Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Д. П. ЮЩЕНКО, О. В. ЯКУБОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ ФУРЬЕ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

Гомель 2008

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Д. П. ЮЩЕНКО, О. В. ЯКУБОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.РЯДЫ ФУРЬЕ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

для студентов математических специальностей вузов

Гомель 2008

УДК 517.518.45 (075.8)
ББК 22.161.542 я 73
Ю 985

Рецензенты:
В. Н. Семенчук, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”;
кафедра математического анализа учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Ющенко, Д. П.
Ю 985 Математический анализ. Ряды Фурье: тексты лекций для студентов математических специальностей вузов / Д. П. Ющенко, О. В. Якубович; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. — 71 с.
ISBN 978-985-439-301-8

В основу издания положен курс лекций по рядам Фурье. Подробно излагается поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье, сходимости в среднем и средне квадратичном, равномерное приближение непрерывной функции многочленами, дифференцирование и интегрирование рядов Фурье, а также интеграл и преобразование Фурье.

Предназначено студентам математических специальностей вузов. Будет полезно студентам других специальностей, изучающим математический анализ. Может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 517.518.45 (075.8)
ББК 22.161.542 я 73

ISBN 978-985-439-301-8

Содержание

Введение

По теории тригонометрических рядов имеется значительное количество учебных пособий, которые отличаются между собой как степенью подробности, так и вопросами, которые в них рассматриваются. Так в известной монографии А. Зигмунда [5] многие вопросы рядов Фурье изложены подробней, чем в более элементарном курсе Г. П. Толстова [12]. В университетских курсах математического анализа Л. И. Камынина [6], Л. Д. Кудрявцева [8] и А. М. Тер-Крикорова, М. И. Шабунина [11] во многом тригонометрические ряды Фурье излагаются с точки зрения гильбертовых пространств, что создает определенные трудности при их первоначальном изучении.

В предлагаемом пособии подробно излагается поточечная сходимость тригонометрических рядов Фурье, сходимость в среднем и средне квадратичном, при этом элементы теории гильбертовых пространств отсутствуют. На основании этих сходимостей доказывается теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами. Одной из составных частей пособия является тесно связанные с рядами Фурье интеграл и преобразование Фурье, по которым имеется значительное количество литературы.

Для более основательного изучения многих вопросов рядов рекомендуется ознакомиться с работами А. Зигмунда [5], Г. Харди, В. Рогозинского [14], Р. Эдвардса [15]. Интеграл и преобразование Фурье с той или иной полнотой изложены, например, в работах Н. Винера [2], Л. И. Камынина [6], П. Н. Князева [7], Л. Д. Кудрявцева [8], А. М. Тер-Крикорова, М. И. Шабунина [11]. Для практического применения изложенного в лекциях материала рекомендуются сборники задач Б .П. Демидовича [3], Л. Д. Кудрявцева [10], А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно [13], а для решения задач с использованием преобразования Фурье можно воспользоваться специальными таблицами преобразований функций Г. Бейтмена, А. Эрдейна [1], В. А. Диткина, А. П. Прудникова [4], Г. Корна, Т. Корна [9].

Тема 1 Тригонометрические ряды Фурье

1.1 Гармоники

При решении многих задач приходится решать задачу о разложимости сложной периодической функции на более простые гармоники, т. е. функции вида

$$y = A\,\sin(\omega\,x + \varphi),$$

где A, ω, φ — постоянные, причём |A| называют амплитудой, а ω, φ — соответственно частотой и начальной фазой.

Очевидно, что простая гармоника имеет период T= $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Упражнение 1.1 Проверьте, что простая гармоника имеет период T= $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Учитывая то, что

$$A\,\sin(\omega x + \varphi) = A\,(\cos\omega x \sin\varphi + \sin\omega x\cos\varphi),$$

гармонику можно представить в виде

$$A\,\sin(\omega x + \varphi) = a\cos\omega x + b\sin\omega x, \qquad (1.1)$$

где $a = A\sin\varphi,\ b = A\cos\varphi$.

Пусть теперь задана некоторая функция

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x, \qquad (1.2)$$

тогда, положив $A = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{a}{A}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{A}$, используя (1.1), получим $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Другими словами, всякая функция вида (1.2) является простой гармоникой.

Из сказанного выше следует, что если мы хотим разложить некоторую функцию $f(x)$ в сумму простых гармоник (что равносильно сумме функций вида (1.2)), то эта функция должна быть периодической.

Для 2π периодических функций частоты следует выбрать так, чтобы каждая из гармоник имела число 2π своим периодом, т. е. чтобы $n\cdot\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi, n \in$ Z или $n = \omega$. Это говорит о том, что в разложении должны быть простые гармоники с целыми частотами.

Итак, мы пришли к необходимости представить 2π периодическую функцию в виде ряда (суммы простейших гармоник):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Заметим здесь, что все слагаемые в этой формуле имеют период 2π.

1.2 Ряды Фурье по тригонометрической системе

Определение 1.1 *Систему функций*

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, ...\}$$

называют тригонометрической системой.

Определение 1.2 *Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad \text{где}\ \ a_n,\ b_n,\ x\in\mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что если тригонометрический ряд сходится поточечно к некоторой функции $f(x), x\in\mathbb{R}$, то функция $f(x)$ будет 2π периодической.

Упражнение 1.2 Проверьте, что если тригонометрический ряд сходится поточечно к некоторой функции $f(x), x\in\mathbb{R}$, то функция $f(x)$ будет 2π периодической.

Определение 1.3 *Пусть $f\in\Re[-\pi;\pi]$. Тригонометрический ряд (1.3) называется рядом Фурье функции f, если коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам:*

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, n=0,1,2,\ldots,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, n=1,2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и ниже через $\Re[-\pi;\pi]$ будем обозначать множество интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a;b]$.

Коэффициенты (1.4) называют коэффициентами Фурье функции f.

Тот факт, что тригонометрический ряд (1.3) является рядом Фурье для функции $f\in\Re[-\pi;\pi]$ записывается в следующем виде:

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1.5}$$

Отметим здесь, что осторожный знак $\sim$ (тильда) в соотношении (1.5) является не знаком равенства, а знаком сопоставления. Причина такой осторожности будет выяснена позже.

Определение 1.4 *Пусть заданы две функции $f,g\in\Re[a;b]$. Функции f и g называют ортогональными на отрезке $[a;b]$, если*

$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. *Систему функций* $\{\varphi_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$ *называют ортогональной на* $[a;b]$, *если любые две различные функции этой системы ортогональны на* $[a;b]$.

Тот факт, что f и g ортогональны на $[a;b]$ записывают в виде $(f,g) = 0$ на $[a;b]$.

Теорема 1.1 (об ортогональности тригонометрической системы) *Тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке* $[-\pi;\pi]$.

Доказательство. $\triangleright$ Легко получить, что

$(1,\,\cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$

$(1,\,\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0,\ n \in \mathbb{Z},$

$(\cos nx,\,\cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1+\cos 2nx}{2}dx = \pi,\ n \in \mathbb{Z},$

$(\sin nx,\,\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1-\cos 2nx}{2}dx = \pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

Пусть теперь $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \neq n$, тогда

$(\cos mx,\,\cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos mx \cdot \cos nx)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\,dx = 0,$

$(\sin mx,\,\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin mx \cdot \sin nx)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx = 0.$

Если же $m, n \in \mathbb{Z}$, то

$(\sin mx,\,\sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos mx \cdot \sin nx)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x)dx = 0.$

Доказанные выше равенства и доказывают теорему. $\triangleleft$

Замечание 1.1 (о комплексной форме записи ряда Фурье) Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и ряд (1.3) является рядом Фурье этой функции, тогда имеет место комплексная форма записи ряда Фурье:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, е сли воспользоваться формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$, то легко получить, что $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \sin x = \dfrac{e^{i\,x}-e^{-i\,x}}{2i}$. Ряд (1.3) запишется в виде:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$

где $\mathrm{c}_0=\dfrac{a_0}{2}, \mathrm{c}_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}, c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}, n\in\mathbb{N}$.

Используя формулы коэффициентов Фурье (1.4) и формулу Эйлера, получаем, что

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Замечание 1.2 Система функций $\left\{e^{-inx},\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ ортогональна на $[-\pi;\pi]$. Этот факт непосредственно следует из теоремы об ортогональности тригонометрической системы на $[-\pi;\pi]$. Это можно проверить и непосредственными вычислениями.

