвязь между величинами x_i и y_i, тем меньше угол между линиями регрессии. При $r = \pm 1$ линии уравнения регрессии либо совпадают, либо расположены параллельно, так как корреляционная зависимость между признаками в этом случае переходит в функциональную. И, наоборот, чем слабее зависимость между признаками, тем больше угол между линиями на графике. При $r = 0$ линии регрессии расположены перпендикулярно.

Пример 2.4.1. Рассчитать и построить график уравнения прямолинейной регрессии для показателей роста и веса 8 исследуемых и сделать вывод о точности расчета уравнений, если данные выборок таковы:

x_i, см ~ 166; 180; 173; 174; 185; 179; 168; 171;

y_i, кг ~ 63; 75; 70; 70; 73; 75; 65; 70.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем соответствующие расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
166	-9	81	63	-7	49	63
180	5	25	75	5	25	25
173	-2	4	70	0	0	0
174	-1	1	70	0	0	0
185	10	100	73	3	9	30
179	4	16	75	5	25	20
168	-7	49	65	-5	25	35
171	-4	16	70	0	0	0
$\bar{x} =$ 175		$\sum(x_i - \bar{x})^2$ = 292	$\bar{y} =$ 70		$\sum(y_i - \bar{y})^2$ = 133	$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ = 173

2. Рассчитаем значение нормированного коэффициента корреляции по формуле (2.3.1):

$$r_{xy}^P = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{173}{\sqrt{292 \cdot 133}} \approx \frac{173}{197{,}07} \approx 0{,}88.$$

3. Произведем расчет конечного вида уравнений парной линейной регрессии по формуле (2.4.13):

$$y_x = \bar{y} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x}) = 70 + \frac{173}{292} \cdot (x - 175) \approx 70 + 0{,}59x - 103{,}25 \approx$$
$$\approx 0{,}59x - 33{,}25;$$

$$x_y = \bar{x} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y}) = 175 + \frac{173}{133} \cdot (y - 70) \approx 175 + 1{,}3y - 91 \approx$$
$$\approx 1{,}3y + 84.$$

То есть ух = 0,59х – 33,25; ху = 1,3у + 84.

4. Рассчитаем абсолютные погрешности уравнений регрессии по формуле (2.4.5):

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{\frac{292}{7}} \cdot \sqrt{1 - 0{,}7744} \approx 3{,}07 \quad \text{кг};$$

$$\sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{\frac{133}{7}} \cdot \sqrt{1 - 0{,}7744} \approx 2{,}07 \quad \text{см}.$$

5. Рассчитаем относительные погрешности уравнений регрессии по формуле (2.4.6):

$$\sigma^{/}_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{3{,}07}{70} \cdot 100\% \approx 4{,}39\%;$$

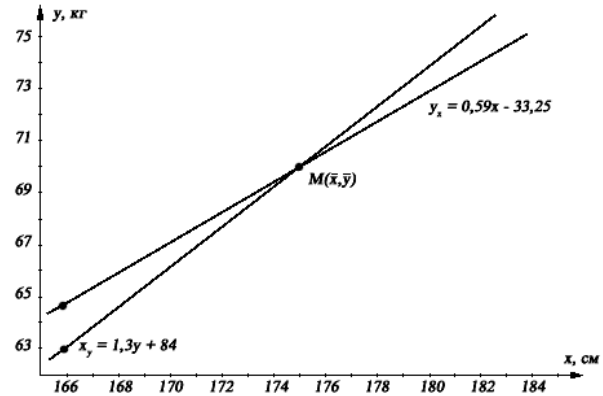
$$\sigma^{/}_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{2{,}07}{175} \cdot 100\% \approx 1{,}18\%.$$

6. Для графического представления корреляционной зависимости между признаками рассчитаем координаты линий регрессии, подставив в конечный вид уравнений регрессии данные любого исследуемого (например, первого из списка).

Тогда: 1. при $x = 166$ см $y = 64{,}69$ кг $\approx 64{,}7$ кг;

2. при $y = 63$ кг $x = 165{,}9$ см ≈ 166 см.

7. Построим график данного уравнения регрессии и сделаем вывод.



Вывод: 1) с уверенностью в 99% можно утверждать, что в исследуемой группе наблюдается тесная положительная взаимосвязь между показателями роста и веса, т.к. rxy = 0,88 > rst = 0,83 для k = 6 (прилож. 7);

2) относительная погрешность xy = 1,3y + 84 меньше (1,18%), следовательно, более точно прогнозировать показатель роста исследуемых по данным их веса;

3) на графике линии уравнения регрессии располагаются под острым углом, так как значения коэффициента корреляции близки к единице.

Пример 2.4.2. Рассчитать и построить график уравнения прямолинейной регрессии для относительных значений PWC_{170} и времени челночного бега 3х10 м у 13 исследуемых и сделать вывод о точности расчета уравнений, если данные выборок таковы:

x_i, кГ м/мин/кг ~ 15,6; 13,4; 17,9; 12,8; 10,7; 15,7; 11,7; 12,3; 12,3; 11,1; 14,3; 12,7; 14,4;

y_i, с ~ 6,9; 7,2; 7,1; 6,7; 7,6; 7,0; 6,4; 6,9; 7,7; 7,6; 7,9; 8,2; 6,8.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем соответствующие расчеты.

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
15,6	2,1	4,41	6,9	-0,3	0,09	-0,63
13,4	-0,1	0,01	7,2	0	0	0
17,9	4,4	19,36	7,1	-0,1	0,01	-0,44
12,8	-0,7	0,49	6,7	-0,5	0,25	0,35
10,7	-2,8	7,84	7,6	0,4	0,16	-1,12
15,7	2,2	4,84	7,0	-0,2	0,04	-0,44
11,7	-1,8	3,24	6,4	-0,8	0,64	1,44
12,3	-1,2	1,44	6,9	-0,3	0,09	0,36
12,3	-1,2	1,44	7,7	0,5	0,25	-0,60
11,1	-2,4	5,76	7,6	0,4	0,16	-0,96
14,3	0,8	0,64	7,9	0,7	0,49	0,56
12,7	-0,8	0,64	8,2	1	1	-0,80
14,4	0,9	0,81	6,8	-0,4	0,16	-0,36
$\bar{x} =$ 13,5		$\sum(x_i - \bar{x})^2 =$ = 50,92	$\bar{y} = 7,2$		$\sum(y_i - \bar{y})^2 =$ = 3,34	$\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) =$ = -2,64