Теорема 1.2 *Всякий равномерно сходящийся на $\mathbb{R}$ тригонометрический ряд (1.3) является рядом Фурье своей суммы.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ x\in\mathbb{R}, \tag{1.6}$$

причём ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

В силу того, что функции $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ непрерывны на $\mathbb{R}$ и ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$, то по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда имеем, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и, в частности, $f\in\Re[-\pi;\pi]$. Умножим (1.6) на $\cos kx$, $k=0,1,2,\ldots$, получим равенство

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos kx. \tag{1.7}$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, является равномерно сходящимся на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $S_n(x)$ — частичная сумма ряда (1.6). Ряд (1.6) равномерно сходится на $\mathbb{R}$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует N такое, что для всех $n>N$ и для всех $x\in\mathbb{R}$ будет выполняться неравенство $|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon$.

Пусть $\sigma_n(x)$ — частичная сумма ряда (1.7). Очевидно, что $\sigma_n(x)=$ $=S_n(x)\cos kx$. Поэтому выполняется неравенство $|f(x)\cos kx-\sigma_n(x)|=$ $=|f(x)-S_n(x)|\cdot|\cos kx|<\varepsilon$ для всех $n>N$ и для всех $x\in\mathbb{R}$. Это и означает равномерную сходимость ряда (1.7) на $\mathbb{R}$.

По теореме об интегрируемости равномерно сходящегося ряда имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx).$$

Используя свойство ортогональности тригонометрической системы на $[-\pi;\pi]$, из этого равенства легко получаем равенства

$$\pi\, a_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 0, 1, 2, 3\ldots.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\pi\, b_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, 3\ldots.$$

Упражнение 1.3 Проведите доказательство последнего равенства самостоятельно.

Таким образом, мы можем записать, что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

т. е. тригонометрический равномерно сходящийся ряд является рядом Фурье своей суммы. ◁

Замечание 1.3 Следует заметить, что не всякий тригонометрический ряд является рядом Фурье для своей суммы. Используя признак Дирихле, легко показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ является сходящимся на $\mathbb{R}$, но он не будет рядом Фурье своей суммы $f(x)$. Этот факт нами будет установлен позже.

Лемма 1.1 *Пусть $\varphi \in \Re[-l;l]$, тогда:*

1) если φ чётная на отрезке $[-l;l]$, то $\int\limits_{-l}^{l}\varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l}\varphi(x)\,dx$;

2) если φ нечётная на отрезке $[-l;l]$, то $\int\limits_{-l}^{l}\varphi(x)\,dx = 0$.

Доказательство. $\triangleright$ Пусть φ чётная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x \in [-l; l]$, тогда, делая замену $x = -t$, имеем:

$$\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{0} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} \varphi(x)\,dx = -\int\limits_{l}^{0} \varphi(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{l} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{l} \varphi(t)\,dt + \int\limits_{0}^{l} \varphi\,(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} \varphi(x)\,dx.$$

Аналогично для нечётной функции φ устанавливается утверждение 2). $\triangleleft$

Упражнение 1.4 Докажите утверждение 2) леммы 1.1.

Упражнение 1.5 Установите геометрический смысл леммы 1.1.

Из леммы 1.1 следует следующая теорема.

Теорема 1.3 (о рядах Фурье для чётных и нечётных функций) *Пусть* $f \in \Re[-\pi; \pi]$, *тогда:*

1) если функция f *чётная на* $[-\pi; \pi]$, *то её ряд Фурье имеет вид:*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. ряд Фурье чётной функции на $[-\pi; \pi]$ *не содержит синусы;*

2) если функция f *нечётная на* $[-\pi; \pi]$, *то её ряд Фурье имеет вид:*

$$f \sim \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

т.е. ряд Фурье нечётной функции на $[-\pi; \pi]$ *не содержит косинусы.*

Доказательство. $\triangleright$ Если f чётная на $[-\pi; \pi]$, то $f(x)\,\cos nx$ чётные функции на $[-\pi; \pi]$, а $f(x)\,\sin nx$ нечётны и, в силу леммы 1.1,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Этим и доказано утверждение 1) теоремы.

Если же f нечётная на $[-\pi; \pi]$, то $f(x)\,\cos\,n\,x$ нечётные функции на

$[-\pi;\pi]$, а функции $f(x)\,\sin nx$ чётны на $[-\pi;\pi]$ и, в силу леммы 1.1,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx.$$

Этим доказано утверждение 2) теоремы. $\triangleleft$

Лемма 1.2 *Пусть функция* $\varphi \in \Re[-\pi;\pi]$ *и* 2π *периодична. Тогда для любого* $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. $\triangleright$ Возьмём произвольное фиксированное $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, что существуют целое число k и число $\alpha \in [0;2\pi]$ такие, что $a = \alpha + 2k\pi$. Поэтому

$$\int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(x)\,dx = [x = t + 2k\pi] = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt + \int\limits_{\pi}^{\alpha+\pi} \varphi(t)\,dt =$$

$$= [\text{во втором интеграле делаем замену } t = z + 2\pi] =$$

$$= \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\alpha-\pi} \varphi(z+2\pi)\,dz = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\alpha-\pi} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt. \triangleleft$$

Замечание 1.4 Лемма 1.2 позволяет коэффициенты Фурье (1.4) 2π периодической функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$, вычислять по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ a \in \mathbb{R},$$

или, в частности,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

До сих пор мы говорили о рядах Фурье для функций с периодом 2π. В общем случае, когда задана $2l$ периодическая функция, ряды Фурье определяются аналогично. Кратко изложим этот случай.

Определение 1.5 *Пусть $f \in \Re[-l;l]$. Тогда тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x) \tag{1.8}$$

называется рядом Фурье функции $f \in \Re[-l;l]$, если

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Очевидно, что если ряд (1.8) имеет сумму $f(x)$, то функция $f(x)$ — $2l$ периодическая функция.

Теорема 1.4 *Система тригонометрических функций*

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \dots\right\}$$

ортогональна на $[-l;l]$.

Доказательство. $\triangleright$ Данное доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1 для тригонометрической системы на отрезке $[-\pi;\pi]$. $\triangleleft$

Упражнение 1.6. Докажите теорему 1.4.

Теорема 1.5 *Пусть тригонометрический ряд (1.8) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Фурье своей суммы $f(x)$.*

Доказательство. $\triangleright$ Данное доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 1.2 для ряда (1.8). Но можно сформулированную теорему получить как следствие доказанной ранее теоремы 1.2 для рядов вида (1.3).

В ряде (1.8) сделаем замену $x = \dfrac{lt}{\pi}$ ($t \in [-\pi;\pi]$, если $x \in [-l;l]$). Получим ряд вида (1.3), сумма которого будет функция $F(t) = f(\dfrac{lt}{\pi})$. По доказанной ранее теореме 1.2, в силу равномерной сходимости ряда (1.3) к $F(t)$, имеем $F(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt,\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\,dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Сделаем в этих формулах обратную замену $t = \dfrac{\pi x}{l}$ ($x \in [-l; l]$, если $t \in [-\pi; \pi]$), получим

$$F(\frac{\pi x}{l}) \equiv f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

т. е. ряд (1.8) является рядом Фурье своей суммы $f(x)$. $\triangleleft$

Теорема 1.6 (о рядах Фурье для чётных и нечётных функций) *Пусть $f \in \Re[-l; l]$, тогда:*

1) если функция f чётная на $[-l; l]$, то её ряд Фурье имеет вид

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x, \quad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2) если функция f нечётная на $[-l; l]$, то её ряд Фурье имеет вид

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Доказательство. $\triangleright$ Данное доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3 для функций $f \in \Re[-\pi; \pi]$. $\triangleleft$

Упражнение 1.7 Докажите теорему 1.6.

Лемма 1.3 *Пусть функция $\varphi \in \Re[-l; l]$ и $2l$ периодична, тогда для любого $a \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{a-l}^{a+l} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. $\triangleright$ Данное доказательство аналогично доказательству леммы 1.2. $\triangleleft$

Упражнение 1.8 Докажите лемму 1.3.

Замечание 1.5 Также как для функций $f \in \Re[-\pi;\pi]$ мы можем утверждать, что коэффициенты Фурье (1.9) для функции $f \in \Re[-l;l]$, $2l$ периодической можно вычислять по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{a-l}^{a+l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{a-l}^{a+l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

или, в частности,

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Замечание 1.6 В изложенной выше теории мы предполагали, что $f \in \Re[-l;l]$. Однако, всё остаётся в силе, если будем считать, что $f(x)$ — абсолютно интегрируема на $[-l;l]$.