2. Рассчитаем значение нормированного коэффициента корреляции по формуле (2.3.1):

$$r_{xy}^{P} = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-2,64}{\sqrt{50,92 \cdot 3,34}} \approx \frac{-2,64}{13,04} \approx -0,20.$$

3. Произведем расчет конечного вида уравнений парной линейной регрессии по формуле (2.4.13):

$$y_x = \bar{y} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x}) = 7,2 + \frac{-2,64}{50,92} \cdot (x - 13,5)$$
$$\approx 7,2 - 0,05x + 0,675 \approx 7,875 - 0,05x;$$

$$x_y = \bar{x} + \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y}) = 13,5 + \frac{-2,64}{3,34} \cdot (y - 7,2) \approx$$
$$\approx 13,5 - 0,79y + 5,688 \approx 19,188 - 0,79y.$$

То есть yx = 7,875 – 0,05x; xy = 19,188 – 0,79y.

4. Рассчитаем абсолютные погрешности уравнений регрессии, используя формулу (2.4.5):

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{\frac{3,34}{12}} \cdot \sqrt{1 - 0,04} \approx 0,52 \quad c;$$

$$\sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2} = \sqrt{\frac{50,92}{12}} \cdot \sqrt{1 - 0,04} \approx 2,02 \quad \text{кГм/мин/кг}.$$

5. Рассчитаем относительные погрешности уравнений регрессии по формуле (2.4.6):

$$\sigma'_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{0,52}{7,2} \cdot 100\% \approx 7,22\%;$$

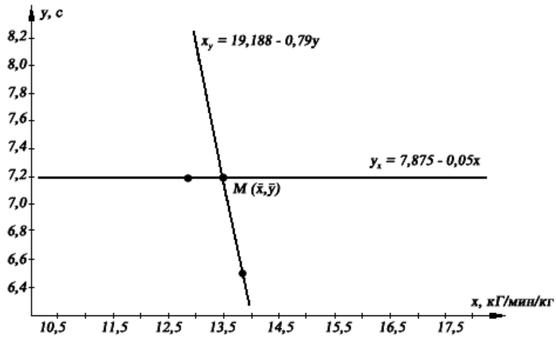
$$\sigma'_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{2,02}{13,5} \cdot 100\% \approx 14,96\%.$$

6. Для графического представления корреляционной зависимости между признаками рассчитаем координаты линий регрессии, подставив в конечный вид уравнений регрессии данные любого исследуемого (например, четвертого из списка):

Тогда: 1) при x = 12,8 кГм/мин/кг y = 7,235 с ≈ 7,2 с;

2) при y = 6,7 с x = 13,895 кГм/мин/кг ≈ 13,9 кГм/мин/кг.

7. Построим график данного уравнения регрессии и сделаем вывод.



Вывод: 1) в исследуемой группе наблюдается недостоверная обратная взаимосвязь между данными относительных значений PWC170 и времени челночного бега 3x10 м, т.к. rxy = -0,20 < rst = 0,55 для k = 11 при β= 95% (прилож. 7);

2) относительная погрешность y = 7,875 – 0,05x меньше (7,22%), следовательно, более точно прогнозировать результат в челночном беге по данным относительных значений пробы PWC170;

3) на графике линии уравнения регрессии расположены почти под прямым углом, так как значения коэффициента корреляции близки к нулю.

Коэффициент детерминации.

Квадрат коэффициента корреляции называется *коэффициентом детерминации* (D), и в некоторых случаях тесноту взаимосвязи определяют на основании его расчета, который производится по формуле:

$$D = r^2 \cdot 100\%. \qquad (2.4.14)$$

Этот коэффициент определяет часть общей вариации одного показателя, которая объясняется вариацией другого показателя. Иначе говоря, коэффициент детерминации является мерой определенности линейной регрессии. Чем больше коэффициент детерминации, тем меньше наблюдаемые значения y_i при каждом значении x_i отклоняются от линии регрессии Y на X, тем точнее определена линия регрессии. Так, например, если r = 0,90, то D = 81 % общего рассеяния значений y_i (характеризуемого дисперсией $\sigma^2_{y/x}$) можно объяснить линейной связью с изменяющимися значениями x_i.

Пример 2.4.3. 10 студентов первого курса, специализирующиеся в легкой атлетике, были подвергнуты испытаниям в следующих контрольных упражнениях (тестах): беге с ходу на дистанции 30 м (результаты в секундах – x_i) и тройном прыжке с места (результаты в метрах – y_i). Определить тесноту взаимосвязи между данными проведенных тестов с помощью расчета коэффициента детерминации.

Решение.

1. Данные тестирования заносим в рабочую таблицу и сделаем необходимые расчеты.

x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
3,5	-0,13	0,0169	8,05	0,72	0,5184	-0,094
3,6	-0,03	0,0009	7,34	0,01	0,0001	0,000
3,6	-0,03	0,0009	7,37	0,04	0,0016	-0,001
3,6	-0,03	0,0009	7,77	0,44	0,1936	-0,013
3,8	0,17	0,0289	7,04	-0,29	0,0841	-0,049
3,7	0,07	0,0049	7,17	-0,16	0,0256	-0,011
3,9	0,27	0,0729	6,50	-0,83	0,6889	-0,224
3,4	-0,23	0,0529	8,15	0,82	0,6724	-0,189
3,6	-0,03	0,0009	6,98	-0,35	0,1225	0,010
3,6	-0,03	0,0009	6,97	-0,36	0,1296	0,011
$\bar{x}$=3,63		$\sum(x_i-\bar{x})^2$=0,181	$\bar{y}$=7,33		$\sum(y_i-\bar{y})^2$=2,4368	$\sum(x_i-\bar{x})\cdot(y_i - -\bar{}y)$=-0,560

2. Рассчитаем значение нормированного коэффициента корреляции Пирсона, используя формулу (2.3.1):

$$r^P_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{-0{,}560}{\sqrt{0{,}181\cdot 2{,}4368}} \approx \frac{-0{,}560}{0{,}664} \approx -0{,}84.$$

3. Рассчитаем для вычисленного значения r = -0,84 значение коэффициента детерминации, используя формулу (2.3.2):

$$D = (-0{,}84)^2\cdot 100\% = 70{,}56\%.$$

Вывод: следовательно, только 70,56% взаимосвязи спортивного результата в беге на 30 м и в тройном прыжке объясняется их взаимовлиянием. Остальная часть (100% – 70,56% = 29,44%) вариации объясняется влиянием других неучтенных факторов.