Упражнение 1.9 Проверьте последнее утверждение.

В этой теме мы рассматривали вопросы о построении ряда Фурье, при этом не поднимали вопрос о сходимости ряда Фурье функции f поточечно, равномерно. В следующем параграфе мы введём новый вид сходимости функционального ряда (сходимость в средне квадратичном) и изучим сходимость ряда Фурье в этом смысле (в смысле сходимости в средне квадратичном).

Тема 2 Сходимость ряда Фурье в средне квадратичном

2.1 Постановка задачи

Пусть задан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x),\ x \in X, \tag{2.1}$$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x)$ — его частичная сумма. Ранее мы рассмотрели два вида сходимости функционального ряда (2.1) – поточечную и равномерную. Наряду с этими видами сходимости по тем или иным причинам полезно рассматривать и другие виды сходимости (другие определения сходимости). Остановимся на некоторых из них:

1) пусть $\sigma_n(x) = \dfrac{S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x)}{n}$ — среднее арифметическое частичных сумм $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n$. Если $\sigma_n(x)$ имеет поточечный предел $f(x)$ для всех $x \in X$, то говорят, что функциональный ряд (2.1) сходится поточечно в средне арифметическом частичных сумм $S_n(x)$ на X к $f(x)$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0$, то говорят, что ряд (2.1) сходится равномерно в средне арифметическом частичных сумм $S_n(x)$ на X к $f(x)$;

3) пусть X $= [a; b]$ и $U_n(x) \in \Re[a; b]$, тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f(x) - S_n(x)|^2\, dx$, то говорят, что ряд (2.1) сходится на $[a; b]$ к $f(x)$ в средне квадратичном (в смысле средне квадратичного уклонения).

В функциональном анализе рассматриваются и другие виды сходимости в конкретном банаховом (нормированном) пространстве. Подражая общей теории, в пространстве $\Re[a; b]$ введём понятие нормы. Пусть $f(x) \in \Re[a; b]$, тогда нормой функции f назовём число

$$\|f\| = \left(\int\limits_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Данное определение нормы функции будет удовлетворять общему определению нормы (с некоторыми оговорками, не существенными для нашей теории).

Тот факт, что ряд (2.1) сходится в средне квадратичном к $f(x)$, можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - S_n(x)|| = 0.$$

Пусть функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ частичная сумма ряда (2.2). Дальше нас будут интересовать свойства частичных сумм $S_n(x)$ и коэффициентов Фурье (2.3). ◁

2.2 Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье

Наряду с частичной суммой $S_n(x)$ рассмотрим тригонометрический многочлен

$$s_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{2.4}$$

Поставим задачу: среди всех тригонометрических многочленов $s_n(x)$ найти тот, который даёт наименьшее квадратичное уклонение от функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$. Более подробно эта постановка выглядит так: найти коэффициенты α_0, α_1, …, α_n, β_1, β_2, …, β_n так, чтобы величина $\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2\,dx$ была минимальна. Оказывается, этим свойством обладают коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Теорема 2.1 (экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье) *Пусть $S_n(x)$ есть частичные суммы ряда Фурье функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$, а $s_n(x)$ — произвольный тригонометрический многочлен (2.4), тогда для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$*

$$\big\|f_(x) - S_n(x)\big\| \leqslant \|f(x) - s_n(x)\|$$

или, что эквивалентно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,dx.$$

Доказательство. ▷ Для $\|f(x)-s_n(x)\|$ имеем

$$\|f(x)-s_n(x)\|^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-$$

$$-2\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\,dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)\,dx. \qquad (2.5)$$

Используя (2.4), имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\,dx=\alpha_0\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+$$

$$+\beta_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx)=\alpha_0a_0\pi+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\pi,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\,dx=\pi(\alpha_0a_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)). \qquad (2.6)$$

Для третьего слагаемого из (2.5) имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx))^2\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\alpha_0)^2\,dx+2\alpha_0\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2\,dx.$$

Второе слагаемое в правой части по свойству ортогональности тригонометрической системы будет равно нулю, поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)\,dx=\alpha_0^2\cdot 2\pi+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\times$$

$$\times(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)\, dx.$$

Интегралы в сумме правой части этого равенства по тому же свойству ортогональности будут равны нулю, за исключением интегралов $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi$.

Окончательно имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)\, dx = \pi(2\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)). \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.5), получим

$$\|f(x) - s_n(x)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx -$$

$$-2\pi(\alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)) + \pi(2\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)) =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx + \pi \sum_{k=1}^{n} \left[(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2\right] -$$

$$-\pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{\pi}{2}(a_0 - 2\alpha_0)^2 - \pi\frac{a_0^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\|f(x) - s_n(x)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx + \pi\Big[\sum_{k=1}^{n} \left[(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(a_0 - 2\alpha_0)^2\Big] - \pi\Big[\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{a_0^2}{2}\Big]. \tag{2.8}$$

Правая часть равенства (2.8) будет иметь минимальное значение, если первая квадратная скобка равна нулю, что эквивалентно условию:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_k = a_k,\ k = 1, 2, \ldots, n;\ \beta_k = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

А это означает, что $\|f(x) - s_n(x)\|^2$ будет принимать минимальное значение, если $s_n(x) = S_n(x)$. $\triangleleft$

2.3 Неравенство Бесселя для тригонометрической системы и его следствия

Теорема 2.2 (неравенство Бесселя) *Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$, тогда имеет место неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Доказательство. $\triangleright$ Для функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$ имеет место равенство (2.8), положив в котором $s_n(x)=S_n(x)$, получим тождество Бесселя для тригонометрической системы:

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]. \tag{2.9}$$

Так как левая часть равенства (2.9) больше либо равна нулю, то из (2.9) имеем неравенство

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Это неравенство означает, что возрастающая последовательность неотрицательных чисел $\gamma_n=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ ограничена числом $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$, следовательно, она имеет предел, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ сходится, и, переходя к пределу при $n\to\infty$ в (2.10), получим неравенство Бесселя $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$. $\triangleleft$

Следствие 2.1 *Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$, тогда для коэффициентов Фурье*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0. \tag{2.11}$$

Доказательство. $\triangleright$ Доказательство этого факта следует из того, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ всегда сходится, и в силу необходимого условия сходимости числового ряда $a_k\to 0$, $b_k\to 0$ при $k\to\infty$. $\triangleleft$

Следствие 2.2 *Пусть* $f \in \Re[-\pi;\pi]$, *тогда для любого отрезка* $[a;b] \subset [-\pi;\pi]$ *имеем:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos nx\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx = 0.$ (2.12)

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a;b], \\ 0, & x \in [-\pi;\pi]\setminus[a;b]. \end{cases}$$

Очевидно, что $F \in \Re[-\pi;\pi]$, и в силу следствия 2.1

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Для доказательства б) заметим, что

$$f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x = f(x)(\sin nx\cos\frac{x}{2} + \cos nx\sin\frac{x}{2}) = \\ = f_1(x)\sin nx + f_2(x)\cos nx,$$

где

$$f_1(x) = f(x)\cos\frac{x}{2} \in \Re[-\pi;\pi], \quad f_2(x) = f(x)\sin\frac{x}{2} \in \Re[-\pi;\pi].$$

В силу а) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_1(x)\sin nx\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_2(x)\cos nx\,dx = 0.$ Откуда и вытекает утверждение б). $\triangleleft$

Замечание 2.1 Формулы (2.11) и (2.12) из следствий 2.1 и 2.2 являются частным случаем более общей леммы Римана.

Лемма 2.1 (Римана) *Пусть функция* $f(x)$ *абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале* $(a;b)$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Замечание 2.2 В этом параграфе мы рассмотрели тот случай, когда $f \in \Re(-\pi;\pi)$. Всё сказанное имеет место и для более широкого класса функций, состоящего из абсолютно интегрируемых функций, квадрат которых является интегрируемой в несобственном смысле функцией.

Упражнение 2.1 Проверьте последнее утверждение.