2.5. Интерпретация данных спортивно-педагогических исследований

Интерпретация (лат. interpretatio «разъяснение, толкование; перевод») – это совокупность значений (смыслов), придаваемых элементам (выражениям, формулам, символам и т. д.) какой-либо теории.

Интерпретация данных состоит в превращении полученных данных в показатели – количественные и качественные. В ее процессе проводится оценка путем соотнесения результатов исследования с проблемой, гипотезой, целью и задачами исследования. В основе объяснения результатов всегда лежат предположения автора исследования и теоретические положения, составляющие модель исследования. Именно при объяснении полученных числовых величин подтверждаются или опровергаются предположения по поводу поведения или характеристик объекта в изучаемой теме.

При интерпретации могут использоваться следующие способы соотнесения данных:

– со знаниями и установками исследователя – оценка исследователя, которая отражает позицию, основанную на знании конкретной обстановки, предыдущем опыте;

– внутреннее соотнесение – сравнение между собой элементов числового ряда по двум или более признакам. Например, можно сравнить распределение учащихся школы, среди которых есть сторонники и противники предпрофильной подготовки по признаку осознанности выбора профессии. Эта процедура дает возможность однозначно интерпретировать принцип группировки, когда в числовом ряде выделяется наибольшая величина (модальная). Соотнесение заключается в ранжировании групп, т. е. расположении величин от большего к меньшему по их значению;

– внешнее соотнесение – сравнение между собой изучаемых групп в соотнесении с некоторыми внешними признаками, факторами. Такое соотнесение чаще всего проводится в опытно-экспериментальной работе, когда проводится изучение того, как влияют условия или средства эксперимента на изучаемую переменную, и с этой целью формируются контрольная и экспериментальная группа.

Интерпретация нужна для того, чтобы информация преобразовалась в знание. Интерпретируя те или иные объекты, явления, исследователь выявляет различные аспекты полученной о них информации, оценивает ее возможности в решении задач исследования, выдвигает предположения о причинах явления, о возможных мотивах участников педагогической ситуации и т.д.

С традиционной точки зрения интерпретация представляет собой процесс анализа, синтеза и оценки информации с целью определения ее важности и полезности для конкретного исследования. Наряду с другими приемами интерпретация – важная составляющая методов спортивно-педагогического исследования.

В интерпретации информации выделяют такую последовательность действий:

– предположения;

– определение достоверности информации;

– рефлексия и «процеживание информации» (что в полученной информации отражает собственную точку зрения исследователя, является следствием стереотипов, предвзятости и т.д.);

– организация информации;

– сравнение с данными других источников, с другими ситуациями и т.п.;

– анализ;

– выявление причины и следствия;

– синтез;

– выводы;

– оценка информации для подтверждения или опровержения гипотезы исследования.

Используя в спортивно-педагогическом исследовании эмпирические данные, термины, теоретические выводы, положения, закономерности других наук, необходимо:

– во-первых, выявить, «расшифровать» тот смысл, который заключается в данном выводе, положении, закономерности с точки зрения «иной» науки;

– во-вторых, выявить педагогический смысл этого вывода, положения, закономерности.

Интерпретация любого знания в спортивно-педагогическом исследовании должна носить гуманитарный характер. Иначе говоря, – осмысливать и истолковывать данные других наук следует с позиций их соотнесенности с проблемами человека.

В процессе интерпретации необходимо постоянно соотносить научное знание и эмпирический опыт, поскольку гуманитарное знание основано на признании уникальности каждого человека, которая может быть постигнута не в рамках научных закономерностей, а только опытным путем.

При интерпретации результатов исследования следует проявлять объективность и не приписывать себе слишком больших заслуг во влиянии на объекты исследования.

Рассмотрим наиболее типичные ошибки, допускаемые при интерпретации.

1. Обобщение по отношению к объектам. Предположим, что опытно-экспериментальная работа проведена на 30 испытуемых – подростках в возрасте от 12 до 15 лет, в том числе 10 мальчиков, 20 девочек, принадлежащих к семьям из среднего класса, жителям крупного города, обучающихся в общеобразовательной школе. Нужно решить следующую проблему, на какую популяцию распространить результаты? Предельным обобщением будет отнесение выводов ко всем учащимся общеобразовательных школ. Ограничителями обобщения выступают характеристики популяции: 1) биологические и 2) социокультурные.

К основным биологическим характеристикам относятся пол, возраст, раса, конституциональные особенности, физическое здоровье. Социокультурные особенности – уровень образования и уровень доходов испытуемых, классовая принадлежность и т. д.

Следовательно, выводы можно распространить только на ту группу, которая обозначена в описании выборки. Даже на жителей других населенных пунктов эти выводы можно распространять с большим допущением и только в том случае, если в ходе планирования исследования и формирования экспериментальной выборки соблюдалось требование репрезентативности.

Для проверки выводов, во-первых, проводят дополнительные эксперименты на группах представителей той же популяции, не вошедших в первоначальную выборку. Во-вторых, стремятся максимально увеличить в уточняющих экспериментах численность экспериментальной и контрольных групп.

2. Условия исследования. В какой мере влияют на результаты опытно-экспериментальной работы условия деятельности испытуемого? На этот вопрос нельзя ответить, ограничившись проведением одного эксперимента. Исследователь должен варьировать в последующих экспериментальных сериях дополнительные переменные, чтобы установить, являются ли результаты инвариантными.

3. Экспериментатор. При проведении опытной работы исследователь может неосознанно влиять на ее ход – немного по-иному вести себя в экспериментальном классе, выделять тех или иных учащихся и т. д. Влияние личностных черт, мотивации, компетентности исследователя часто проявляется в ходе эксперимента. Для того чтобы этого избежать, необходимо либо проводить работу на очень больших выборках, либо привлекать к проведению работы других педагогов.

Кроме цели и гипотезы исследования, при интерпретации важно опираться на критерии и показатели оценки результатов. Именно они позволят определить значимость результата.

По завершении работы на этапах обобщения и интерпретации переходят к оформлению результатов исследования.

1. Необходимо следовать требованиям к оформлению текста (поля, размер шрифта, интервал, требования к оформлению графиков, таблиц, приложений, списков литературы, ссылок и т. д.), обозначенным в методических рекомендациях.

2. Структура большинства работ обычно такова:

– введение, в котором определяется актуальность и новизна исследования, его научный аппарат;

– первая глава, посвященная теоретическому анализу проблемы и разработке собственной модели исследования;

– вторая глава, в которой описывается ход и результаты опытно-экспериментальной работы;

– третья глава – может быть по условиям написания выпускной квалификационной работы;

– заключение, в котором делаются основные выводы исследования;

– список использованных источников;

– приложения.

3. При оформлении таблиц, графиков, гистограмм необходимо обращать внимание на то, что они:

– должны максимально отражать результаты исследования;

– не должны быть перегруженными;

– должны быть снабжены подписями всех граф и условных обозначений;

– в них необходимо легко ориентироваться и находить сравниваемые величины;

– текст не должен быть перегружен таблицами и гистограммами, при необходимости часть из их помещается в приложения.

4. Все таблицы, графики и гистограммы должны иметь словесное описание и выводы.

5. При написании работы серьезное внимание следует уделить ее языку и стилю. В основе текста лежит формально-логический способ изложения, для которого характерны смысловая законченность, целостность и связность, специальная терминология и фразеология. Работа должная быть внимательно вычитана.

Моделирование – воспроизведение характеристик некоторого объекта на другом объекте, который называется моделью. Между моделью и оригиналом существует отношение ограниченного подобия, форма которого ясно выражена: в процессе научного познания модель заменяет оригинал; изучение модели дает информацию об оригинале. Модель – результат синтеза выделенных в процессе анализа существенных признаков диагностируемого объекта.

Модель – это система объектов или знаков, воспроизводящая некоторые существенные свойства системы-оригинала. Само исследование невозможно без параллельного моделирования, т.е. выделения существенных моментов исследуемого объекта в совокупности их взаимосвязей и взаимозависимостей.

Идеализация – мыслительный акт, связанный с образованием некоторых абстрактных объектов, принципиально не осуществимых в опыте и действительности. Идеализированные объекты служат средством научного анализа реальных объектов, основой для построения теории этих объектов. Модели в спортивно-педагогическом исследовании являются именно такими идеализированными объектами. Истинная наука, как известно, возможна лишь на основании абстрактного мышления, последовательных рассуждений, протекающих в логической и языковой формах в виде понятий, суждений, выводов.

Важнейшим средством моделирования в педагогических исследованиях является аналогия.

Аналогия (от греч. analogia – пропорция, соразмерность) – соответствие элементов, совпадение ряда свойств или какое-либо иное отношение между объектами, явлениями и процессами, дающее основание для переноса информации, полученной при исследовании одного объекта – модели, на другой – прототип (так называемое отношение объективного подобия). Под аналогией понимается также мыслительная операция – умозаключение о принадлежности объекту, явлению или процессу определенного признака, свойства или отношения на основе сходства в существенных признаках с другим объектом (явлением, процессом).

В науковедении различают следующие функции аналогии:

– аналогия может служить средством конкретизации отвлеченных идей и проблем, разъяснения непонятных фактов, положений, теорий, категорий, использоваться с целью представления абстрактного в более доступной, образной форме;

– по аналогии можно рассуждать об объектах, недоступных прямому наблюдению;

– аналогия часто используется в качестве метода решения исследовательских задач посредством сведения их к ранее решенным задачам;

– аналогия служит средством выдвижения гипотез;

– аналогия может выступать как средство обобщения и систематизации информации, поскольку позволяет получить детальное представление о ряде сходных объектов, выделить в них наиболее существенные черты, сопоставить их и таким образом получить обобщенное знание;

– аналогия устанавливает связь между различными областями знания и тем самым сближает их.

В современной науке аналогия трактуется не как формальное умозаключение, а как эвристический вывод, дающий выход на новое знание. Здесь особенно важно «сходство несходного», т.е. умение находить принципиальное, существенное сходство в предметах и явлениях, внешне друг с другом несхожих (так называемая аналогия противоположностей).

Выводы по аналогии в спортивно-педагогическом исследовании носят вероятностный характер, однако корректное выделение линий, по которым проводится сопоставление, позволяет существенно повысить уровень достоверности таких выводов и выстроить эффективные модели образовательных феноменов.

Другим средством конструирования моделей является *дедуктивное моделирование*. Исследователь исходит из самых общих положений, составляющих модель. Статистически, с помощью выбранного математического аппарата эта модель проверяется. Применение дедуктивного (математического) моделирования тесно связано с глубоким познанием сущности явлений и процессов, углублением теоретических основ спортивно-педагогического исследования.

В процессе моделирования мы получаем новое знание о каком-либо объекте. Базой вывода при этом служит модель, т.е. некоторая известная система отношений, присущая другому объекту или абстрактной конструкции. Это становится возможным благодаря следующим функциям модели:

– формально упорядочивает, структурирует имеющиеся данные;

– визуализирует представления о структуре изучаемого объекта;

– дает возможность перехода к методикам и технике сбора данных, к диагностическим процедурам.

Главный результат построения исследовательской модели, которая упорядочивает представления о причинно-следственных взаимозависимостях между компонентами исследуемого объекта, закономерностях процесса его становления, – прогноз развития.

Прогностические выводы (о зоне ближайшего развития, о возможных затруднениях и т.д.) становятся основанием для выбора оптимальной стратегии обучения и воспитания, помощи в. преодолении объективных затруднений в развитии. Как правило, рекомендуется разбивать прогноз на отдельные периоды, чтобы впоследствии можно было его конкретизировать и уточнять.

Индукция – это метод исследования, позволяющий производить обобщение, устанавливать по частным фактам и явлениям общие принципы и законы. Так, анализ некоторого количества частных педагогических фактов дает возможность вывести общие для них закономерности, известные и неизвестные в науке.