Замечание 2.3 Вернёмся к замечанию 1.3 и рассмотрим тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, который, как мы отметили, сходится для любого $x \in \mathbb{R}$ к некоторой функции $f(x)$. Покажем, что этот ряд не является рядом Фурье своей суммы $f(x)$. Действительно, допустив, что $f \in \Re[-\pi;\pi]$ (или что $f(x)$ — абсолютно интегрируема вместе со своим квадратом), получим по неравенству Бесселя, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = const$, но это неверно в силу расходимости гармонического ряда. Противоречие и доказывает, что $f \notin \Re[-\pi;\pi]$ (или даже $f(x)$ — не абсолютно интегрируема вместе со своим квадратом), т. е. исходный ряд не является рядом Фурье своей суммы $f(x)$ в отмеченных выше классах функций.

Замечание 2.4 Для абсолютно интегрируемых вместе со своим квадратом функций (в том числе и для $f \in \Re[-\pi;\pi]$) на самом деле имеет место не неравенство Бесселя, а равенство Парсеваля-Стеклова

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Доказательство этого факта требует дополнительных исследований и будет проведено в теме 5.

Тема 3 Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

В этом разделе изучим вопрос о поточечной сходимости ряда Фурье для функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$.

3.1 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле

Пусть функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и 2π периодична на $\mathbb{R}$. Пусть $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — частичные суммы ряда Фурье функции f. В этой формуле

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, k = 1, 2, 3, \dots.$$

Подставляя в суммы $S_n(x)$ значения коэффициентов Фурье a_k и b_k, получим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos kt + \sin kx \sin kt\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt.$$

Функцию $D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku$ называют ядром Дирихле. Таким образом, имеет место интегральное представление частичной суммы ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt. \tag{3.1}$$

Преобразуем ядро Дирихле $D_n(u)$ к виду, удобному для дальнейших исследований. Имеем

$$2\sin\frac{u}{2}D_n(u) = 2\sin\frac{u}{2}(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku) =$$

$$= \sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin(k+\frac{1}{2})u - \sin(k-\frac{1}{2})u\right] = \sin(n+\frac{1}{2})u.$$

Откуда

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}, \quad \text{для всех} \quad u \neq 2\pi k.$$

Свойства ядра Дирихле.

Свойство 3.1 *Функцию $D_n(u)$ можно считать непрерывной на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, если $u \neq 2\pi k$, то утверждение очевидно. Рассмотрим точки $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для функции $D_n(u)$ сделаем замену $u = z + 2\pi k$, имеем

$$D_n(u) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})z + k\pi\right]}{2\sin(\frac{z}{2}+k\pi)} = \frac{(-1)^k\sin(n+\frac{1}{2})z}{(-1)^k 2\sin\frac{z}{2}}.$$

Тогда $\lim\limits_{u\to 2\pi k} D_n(u) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} = n+\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, функцию можно доопределить в точках $2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ по непрерывности, т. е. положить, что $D_n(2\pi k) = = n + \frac{1}{2}$. $\triangleleft$

Свойство 3.2 $|D_n(u)| < n + \dfrac{1}{2}$.

Доказательство. $\triangleright$ Это свойство следует из того, что $|D_n(u)| = = \left|\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\right| \leqslant \frac{1}{2} + n$. $\triangleleft$

Свойство 3.3 $D_n(-u) = D_n(u)$ *для всех* $u \in \mathbb{R}$.

Упражнение 3.1 Докажите свойство 3.3.

Свойство 3.4 $D_n(u+2\pi) = D_n(u)$ *для всех* $u \in \mathbb{R}$.

Упражнение 3.2 Докажите свойство 3.4.

Свойство 3.5 $|D_n(u)| < \dfrac{\pi}{2\,|u|}$ *для* $0 < |u| < \pi$.

Доказательство. $\triangleright$ Положим $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}, x \in (0; \dfrac{\pi}{2}]$. Функция $\varphi(x)$ монотонно убывает на $(0; \dfrac{\pi}{2}]$, так как $\varphi'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x(x - tgx)}{x^2} \leqslant 0$ для всех $x \in (0; \dfrac{\pi}{2}]$. В силу убывания функции $\varphi(x)$, имеем $\varphi(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1 = \varphi(0)$ для всех $x \in (0; \dfrac{\pi}{2}]$.

Функция φ — чётная на $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$, поэтому $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ для всех $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, 0)$. Окончательно имеем $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1$ для всех $0 < |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Для $D_n(u)$ получаем оценку:

$$|D_n(u)| = \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})u\right|}{2\left|\sin\frac{u}{2}\right|} = \frac{\left|\frac{u}{2}\right| \cdot \left|\sin(n+\frac{1}{2})u\right|}{\left|\sin\frac{u}{2}\right| \cdot |u|} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{|u|},\ 0 < |u| < \pi. \triangleleft$$

Свойства ядра Дирихле $D_n(u)$ позволяют интегральное представление (3.1) записать в ином виде. В формуле (3.1) сделаем замену $t - x = u$, получим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du. \tag{3.2}$$

В последнем равенстве мы учли свойство чётности $D_n(u)$ и лемму 1.2. Далее представим $S_n(x)$ в виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_n(u)\,du + \int_{0}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du].$$

Сделав в первом интеграле замену $v = -u$, окончательно получим интегральное представление частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+u) + f(x-u))D_n(u)\,du. \tag{3.3}$$

Если $f(x) \equiv 1$, то легко видеть, что $S_n(x) \equiv 1$, поэтому из (3.3) получаем

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)\,du \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1 Интегральные представления (3.2) и (3.3) имеют место и для абсолютно интегрируемых на $[-\pi;\pi]$ функций.

3.2 Принцип локализации Римана

Теорема 3.1 (принцип локализации Римана) *Пусть функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и 2π периодична на $\mathbb{R}$. Тогда сходимость или расходимость ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 зависит только от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.*

Доказательство. $\triangleright$ Воспользуемся интегральным представлением (3.2). Пусть $\delta \in (0,\pi)$. Тогда

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} f(x_0+u)D_n(u)\,du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+u)D_n(u)\,du. \tag{3.5}$$

В формуле (3.5) рассмотрим второй интеграл

$$I_n = \int\limits_{\delta}^{\pi} f(x_0+u)D_n(u)\,du = \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+u)}{2\sin\dfrac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du.$$

Функция $\varphi(u) = \dfrac{f(x_0+u)}{2\sin\dfrac{u}{2}} \in \Re[\delta;\pi]$.

Рассмотрим функцию

$$F(u) = \begin{cases} \varphi(u), & u \in (\delta;\pi], \\ 0, & u \in [-\pi;\delta]. \end{cases}$$

Очевидно, что $F(u) \in \Re[-\pi;\pi]$.

По следствию 2.2 (формула (2.12), б)), получаем

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})u\,du = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(u)\sin(n+\frac{1}{2})u\,du = 0.$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+u)D_n(u)\,du = 0.$$

Таким образом, сходимость или расходимость $S_n(x_0)$ (3.5) зависит от того, существует ли конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)D_n(u)\,du$, т. е. зависит от поведения функции f в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$.

Замечание 3.2 Существование в формуле (3.5) интеграла $\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)D_n(u)\,du$, не гарантирует нам ещё существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, т. е. не гарантирует сходимость ряда Фурье в точке x_0. Существуют примеры периодической непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится на счётном множестве точек, а ряд Фурье интегрируемой по Лебегу функции может расходиться во всех точках (пример А. Н. Колмогорова).

Далее будут указаны некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье.

Замечание 3.3 Принцип локализации имеет место и для абсолютно интегрируемой на $[-\pi;\pi]$ функции.

3.3 Признак Дини поточечной сходимости ряда Фурье

Определение 3.1 *Пусть функция $f(x)$ периодична с периодом 2π. Точка x_0 называется регулярной точкой функции $f(x)$, если:*

1) существуют конечные левый и правый пределы $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = f(x_0\pm 0)$,

2) $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Замечание 3.4 Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, и пусть f непрерывна в точке x_0, тогда точка x_0 будет регулярной точкой функции f. Это следует из того, что для непрерывной функции в точке x_0 левый и правый пределы равны $f(x_0)$, т. е. $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$. Поэтому

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Теорема 3.2 (признак Дини сходимости ряда Фурье в точке) *Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, $f(x)\in\Re[-\pi;\pi]$, и точка $x_0\in\mathbb{R}$ — регулярная точка функции $f(x)$. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условиям Дини: существуют несобственные интегралы*

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,dt, \quad \int\limits_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,dt,$$

тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 имеет сумму $f(x_0)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. $\triangleright$ Для частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье имеет место интегральное представление (3.3)

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x_0+u) + f(x_0-u))D_n(u)\,du.$$

Поскольку точка x_0 — регулярная точка, то

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2},$$

и в силу равенства (3.4),

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x_0+0) + f(x_0-0)D_n(u)\,du.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x_0+u) - f(x_0+0))D_n(u)\,du + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x_0-u) - f(x_0-0))D_n(u)\,du. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Очевидно, что теорема будет доказана, если докажем, что оба интеграла в формуле (3.6) имеют пределы при $n\to\infty$ равные 0. Рассмотрим первый интеграл

$$I_n(x_0) = \int\limits_0^{\pi} (f(x_0+u) - f(x_0+0))D_n(u)\,du.$$

В точке x_0 выполняется условие Дини: сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{h} \frac{|f(x_0+u) - f(x_0+0)|}{u}\,du.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0,h)$ такое, что $\int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x_0+u) - f(x_0+0)|}{u}\,du < \frac{\varepsilon}{\pi}$.