Индукция осуществляется через абстрагирование (мысленное отвлечение от несущественных свойств, связей, отношений предметов и одновременное выделение, фиксирование одной или нескольких интересующих исследователя сторон этих предметов). Существует несколько приемов абстрагирования, используемых в зависимости от характера реальных объектов и цели абстрагирования:

– если необходимо образовать общее понятие о каком-то классе предметов, обычно применяется обобщающая абстракция, иначе – абстракция отождествления. Обобщающая абстракция образуется путем выделения у многих предметов общих одинаковых признаков;

– изолирующая, или аналитическая, абстракция не предполагает наличия многих предметов, ее можно совершить, имея всего один предмет, при этом аналитическим путем вычленяется нужное нам свойство с фиксированием на нем нашего внимания;

– идеализация как прием абстрагирования акцентирует внимание на существенных признаках, отсутствующих в чистом виде.

Дедукция – такой метод исследования, который позволяет частные положения в процессе конкретизации выводить из общих закономерностей, подводить их под понятие. Так, на основе теоретического знания о структуре процесса обучения строится исследование процесса изучения конкретного учебного материала. Конкретизация позволяет лучше понять общее.

Литература

1. Белоус В.А. Организация научных исследований по физической культуре в вузе : учебно-методическое пособие / В.А. Белоус, В.А. Щеголев, Ю.Н. Щедрин. – СПб. : СПбГУИТ – МО, 2005. – 72 с.
2. Губа В.П. Методы математической обработки результатов спортивно-педагогических исследований / В.П. Губа, В.В. Пресняков. – М. : Человек, 2015. – 288 с.
3. Загвязинский В.И. Методология и методы психолого-педагогического исследования : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.И. Загвязинский, Р.А. Атаханов. – 2-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2005. – 208 с.
4. Калинин А.Г. Обработка данных методами математической статистики : монография / А.Г. Калинин. – Чита : ЗИП СибУПК, 2015. – 106 с.
5. Капилевич Л.В. Научные исследования в физической культуре : учеб. пособие. – Томск : Томский государственный университет, 2013. – 184 с.
6. Капилевич Л.В. Научные исследования в физической культуре : учеб. пособие. – Томск : Томский государственный университет, 2013. – 184 с.
7. Килин П.М. Статистические методы обработки данных : учебное пособие / П.М. Килин, Н.И. Чекмарева. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2013. – 128 с.
8. Костенко Е.Г. Совершенствование методики преподавания дисциплины «Компьютерные технологии обработки и анализа результатов измерений в области физической культуры и спорта» для магистров вуза физической культуры и спорта / Е.Г. Костенко, О.С. Толстых, В.В. Лысенко // Педагогический журнал. – 2018. – Т. 8, № 5А. – С. 264–276 .
9. Костенко Е.Г. Современные информационные технологии как способ контроля, объективного анализа учебно-исследовательской деятельности спортсмена / Е.Г. Костенко, О.С. Толстых // Образование и наука в России и за рубежом. – 2018. – №9 (44). – С. 274–280.
10. Костенко Е.Г. Учебно-исследовательская деятельность студентов физкультурного вуза как условие компетентностной модели профессионального образования / Е.Г. Костенко, О.С. Толстых // Педагогические науки. – 2018. – № 4 (91). – С. 32–35.
11. Костенко Е.Г. Анализ и обработка результатов совершенствования методики занятий в оздоровительной группе детей младшего школьного возраста / Е.Г. Костенко, В.Л. Соколов, О.С. Толстых [и др.] // Современный ученый. – 2019. – № 1. – С. 82–90.
12. Костенко Е.Г. Интерпретирование количественных данных спортивно-педагогических исследований / Е.Г. Костенко, О.С Толстых // Мир педагогики и психологии. – 2019. – №5 (34). – С. 102–109.
13. Костенко Е.Г. Математика : учебное пособие / Краснодар : Кубанский государственный университет физической культуры, спорта и туризма, 2019.
14. Костенко Е.Г. Методология модернизации занятий в оздоровительной группе с детьми младшего школьного возраста / Е.Г. Костенко, В.Л. Соколов // Образование: опыт и перспективы развития (Чувашский республиканский институт образования). – Чебоксары, 2019. – С. 52–62.
15. Костенко Е.Г. Современные информационные технологии как способ контроля, объективного анализа учебно-исследовательской деятельности спортсменов / Е.Г. Костенко, О.С. Толстых // Образование и наука в России и за рубежом. – 2018. – №9 (vol. 44). – С. 274–280.

16. Костенко Е.Г. Учебно-исследовательская деятельность студентов физкультурного вуза как условие компетентностной модели профессионального образования / Е.Г. Костенко, О.С. Толстых // Педагогические науки. – № 4(91). – С. 32–35.

17. Лысенко В.В. Основы математической обработки измерений в физической культуре : учебное пособие / В.В. Лысенко, Е.В. Мирзоева. – Краснодар : Кубанский государственный университет физической культуры, спорта и туризма, 2012. – 212 с.

18. Мирзоева Е.В. К вопросу о повышении качества профессиональной подготовки бакалавра физической культуры / Е.В. Мирзоева // Alma mater (Вестник высшей школы). – 2018. – № 9. – С. 68–70.

19. Мирзоева Е.В. Математическое обеспечение тренировочного процесса / Е.В. Мирзоева // Педагогические науки. – 2015. – №5(74). – С. 48–51.

20. Мирзоева Е.В. Методические рекомендации по структуре и оформлению выпускной квалификационной работы : учебно-методическое пособие / Е.В. Мирзоева, С.С. Воеводина, М.Г. Коваленко [и др.]. – Краснодар, 2019.

21. Мирзоева Е.В. Спортивная метрология : учебное пособие для вузов / Е.В. Мирзоева, В.В. Лысенко. – Краснодар: КГУФКСТ, 2012. – 320 с.

22. Новиков А.М. Как работать над диссертацией : пособие для начинающего педагога-исследователя. – 4-е изд. – М. : Эгвес, 2003. – С. 57.

23. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). – М. : МЗ-Пресс, 2004. – 67 с.