По выбранному $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ интеграл I_n представим в виде $I_n(x_0) = A_n(x_0) + B_n(x_0)$, где

$$A_n(x_0) = \int\limits_0^\delta (f(x_0 + u) - f(x_0 + 0))D_n(u)\,du,$$

$$B_n(x_0) = \int\limits_\delta^\pi (f(x_0 + u) - f(x_0 + 0))D_n(u)\,du.$$

Рассмотрим сначала A_n. Используя оценку $|D_n(u)| < \dfrac{\pi}{2u}$, для любого $u \in (0; \pi)$ (свойство 1.5 ядра Дирихле), получаем, что

$$|(f(x_0 + u) - f(x_0 + 0))D_n(u)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)|}{u}$$

для всех $u \in (0; \delta)$.

Поэтому

$$|A_n(x_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)|}{u}\,du < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдём к оценке интеграла $B_n(x_0)$ при $n \to \infty$. Для этого введём функцию

$$F(u) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{2\sin\dfrac{u}{2}}, & 0 < \delta \leqslant u \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi \leqslant u < \delta. \end{cases}$$

Функция $F(u) \in \Re[-\pi; \pi]$ и $B_n(x_0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(u)\sin(n + \dfrac{1}{2})u\,du$. По следствию 1.2 (формула (2.12) б)) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x_0) = 0$, а это означает, что для выбранного ранее произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|B_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|I_n(x_0)| \leqslant |A_n(x_0)| + |B_n(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x_0) = 0$.

Совершенно аналогично доказывается, что и второй интеграл из формулы (3.6) имеет равный нулю предел при $n \to \infty$.

Упражнение 3.3 Докажите последнее утверждение.

Переходя теперь к пределу в (3.6), получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$. $\lhd$

Замечание 3.5 Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке имеет место и для абсолютно интегрируемой на $[-\pi;\pi]$ функции.

Упражнение 3.4 Проверьте утверждение замечания 3.5.

Указывая классы функций, для которых выполняется условие Дини, мы тем самым укажем признаки сходимости ряда Фурье в регулярной точке x_0 к $f(x_0)$.

3.4 Признаки поточечной сходимости рядов Фурье

Определение 3.2 *Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера, если:*

1) существуют односторонние конечные пределы $f(x_0 \pm 0)$;

2) существуют числа $M > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} &|f(x_0+u) - f(x_0+0)| \leqslant Mu^\alpha, \\ &|f(x_0-u) - f(x_0-0)| \leqslant Mu^\alpha \quad \text{для любого } u \in (0;\delta). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Число α называют показателем Гёльдера. При $\alpha = 1$ часто говорят, что f удовлетворяет условию Липшица.

Проанализируем данное определение:

1) если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$ и поэтому условие (3.7) запишется в виде $|f(x_0 \pm u) - f(x_0)| \leqslant Mu^\alpha$ для всех $u \in (0,\, \delta)$;

2) функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (3.7), может иметь в точке x_0 разрыв первого рода, когда $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$. Такой функцией является, например, $f(x) = sign x$ в точке $x_0 = 0$.

Упражнение 3.5 Доказать, что функция $f(x) = sign x$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв первого рода и при этом удовлетворяет условию (3.7) в этой точке.

Признак 3.1 *Пусть функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и 2π периодична, и точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой для функции $f(x)$. Если $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию Гёльдера, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство. $\rhd$ В силу периодичности $f(x)$ можно считать, что $x_0 \in [-\pi;\pi]$ (почему?). Из условий Гёльдера (3.7) следует, что $\dfrac{|f(x_0 \pm u) - f(x_0 \pm 0)|}{u} \leqslant M \cdot u^{\alpha-1}$ для всех $u \in (0,h)$, поэтому несобственные интегралы $\int\limits_0^h \dfrac{|f(x_0 \pm u) - f(x_0 \pm 0)|}{u}\, du$ сходятся. А это означает, что в точке x_0 выполнено условие Дини, и по признаку Дини ряд Фурье сходится к $f(x_0)$. $\lhd$

Следствие 3.1 *Если f непрерывна на $\mathbb{R}$, 2π периодична, и в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено условие Гёльдера, то ряд Фурье функции f сходится к $f(x_0)$.*

Следствие 3.2 *Если f 2π периодична, $f \in \Re[-\pi;\pi]$, и точка x_0 является точкой разрыва первого рода, в которой выполнено условие Гёльдера, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Расширим определение односторонних производных, полагая

$$f_+{}'(x_0+0) = \lim_{u\to+0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u},$$

$$f_-{}'(x_0-0) = \lim_{u\to+0} \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}.$$

Признак 3.2 *Пусть функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и 2π периодична, тогда:*

1) если x_0 — регулярная точка функции f, и в точке x_0 существуют односторонние производные $f_+{}'(x_0+0)$, $f_-{}'(x_0-0)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$;

2) если в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x_0)$.

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим первый случай. Поскольку существуют конечные пределы

$$\lim_{u\to+0} \frac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)}{u} = f_\pm{}'(x_0\pm 0),$$

то функции $\dfrac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)}{u}$ ограничены на некотором интервале $(0,h)$, т.е. существует $M > 0$, такое что $\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \leqslant M$, $\dfrac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u} \leqslant M$ для всех $u \in (0,h)$. Поэтому функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1$. Следовательно, по первому признаку сходимости ряда Фурье в точке, ряд Фурье функции f будет сходиться к $f(x_0)$.

Второй случай признака 3.2 легко следует из первого случая. Для этого нужно заметить, что из существования конечной производной $f'(x_0)$ следует существование конечных производных $f_\pm{}'(x_0\pm 0)$ $(f_+{}'(x_0+0) = f_-{}'(x_0-0) = f'(x_0))$, и точка x_0 будет точкой непрерывности. $\triangleleft$

Определение 3.3 *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет, быть может, конечное число точек разрыва первого рода: $a = x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ так, что для любого $x_k \in (a,b)$ существуют предельные значения $f(x_k \pm 0)$, и на интервале (x_{k-1}, x_k) функция f дифференцируема, а в точках x_k существуют конечные односторонние производные $f_{\pm}'(x_k \pm 0)$, то такую функцию называют кусочно-дифференцируемой на отрезке $[a,b]$.*

Из признака 3.2 легко получаем следующее следствие.

Следствие 3.3 (признак сходимости ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции) *Если функция $f(x)$ 2π периодична на $\mathbb{R}$ и кусочно-дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, тогда ряд Фурье функции f сходится к значению $f(x_0)$ в точке непрерывности x_0 и к среднему арифметическому $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в точке разрыва x_0.*

Замечание 3.6 Признаки 3.1, 3.2 имеют место и для абсолютно интегрируемой на $[-\pi;\pi]$ функции.