24. Петров П.К. Математико-статистическая обработка и графическое представление результатов педагогических исследований с использованием информационных технологий : учеб. пособие / П.К. Петров. – 2-е изд., испр. и доп. – Ижевск: ИЦ «Удмуртский университет», 2016. – 176 с.

25. Просветова Т.С. Методология и методы психолого-педагогических исследований : учебное пособие / Т.С. Просветова. – Воронеж: ВГПУ, 2006. – 210 с.

26. Середенко П.В. Психолого-педагогическое исследование: методология и методы : учебное пособие для студ. высш. учеб. заведейй / П.В. Середенко. – Южно-Сахалинск : СахГУ, 2010. – 188 с.

27. Соколов В.Л. Методические аспекты модернизации занятий в группе «Здоровья» с детьми младшего школьного возраста / В.Л. Соколов, Е.Г. Костенко, А.П. Костенко // Педагогический журнал. – 2018. – Т. 8, № 5А. – С. 26–34.

28. Соколов В.Л. Анализ свойств личности квалифицированных акробатов, специализирующихся в парах / В.Л. Соколов, Е.Г. Костенко, В.В. Лысенко // Современный ученый. – 2019. – №3. – С. 80–84.

29. Соколов В.Л. Совершенствование свойств личности квалифицированных акробатов / В.Л. Соколов, Е.Г. Костенко, Н.А. Амбарцумян // Colloquium – journal. – 2019. – № 14-4 (38). – С. 158–160.

30. Толстых О.С. Обработка экспериментальных данных в физической культуре и спорте средствами современных информационных технологий / О.С. Толстых, Е.Г. Костенко, А.П. Костенко // Педагогические науки. – 2018. – № 4 (91). – С. 29–31.

31. Шорохова И.С. Статистические методы анализа : учеб. пособие / И.С. Шорохова, Н.В. Кисляк, О.С. Мариев. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. – 300 с.

Приложения

Приложение 1

T - критерий Стьюдента для трех уровней доверительной вероятности /β/ и числа степеней свободы /k/

k	β			k	β		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,7	63,66	-	20	2,09	2,85	3,85
2	4,30	9,92	31,60	21	2,08	2,83	3,82
3	3,18	5,84	12,92	22	2,07	2,82	3,79
4	2,78	4,60	8,61	23	2,07	2,81	3,77
5	2,57	4,03	6,87	24	2,06	2,80	3,75
6	2,45	3,71	5,96	25	2,06	2,79	3,73
7	2,37	3,50	5,41	26	2,06	2,78	3,71
8	2,31	3,36	5,04	27	2,05	2,77	3,69
9	2,26	3,25	4,78	28	2,05	2,76	3,67
10	2,23	3,17	4,59	29	2,05	2,76	3,66
11	2,20	3,11	4,44	30	2,04	2,75	3,65
12	2,18	3,05	4,32	40	2,02	2,70	3,55
13	2,16	3,01	4,22	60	2,00	2,66	3,46
14	2,14	2,98	4,14	80	1,99	2,64	3,42
15	2,13	2,95	4,07	100	1,98	2,63	3,39
16	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	200	1,97	2,60	3,34
18	2,10	2,88	3,92	500	1,97	2,59	3,31
19	2,09	2,86	3,88	∞	1,96	2,58	3,29
	α				α		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001

Приложение 2

Критические значения двустороннего F-критерия Фишера при разных числах степеней свободы (k_1) и (k_2) и уровне значимости $\alpha = 5\%$

k_2	k_1 – степени свободы для большей дисперсии																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8	8,7	8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,6
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9	5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,7
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,7	4,7	4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,1	4,0	4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,8
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0

k_2	k_1 – степени свободы для большей дисперсии																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0
21	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9
23	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9
25	4,2	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8
27	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
29	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
32	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7
34	4,1	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7
36	4,1	3,3	2,9	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7
38	4,1	3,3	2,9	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7
40	4,1	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7
42	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6
44	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6
46	4,1	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6
48	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6
50	4,0	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6

k_2	k_1 –степени свободы для большей дисперсии																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1	26,9	26,8	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,5	14,4	14,2	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	10,0	9,9	9,8	9,7	9,6	9,5	9,4	9,3	9,2
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,3	8,1	8,0	7,9	7,8	7,7	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,1	7,1
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	7,0	6,8	6,7	6,6	6,5	6,5	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	5,9	5,9
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,7	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,1
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,6	4,5
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1
11	9,9	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,3	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6
21	8,0	5,8	4,9	4,4	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6

k_2	k_1 –степени свободы для большей дисперсии																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5
23	7,9	5,7	4,8	4,3	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4
25	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,6	3,5	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4
27	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3
29	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2
32	7,5	5,3	4,5	4,0	3,7	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2
34	7,4	5,3	4,4	3,9	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
36	7,4	5,3	4,4	4,0	3,6	3,4	3,2	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1
38	7,4	5,2	4,3	3,9	3,5	3,3	3,2	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	3,0	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1
42	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0
44	7,2	5,1	4,3	3,8	3,5	3,2	3,1	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0
46	7,2	5,1	4,2	3,8	3,4	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0
48	7,2	5,1	4,2	3,7	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0
50	7,2	5,1	4,2	3,7	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9

Приложение 3

Критические значения Т-критерия Уайта (5%-ный уровень значимости)

Большее число наблюдений	Меньшее число наблюдений													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5		6	11	17										
6		7	12	18	26									
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	6	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
18	6	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	6	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	6	14	24	35	48	62	77	93	110					
21	6	14	25	37	50	64	79	95						
22	6	15	26	38	51	66	82							
23	6	15	27	39	53	68								
24	6	16	28	40	55									
25	6	16	28	42										
26	7	17	29											
27	7	17												

Окончание приложения 3

Критические значения Т-критерия Уайта
(1%-ный уровень значимости)

Большее число наблюдений	Меньшее число наблюдений													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5				15										
6			10	16	23									
7			10	17	24	32								
8			11	17	25	34	43							
9		6	11	18	26	35	45	56						
10		6	12	19	27	37	47	58	71					
11		6	12	20	28	38	49	61	74	87				
12		7	13	21	30	40	51	63	76	90	106			
13		7	14	22	31	41	53	65	79	93	109	125		
14		7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147	
15		8	15	23	33	44	56	70	84	99	115	133	151	171
16		8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	155	
17		8	16	25	36	47	60	74	89	105	122	140		
18		8	16	26	37	49	62	76	92	108	125			
19	3	9	17	27	38	50	64	78	94	11				
20	3	9	18	28	39	52	66	81	97					
21	3	9	18	29	40	53	68	83						
22	3	10	19	29	42	55	70							
23	3	10	19	30	43	57								
24	3	10	20	31	44									
25	3	11	20	32										
26	3	11	21											
27	4	11												