Тема 4 Равномерная сходимость ряда Фурье

4.1 Равномерная сходимость ряда Фурье для дифференцируемой функции

4.2 Равномерная сходимость ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции

4.1 Равномерная сходимость ряда Фурье для дифференцируемой функции

Теорема 4.1 (о равномерной сходимости ряда Фурье) *Пусть функция $f(x)$ 2π периодична и дифференцируема в каждой точке $x \in \in \mathbb{R}$, и пусть функция $f'(x) \in \Re[-\pi;\pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $f(x)$.*

Доказательство. $\triangleright$ В силу признака сходимости ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции, ряд Фурье функции f будет сходиться к $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Покажем с помощью признака Вейерштрасса, что функциональный ряд (4.1) равномерно сходится на $\mathbb{R}$. Учитывая, что $f' \in \Re[-\pi;\pi]$, интегрируя по частям (а это возможно), получим, что

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\left[f(x)\sin nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\left[f(x)\cos nx\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx.$$

Поскольку $\sin(\pm\pi n) = 0$, в силу периодичности функций $f(x)$ и $\cos nx$ имеем $f(\pi)\cos \pi n = f(-\pi)\cos(-\pi n)$, тогда

$$a_n = -\frac{b_n'}{n}, \quad b_n = \frac{a_n'}{n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \ \text{ и } \ b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Так как для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $|ab| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, то имеют место оценки:

$$|a_n| = \frac{1}{n}|b'_n| \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + (b'_n)^2),$$

$$|b_n| = \frac{1}{n}|a'_n| \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + (a'_n)^2).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((a'_n)^2 + (b'_n)^2)$ сходится в силу неравенства Бесселя, поскольку $f' \in \Re[-\pi;\pi]$. Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ также сходится. Поэтому в силу наших оценок, сходится и ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|).$$

Замечая, что $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n|$, по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, получаем равномерную сходимость ряда (4.1) к своей сумме $f(x)$. ◁

4.2 Равномерная сходимость ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции

Теорема 4.2 *Пусть $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, и существует не более конечного числа точек $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $-\pi \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < < x_n \leqslant \pi$ таких, что для всех $x \in (-\pi;\pi) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n}\{x_k\}$ существует конечная производная $f'(x)$, причем $f' \in \Re[-\pi;\pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции $f(x)$.*

Доказательство. ▷ Пусть

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4.2}$$

Совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы, с учётом того, что $f' \in \Re[-\pi;\pi]$, получаем

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, \quad b_n = \frac{a'_n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx.$$

Дальше, повторяя рассуждения из предыдущей теоремы, получаем, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к некоторой непрерывной и 2π периодической функции $S(x)$, для которой ряд (4.2) также является рядом Фурье.

Покажем, что $S(x) \equiv f(x)$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$. Так как для любого $x \neq x_k (k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ существует конечная производная $f'(x)$, то сумма ряда Фурье (4.2) будет равна $f(x)$, т.е. $S(x) = f(x)$ для любого $x \neq x_k$. Функция $\varphi(x) = S(x) - f(x)$ будет непрерывна на $\mathbb{R}$, так как $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны, кроме того, $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$, $x \neq x_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$. Очевидно, что в силу непрерывности $\varphi(x)$ $\lim\limits_{x \to x_k} \varphi(x) = \varphi(x_k) = 0$, т.е. $S(x_k) = f(x_k)$, и поэтому $S(x) \equiv f(x)$ на $[-\pi; \pi]$. Таким образом, ряд (4.2) равномерно сходится к $f(x)$ на $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Следствие 4.1 *Пусть $f(x)$ 2π периодична, непрерывна на $\mathbb{R}$ и кусочно-дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, причем $f' \in \Re[-\pi; \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к непрерывной кусочно-дифференцируемой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. $\triangleright$ Доказательство следует из того, что непрерывная кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы. $\triangleleft$

Тема 5 Приближение функций

5.1 Равномерное приближение кусочно-линейной функции тригонометрическим многочленом

5.2 Равномерное приближение непрерывной функции многочленом

5.3 Приближение интегрируемой функции кусочно-линейной функцией в среднем и средне квадратичном

5.4 Приближение интегрируемой функции тригонометрическими многочленами в средне квадратичном и в среднем

5.1 Равномерное приближение кусочно-линейной функции тригонометрическим многочленом

Определение 5.1 *Непрерывную функцию $l(x)$, заданную на $[a, b]$, будем называть кусочно-линейной, если существует разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ такое, что на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ функция линейна.*

Теорема 5.1 (о равномерном приближении кусочно-линейной функции тригонометрическими многочленами) *Пусть на отрезке $[-\pi; \pi]$ задана кусочно-линейная функция $l(x)$, причём $l(-\pi) = l(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

такой, что $|l(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$.

Доказательство. $\triangleright$ Очевидно, что $l(x)$ является кусочно-дифференцируемой и непрерывной на $[-\pi; \pi]$. Продолжим $l(x)$ периодическим образом на всю числовую прямую. С учётом того, что $l(-\pi) = l(\pi)$, продолженная функция, которую опять обозначим через $l(x)$, будет непрерывной на $\mathbb{R}$. По теореме о равномерной сходимости ряда Фурье для непрерывной кусочно-дифференцируемой функции ряд Фурье функции $l(x)$ будет равномерно сходиться к $l(x)$ на $\mathbb{R}$. Это означает, что для частичных сумм

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

ряда Фурье функции $l(x)$ будет выполняться условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > N$ и для всех $x \in [-\pi; \pi]$ будет справедливо неравенство $|l(x) - T_n(x)| < \varepsilon$. Доказательство теоремы завершится, если мы возьмём фиксированный многочлен $T_n(x)$, обладающий указанным свойством. $\triangleleft$

5.2 Равномерное приближение непрерывной функции многочленом

Теорема 5.2 (вторая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом) *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-\pi;\pi]$.

Доказательство. $\triangleright$ В силу непрерывности функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$ по теореме Кантора $f(x)$ будет равномерно непрерывной на $[-\pi;\pi]$: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in [-\pi;\pi]$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, и возьмём разбиение отрезка $[-\pi;\pi]$ P такое, что $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = \pi$ с диаметром $\lambda(P) < \delta$. Построим непрерывную кусочно-линейную функцию $l(x)$, которая будет линейна на каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, и в точках x_k положим $l(x_k) = f(x_k)$. По построению функция $l(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $l(-\pi) = f(-\pi) = f(\pi) = l(\pi)$. Для любой точки $x \in [x_{k-1}, x_k]$ имеет место оценка

$$|l(x) - l(x_{k-1})| \leqslant |l(x_k) - l(x_{k-1})| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Зафиксируем произвольное $x \in [-\pi;\pi]$. Точка x принадлежит какому-то отрезку разбиения P, пусть $x \in [x_{k-1};\, x_k]$, тогда

$$|f(x) - l(x)| = |f(x) - f(x_{k-1}) + l(x_{k-1}) - l(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f(x_{k-1})| + |l(x_{k-1}) - l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку функция $l(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1, то существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi;\pi]$ выполняется неравенство

$$|T_n(x) - l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что для всех $x \in [-\pi;\pi]$

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant |f(x) - l(x)| + |l(x) - T_n(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему. ◁

Теорема 5.3 (первая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленом) *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен*

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

такой, что $|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a,b]$.

Доказательство. ▷ Пусть сначала $[a,b] = [0,\pi]$. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ чётным образом, при этом будем иметь, что $f(-\pi) = f(\pi)$. По второй теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-\pi;\pi]$. Функции $\cos kx$, $\sin kx$, входящие в $T_n(x)$, раскладываются в степенной ряд с радиусом сходимости $R = +\infty$. Поэтому функция $T_n(x)$, как линейная комбинация этих функций, раскладывается в степенной ряд, сходящийся на $\mathbb{R}$ и равномерно сходящийся на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$. А это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует m такое, что $|T_n(x) - P_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in [0,\pi]$, где $P_m(x)$ — частичная сумма степенного ряда, в который раскладывается функция $T_n(x)$. Тогда

$$|f(x) - P_m(x)| \leqslant |f(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in [0,\pi]$.

Пусть теперь f непрерывна на $[a,b]$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(a + \frac{t}{\pi}(b-a)), \quad t \in [0,\pi].$$

В силу непрерывности $F(t)$ на $[0,\pi]$ по доказанному выше её можно равномерно приблизить некоторым многочленом $Q_m(t)$ таким, что

$$|F(t) - Q_m(t)| < \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [0,\pi].$$

Делая замену в этом неравенстве $x = a + \dfrac{t}{\pi}(b-a)$, обозначив $P_m(x) = Q_m(\pi\dfrac{x-a}{b-a})$, получим, что $|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a,b]$. ◁

5.3 Приближение интегрируемой функции кусочно-линейной функцией в среднем и средне квадратичном

Теорема 5.4 *Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная кусочно-линейная функция $l(x)$ такая, что $l(-\pi) = l(\pi) = 0$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|dx < \varepsilon$.*

Доказательство. $\triangleright$ Поскольку $f \in \Re[-\pi;\pi]$, то она будет, во-первых, ограниченной функцией: $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [-\pi;\pi]$, где $M = \sup\limits_{[-\pi;\pi]} |f(x)|$; во-вторых, в силу критерия Дарбу интегрируемости функции по Риману имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $P : -\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \pi$ отрезка $[-\pi;\pi]$, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$, где $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $\eta_0 = \min\limits_{k=1,\ldots n} |\Delta x_k| > 0$, и пусть $0 < \eta < \min(\dfrac{\varepsilon}{4nM}, \dfrac{\eta_0}{2})$.

Непрерывную функцию $l(x)$ построим следующим образом:

$$l(x) = \begin{cases} m_k, & \text{если } x \in [x_{k-1} + \frac{\eta}{2}, x_k - \frac{\eta}{2}], k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{если } x = \pm\pi, \\ \text{линейна}, & \text{если } x \in [x_k - \frac{\eta}{2}, x_k + \frac{\eta}{2}] \cup [-\pi, -\pi + \frac{\eta}{2}] \cup \\ & \cup [\pi - \frac{\eta}{2}, \pi],\ k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Из построения функции $l(x)$ следует, что

$$|f(x) - l(x)| \leqslant M_k - m_k \quad \text{для любого } x \in [x_{k-1} + \frac{\eta}{2}, x_k - \frac{\eta}{2}]$$

и

$$|f(x) - l(x)| \leqslant |f(x)| + |l(x)| \leqslant 2M \text{ для всех } x \in [-\pi;\pi].$$

Поэтому, обозначив

$$\alpha_k = x_k - \frac{\eta}{2}\ (k = 1, 2, \ldots, n),\ \beta_k = x_{k-1} + \frac{\eta}{2}\ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\alpha_0 = -\pi, \quad \beta_{n+1} = \pi,$$

получим оценку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\beta_k}^{\alpha_k} |f(x) - l(x)|\, dx + \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\beta_k} |f(x) - l(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k + 2M \sum_{k=1}^{n+1}(\beta_k - \alpha_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2Mn\eta < \frac{\varepsilon}{2} + 2Mn \cdot \frac{\varepsilon}{4nM} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|\, dx < \varepsilon$. $\triangleleft$

Следствие 5.1 *Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная кусочно-линейная функция $l(x)$ такая, что $l(-\pi) = l(\pi) = 0$ и $\|f - l\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|^2\, dx < \varepsilon$.*

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, в силу предыдущей теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная кусочно-линейная функция $l(x)$ такая, что $l(-\pi) = l(\pi) = 0$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|dx < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \sup\limits_{[-\pi;\pi]} |f(x)|$. Кроме того, по построению $|f(x) - l(x)| \leqslant 2M$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$, поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|^2\, dx \leqslant 2M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - l(x)|dx < \varepsilon$. $\triangleleft$

5.4 Приближение интегрируемой функции тригонометрическими многочленами в средне квадратичном и в среднем

Теорема 5.5 *Если $f \in \Re[-\pi; \pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx < \varepsilon$.*

Доказательство. $\triangleright$ По следствию 5.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная кусочно-линейная функция $l(x)$ такая, что $l(-\pi) = l(\pi) = 0$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - l(x))^2\, dx < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

В свою очередь, для функции $l(x)$ по второй теореме Вейерштрасса 5.2 существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что $|l(x) - T_n(x)| < \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{8\pi}}$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$. Тогда имеет место оценка

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (l(x) - T_n(x))^2\, dx \leqslant 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{8\pi} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Дальше воспользуемся неравенством $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [(f(x) - l(x)) + (l(x) - T_n(x))]^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - l(x))^2\, dx + 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} (l(x) - T_n(x))^2\, dx \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \triangleleft$$

Замечание 5.1 Доказанная теорема носит название теоремы о полноте тригонометрической системы 1, $\cos x$, $\sin x, \ldots$ в средне квадратичном.

Теорема 5.6 (о полноте тригонометрической системы в среднем) *Если* $f \in \Re[-\pi;\pi]$*, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует тригонометрический многочлен* $T_n(x)$ *такой, что* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|\, dx < \varepsilon$*.*

Доказательство. $\triangleright$ Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы, если воспользоваться теоремой 5.4 и элементарным неравенством $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. $\triangleleft$

Упражнение 5.1 Докажите теорему 5.6.

Тема 6 Сходимость ряда Фурье в смысле средне квадратичного

6.1 Равенство Парсеваля-Стеклова (свойство замкнутости)

Теорема 6.1 *Пусть $f \in \Re[-\pi;\pi]$. Тогда имеет место равенство Парсеваля-Стеклова (свойство замкнутости тригонометрической системы)*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Доказательство. $\triangleright$ По теореме 5.5 о полноте тригонометрической системы в среднем квадратичном для любого $\varepsilon>0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx<\varepsilon$.

В силу экстремальных свойств коэффициентов Фурье функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$ (теорема 1.6) имеем оценку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_{n_0}(x))^2\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_{n_0}(x))^2\,dx<\varepsilon, \tag{6.2}$$

где $S_{n_0}(x)$ – n_0 частичная сумма ряда Фурье функции f. Дальше воспользуемся основным тождеством Бесселя (2.9):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)] \tag{6.3}$$

Используя (6.2), получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\pi[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n_0}(a_k^2+b_k^2)]<\varepsilon.$$

Очевидно, что для всех $n>n_0$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)] \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0}(a_k^2 + b_k^2)] < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)] < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)].\triangleleft$$

6.2 Сходимость ряда Фурье в средне квадратичном

Теорема 6.2 *Если функция $f \in \Re[-\pi;\pi]$ и 2π периодична, то ряд Фурье функции f сходится в средне квадратичном к $f(x)$, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2\,dx = 0.$

Доказательство. $\triangleright$ Для функции $f \in \Re[-\pi;\pi]$ имеет место равенство (6.1) Парсеваля-Стеклова. Воспользуемся тождеством Бесселя (6.3), переходя в котором к пределу при $n \to \infty$ с учётом (6.1), получим требуемое свойство. $\triangleleft$

Замечание 6.1 Как мы отмечали раньше, поточечной сходимости ряда Фурье во всех точках к $f(x)$ нет даже для некоторых непрерывных функций. Доказанная теорема гарантирует нам сходимость ряда Фурье в средне квадратичном для функций $f \in \Re[-\pi;\pi]$.

6.3 О единственности ряда Фурье для непрерывной функции

Теорема 6.3 *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на $[-\pi;\pi]$, и*

$$f_k(x) \sim \frac{a_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(k)}\cos nx + b_n^{(k)}\sin nx), \quad k = 1, 2.$$

— ряды Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $[-\pi;\pi]$ тогда и только тогда, когда

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n^{(1)} = b_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6.4}$$

Доказательство. $\triangleright$ Необходимость очевидна, если заметить, что при $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $[-\pi;\pi]$ по формулам Фурье для коэффициентов Фурье будем иметь равенства:

$$a_n^{(1)} = a_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n^{(1)} = b_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Достаточность. Пусть имеют место равенства (6.4). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, очевидно, будут равны нулю, тогда из равенства Парсеваля-Стеклова будет следовать, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_1(x) - f_2(x))^2\,dx = 0.$

Поскольку $\varphi^2(x) \geqslant 0$ и $\varphi^2(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$, то из последнего равенства по соответствующему свойству интегралов Римана получаем, что $\varphi^2(x) \equiv 0$ на $[-\pi;\pi]$, т. е. $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $[-\pi;\pi]$. $\triangleleft$

Следствие 6.1 *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и 2π периодична на $\mathbb{R}$ и*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

причём ряд сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$, тогда сумма этого ряда $S(x)$ совпадает на $[-\pi;\pi]$ с функцией $f(x)$.

Доказательство. $\triangleright$ Ранее мы доказали, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы $S(x)$ (теорема 1.2), т. е.

$$S(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Так как $S(x)$, $f(x)$ непрерывны, и они имеют одни и те же ряды Фурье, то по теореме 6.3 $S(x) = f(x)$ на $[-\pi;\pi]$. $\triangleleft$

Тема 7 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

7.1 Почленное дифференцирование рядов Фурье

Теорема 7.1 *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[-\pi;\pi]$. *Если на* $[-\pi;\pi]$ *существует*

$$f'(x) \in \Re[-\pi;\pi],$$

и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{7.1}$$

тогда $f'(x)$ *имеет ряд Фурье*

$$f' \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + (nb_n + (-1)^n c)\cos nx), \tag{7.2}$$

где $c = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1} nb_n$.