Приложение 4

Критические значения W-критерия Вилкоксона для независимых выборок

n_2 \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4			10											
5		6	11	17										
6		7	12	18	26						**Уровень значимости 0,05**			
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141		
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	160	
16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	164	185
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154	169	
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5				15										
6			10	16	23									
7			10	17	24	32					**Уровень значимости 0,01**			
8		6	11	17	25	34	43							
9		6	11	18	26	35	45	56						
10		6	12	19	27	37	47	58	71					
11		6	12	20	28	38	49	61	74	87				
12		7	13	21	30	40	51	63	76	90	106			
13		7	14	22	31	41	53	65	79	93	109	125		
14		7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129		
15		8	15	23	33	44	56	70	84	99	115	133	147	
16		8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	151	171
17		8	16	25	36	47	60	74	89	105	122	140	155	
18		8	16	26	37	49	62	76	92	108	125			
19	3	9	17	27	38	50	64	78	94	11				
20	3	9	18	28	39	52	66	81	97					

Критические значения W-критерия Вилкоксона для сопряженных пар

n	α		*n*	α		*n*	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
6	1		13	18	11	20	53	39
7	3		14	22	14	21	60	44
8	5	1	15	26	17	22	67	50
9	7	3	16	31	21	23	74	56
10	9	4	17	36	24	24	82	62
11	12	6	18	41	29	25	90	69
12	15	8	19	47	33			

Приложение 5

Значения функции $\psi\frac{R}{n+1}$, используемой при расчете χ-критерия Ван дер Вардена

R/n+1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	- ∞	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,51	-2,46	-2,41	-2,37
0,01	-2,33	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,17	-2,14	-2,12	-2,10	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,01	-2,00	-1,98	-1,96	-1,94	-1,93	-1,91	-1,90
0,03	-1,88	-1,87	-1,85	-1,84	-1,83	-1,81	-1,80	-1,79	-1,77	-1,76
0,04	-1,75	-1,74	-1,73	-1,72	-1,71	-1,70	-1,68	-1,67	-1,66	-1,65
0,05	-1,64	-1,64	-1,63	-1,62	-1,61	-1,60	-1,59	-1,58	-1,57	-1,57
0,06	-1,55	-1,55	-1,54	-1,53	-1,52	-1,51	-1,51	-1,50	-1,49	-1,48
0,07	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,45	-1,44	-1,43	-1,43	-1,42	-1,41
0,08	-1,41	-1,40	-1,39	-1,39	-1,38	-1,37	-1,37	-1,36	-1,35	-1,35
0,09	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,31	-1,30	-1,30	-1,29	-1,29
0,10	-1,28	-1,28	-1,27	-1,26	-1,26	-1,25	-1,25	-1,24	-1,24	-1,23
0,11	-1,23	-1,22	-1,22	-1,21	-1,21	-1,20	-1,20	-1,19	-1,19	-1,18
0,12	-1,18	-1,17	-1,17	-1,16	-1,16	-1,15	-1,15	-1,14	-1,14	-1,13
0,13	-1,13	-1,12	-1,12	-1,11	-1,11	-1,10	-1,10	-1,09	-1,09	-1,09
0,14	-1,08	-1,08	-1,07	-1,07	-1,06	-1,06	-1,05	-1,05	-1,05	-1,04
0,15	-1,04	-1,03	-1,03	-1,02	-1,02	-1,02	-1,01	-1,01	-1,00	-1,00
0,16	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,17	-0,95	-0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,18	-0,92	-0,91	-0,91	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,89	-0,88
0,19	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
0,20	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,81	-0,81	-0,81
0,21	-0,81	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,71	-0,71
0,24	-0,71	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,68	-0,68	-0,68
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,61	-0,61	-0,61	-0,60	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
0,30	-0,53	-0,52	-0,52	-0,52	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,50	-0,50
0,31	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47	-0,47
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36

Продолжение приложения 5

R/n+1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,31	-0,31	-0,31
0,38	-0,31	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28
0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
0,40	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,41	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,18	-0,18
0,43	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15
0,44	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,13	-0,13	-0,13
0,45	-0,13	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11	-0,10
0,46	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
0,50	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64

Окончание приложения 5

R/n+1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Приложение 6

Критические значения χ-критерия Ван дер Вардена (независимые выборки)

n	$n_1 - n_2$ = 0 или 1		$n_1 - n_2$ = 2 или 3		$n_1 - n_2$ = 4 или 5	
	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
8	2,40	-	2,30	-	-	-
9	2,48	-	2,40	-	-	-
10	2,60	3,20	2,49	3,10	2,30	-
11	2,72	3,40	2,58	3,40	2,40	-
12	2,86	3,60	2,79	3,58	2,68	3,40
13	2,96	3,71	2,91	3,64	2,78	3,50
14	3,11	3,94	3,06	3,88	3,00	3,76
15	3,24	4,07	3,19	4,05	3,06	3,88
16	3,39	4,26	3,36	4,25	3,28	4,12
17	3,49	4,44	3,44	4,37	3,36	4,23
18	3,63	4,60	3,60	4,58	3,53	4,50
19	3,73	4,77	3,69	4,71	3,61	4,62
20	3,86	4,94	3,84	4,92	3,78	4,85
21	3,96	5,10	3,92	5,05	3,85	4,96
22	4,08	5,26	4,06	5,24	4,01	5,17
23	4,18	5,40	4,15	5,36	4,08	5,27
24	4,29	5,55	4,27	5,53	4,23	5,48
25	2,39	5,68	4,36	5,65	4,30	5,58
26	4,50	5,83	4,48	5,81	4,44	5,76
27	4,59	5,95	5,56	5,92	4,51	5,85
28	4,68	6,09	4,68	6,07	4,64	6,03
29	4,78	6,22	4,76	6,19	4,72	6,13
30	4,88	6,35	4,87	6,34	4,84	6,30
31	4,97	6,47	4,95	6,44	4,91	6,39
32	5,07	6,60	5,06	6,58	5,03	6,55
33	5,15	6,71	5,13	6,69	5,10	6,64
34	5,25	6,84	5,24	6,82	5,21	6,79
35	5,33	6,95	5,31	6,92	5,28	6,88
36	5,42	7,06	5,41	7,05	5,38	7,02
37	5,50	7,17	5,48	7,15	5,45	7,11
38	5,59	7,28	5,58	7,27	5,55	7,25
39	5,67	7,39	5,65	7,37	5,62	7,33
40	5,75	7,50	5,74	7,49	5,72	7,47
41	5,83	7,62	5,81	7,60	5,79	7,56
42	5,91	7,72	5,90	7,71	5,88	7,69
43	5,99	7,82	5,97	7,81	5,95	7,77
44	6,04	7,93	6,06	7,92	6,04	7,90
45	6,14	8,02	6,12	8,01	6,10	7,98
46	6,21	8,13	6,21	8,12	6,19	8,10
47	6,29	8,22	6,27	8,21	6,25	8,18
48	6,36	8,32	6,35	8,31	6,34	8,29
49	6,43	8,41	6,42	8,40	6,39	8,37
50	6,50	8,51	6,51	8,50	6,48	8,48

Приложение 7

Критические значения нормированного коэффициента корреляции ($r^p_{x,y}$), соответствующие уровням значимости (α) и объему выборки (n)

Степени свободы $k = n - 2$	Уровни значимости α		Степени свободы $k = n - 2$	Уровни значимости α	
	5%	1%		1%	5%
5	0,75	0,87	27	0,37	0,47
6	0,71	0,83	28	0,36	0,46
7	0,67	0,80	29	0,36	0,46
8	0,63	0,77	30	0,35	0,45
9	0,60	0,74	35	0,33	0,42
10	0,58	0,71	40	0,30	0,39
11	0,55	0,68	45	0,29	0,37
12	0,53	0,66	50	0,27	0,35
13	0,51	0,64	60	0,25	0,33
14	0,50	0,62	70	0,23	0,30
15	0,48	0,61	80	0,22	0,28
16	0,47	0,59	90	0,21	0,27
17	0,46	0,58	100	0,20	0,25
18	0,44	0,56	125	0,17	0,23
19	0,43	0,55	150	0,16	0,21
20	0,42	0,54	200	0,14	0,18
21	0,41	0,53	300	0,11	0,15
22	0,40	0,52	400	0,10	0,13
23	0,40	0,51	500	0,09	0,12
24	0,39	0,50	700	0,07	0,10
25	0,38	0,49	900	0,06	0,09
26	0,37	0,48	1000	0,06	0,09
	α			α	
	0,05	0,01		0,05	0,01

Приложение 8

Значения *z*, соответствующие значениям выборочного коэффициента корреляции *r*

r	Сотые доли коэффициента корреляции *r*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,310	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,951	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,995	3,106	3,250	3,453	3,800

Приложение 9

Критические значения рангового коэффициента корреляции ($r^s_{x,y}$), соответствующие уровням значимости (α), и объему выборки (n)

n	α		n	α	
	5%	1%		5%	1%
5	0,94	–	23	0,42	0,53
6	0,85	–	24	0,41	0,52
7	0,78	0,94	25	0,40	0,51
8	0,72	0,88	26	0,39	0,50
9	0,68	0,83	27	0,38	0,49
10	0,64	0,79	28	0,38	0,48
11	0,61	0,76	29	0,37	0,48
12	0,58	0,73	30	0,36	0,47
13	0,56	0,70	31	0,36	0,46
14	0,54	0,68	32	0,36	0,45
15	0,52	0,66	33	0,34	0,45
16	0,50	0,64	34	0,34	0,44
17	0,48	0,62	35	0,33	0,43
18	0,47	0,60	36	0,33	0,43
19	0,46	0,58	37	0,33	0,42
20	0,45	0,57	38	0,32	0,41
21	0,44	0,56	39	0,32	0,41
22	0,43	0,54	40	0,31	0,40
p	0,05	0,01	p	0,05	0,01

Приложение 10

Критические значения критерия χ^2 (хи-квадрат)

k	α			k	α		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	3,84	6,63	10,83	16	26,30	32,00	39,25
2	5,99	9,21	13,82	17	27,59	33,41	40,79
3	7,81	11,34	16,27	18	28,87	34,81	42,31
4	9,49	13,28	18,48	19	30,14	36,19	43,82
5	11,07	15,09	20,51	20	31,41	37,57	45,31
6	12,59	16,81	22,46	21	32,67	38,93	46,80
7	14,07	18,48	24,32	22	33,92	40,29	48,27
8	15,51	20,09	26,13	23	35,17	41,64	49,73
9	16,92	21,67	27,67	24	36,42	42,98	51,18
10	18,31	23,21	29,59	25	37,65	44,31	52,62
11	19,68	24,72	31,26	26	38,89	45,64	54,05
12	21,03	26,22	32,22	27	40,11	46,96	55,48
13	22,36	27,69	34,69	28	41,28	48,28	56,89
14	23,68	29,14	36,12	29	42,56	49,59	58,30
15	25,00	30,58	37,70	30	43,77	50,89	59,70

Для заметок

Научное издание

Костенко Елена Геннадьевна,
Мирзоева Елена Владимировна,
Лысенко Вадим Васильевич

АНАЛИЗ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ СПОРТИВНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Монография

Чебоксары, 2019 г.

Редактор *Е.Г. Костенко*
Компьютерная верстка и правка *Л.С. Миронова*
Дизайн обложки *Н.В. Фирсова*

Подписано в печать 11.10.2019 г.
Дата выхода издания в свет 14.10.2019 г.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 7,6725. Заказ К-541. Тираж 500 экз.

Издательский дом «Среда»
428005, Чебоксары, Гражданская, 75, офис 12
+7 (8352) 655-731
info@phsreda.com
https://phsreda.com

Отпечатано в Студии печати «Максимум»
428005, Чебоксары, Гражданская, 75
+7 (8352) 655-047
info@maksimum21.ru
www.maksimum21.ru