Доказательство. $\triangleright$ Так как $f'(x) \in \Re[-\pi;\pi]$, то для $f'(x)$ существует ряд Фурье

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции $f'(x)$.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}\Big) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = c.$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\Big) =$$

$$= \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi}(-1)^n + nb_n = (-1)^n c + nb_n,$$

где $c = \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi}$,

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\Big) = -na_n.$$

Таким образом,

$$f' \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + (nb_n + (-1)^n c)\cos nx),$$

где $c = \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi}$.

Так как по свойствам коэффициентов Фурье $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(nb_n + (-1)^n c) = 0$, откуда $c = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1} nb_n$.

Получаем

$$f' \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + (nb_n + (-1)^n c)\cos nx),$$

где $c = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1} nb_n$. $\triangleleft$

Следствие 7.1 *Если в условиях теоремы потребовать дополнительно $f(-\pi) = f(\pi)$, то f' имеет ряд Фурье вида*

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx),$$

т. е. ряд Фурье функции f' получается при помощи формального почленного дифференцирования ряда Фурье функции f.

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, если $f(-\pi) = f(\pi)$, то $c = 0$. $\triangleleft$

Замечание 7.1 Если ряд (7.1) сходится поточечно к $f(x)$, то ряд Фурье (7.2) для f', вообще говоря, не обязан сходиться к $f'(x)$ поточечно.

Теорема 7.2 (о скорости убывания коэффициентов Фурье) *Пусть функция $f(x)$ 2π периодична и имеет $k-1$ непрерывную производную $f^{(k-1)}(x)$, и $f^{(k)}(x) \in \Re[-\pi;\pi]$, тогда для коэффициентов Фурье функции f имеют место оценки:*

$$a_n = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big), \quad b_n = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. $\triangleright$ Поскольку функции f', f'', $\ldots$, $f^{(k-1)}$, $f^{(k)}$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1 и в силу периодичности условию $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, то после формального k-кратного дифференцирования ряда (7.1), получим ряд Фурье функции $f^{(k)}$.

$$f^{(k)}(x) \sim \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\Big)^{(k)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(n^k a_n \cos(nx + k\frac{\pi}{2}) + n^k b_n \sin(nx + k\frac{\pi}{2})\Big).$$

Так как $\cos(nx + k\frac{\pi}{2})$ с точностью до знака равно $\cos nx$ либо $\sin nx$, а $\sin(nx + k\frac{\pi}{2})$ с точностью до знака равно $\sin nx$ либо $\cos nx$, то с точностью до знака числа $n^k a_n$ и $n^k b_n$ есть коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(x) \in \Re[-\pi;\pi]$, и по свойствам коэффициентов Фурье интегрируемой функции $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^k b_n = 0$, т. е. $a_n = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$ и $b_n = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$. $\triangleleft$

7.2 Почленное интегрирование рядов Фурье

Теорема 7.3 *Пусть $f(x)$ непрерывная на $[-\pi;\pi]$ и 2π периодическая функция, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\frac{\sin nx}{n} + b_n\frac{1-\cos nx}{n}\Big), \qquad (7.3)$$

где ряд в правой части получен формальным почленным интегрированием ряда Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$, которая будет дифференцируемой на $\mathbb{R}$ с производной $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \in \Re[-\pi;\pi]$. Кроме того, $F(x)$ 2π периодическая, так как

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int\limits_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - a_0\pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - a_0\pi = 0.$$

Последнее равенство следует из определения коэффициента a_0. Для дифференцируемой 2π периодической функции $F(x)$ имеет место разложение

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \qquad (7.4)$$

Заметим, что $F'(x) \in \Re[-\pi;\pi]$ и, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим при $n \geqslant 1$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n}F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} F'(x)\frac{\sin nx}{n}dx\Big] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - \frac{a_0}{2})\sin nx\,dx = -\frac{b_n}{n},$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos nx}{n}F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} F'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - \frac{a_0}{2})\cos nx\,dx = \frac{a_n}{n}.$$

Равенство (7.4) имеет место для всех $x \in \mathbb{R}$, в частности для $x = 0$ получим

$$F(0) = 0 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n.$$

Откуда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{\alpha_0}{2}$. Подставляя найденные α_n, β_n и $\frac{\alpha_0}{2}$ в формулу (7.4), получим требуемую формулу (7.3). $\triangleleft$

Замечание 7.2 Доказанные в этом пункте теоремы остаются верными, если вместо требования интегрируемости соответствующих функций потребовать их абсолютную интегрируемость.

Тема 8 Интеграл Фурье

8.1 Определение интеграла Фурье

В рядах Фурье были указаны достаточные условия, при которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, то есть представима в виде суммы гармонических колебаний. Дальше в этой теме попытаемся перенести эти рассуждения на непериодические функции, но уже не с помощью ряда, а с помощью интеграла (интеграла Фурье).

Определение 8.1 *Несобственный интеграл вида*

$$\int\limits_0^{+\infty} \big(a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda, \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

называется тригонометрическим интегралом.

Пусть теперь $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то есть $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < < +\infty$. В силу оценок $|f(x)\cos\lambda x| \leqslant |f(x)|$ и $|f(x)\sin\lambda x| \leqslant |f(x)|$, получаем, что всегда сходятся интегралы

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,\\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Формулы (8.2) являются аналогом коэффициентов Фурье (1.4) в теории рядов Фурье.

Определение 8.2 *Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тригонометрический интеграл (8.1) называется интегралом Фурье для функции $f(x)$, если функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, $\lambda \in [0;+\infty)$ вычислены по формулам Фурье (8.2).*

Итак, каждой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f мы можем сопоставить ее интеграл Фурье:

$$f \sim \int\limits_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ вычисляются по формулам (8.2).

Так же, как и в теории рядов Фурье, для интеграла Фурье функции f возникают вопросы о сходимости интеграла Фурье, о сходимости его к $f(x)$. Ниже будут указаны условия, при которых интеграл Фурье сходится к $f(x)$ или $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Замечание 8.1 Формально, подставляя формулы (8.2) в (8.1) и преобразуя полученное выражение, получим

$$\int\limits_0^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\big)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\big(\cos\lambda t\cdot\cos\lambda x+\sin\lambda t\cdot\sin\lambda x\big)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

то есть интеграл Фурье функции $f(x)$ допускает представление

$$f\sim\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{8.3}$$

Напомним, что функция f в точке x_0 удовлетворяет условиям Дини, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0\pm0}f(x)=f(x_0\pm\pm0)$, и существует $h>0$ такое,что сходятся несобственные интегралы

$$\int\limits_0^h\frac{f(x_0\pm u)-f(x_0\pm0)}{u}du.$$

8.2 Признак Дини сходимости интеграла Фурье

Теорема 8.1 (признак Дини сходимости интеграла Фурье) *Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, и в точке $x_0\in\mathbb{R}$ выполняются условия Дини, тогда интеграл Фурье для функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, то есть имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x_0)\,dt=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, & \textit{если } x_0 - \textit{точка разрыва } f, \\ f(x_0), & \textit{если } x_0 - \textit{точка непрерывности } f. \end{cases} \tag{8.5}$$

Доказательство. ▷ Схема доказательства этой теоремы аналогична доказательству соответствующей теоремы для рядов Фурье.

Пусть

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\omega} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x_0)\,dt,\ \omega\in[0;+\infty). \tag{8.6}$$

Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{\omega\to\infty}\mathcal{I}(\omega) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Изменяя порядок интегрирования в интеграле (8.6), имеем

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(t-x_0)}{t-x_0}\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=\omega} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\omega(t-x_0)}{t-x_0}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{+\infty} f(t)\frac{\sin\omega(t-x_0)}{t-x_0}dt + \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\frac{\sin\omega(t-x_0)}{t-x_0}dt\right] =$$

$=$[в первом интеграле замена $t-x_0=u$, а во втором — $t-x_0=-u$]$=$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\Big)\frac{\sin\omega u}{u}\,du.$$

Таким образом,

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\Big)\frac{\sin\omega t}{t}\,dt.$$

Изменение порядка интегрирования требует объяснения. В случае непрерывности функции $f(x)$ это обосновано теоремой об интегрировании несобственного интеграла по параметру от непрерывной функции $f(t)\cos\lambda(t-x_0)$, так как, в силу оценки $|f(t)\cos\lambda(t-x_0)| \leqslant |f(t)|$ для любого $\lambda \in [0; +\infty)$ и абсолютной интегрируемости $f(t)$, по теореме Вейерштрасса внутренний интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t - x_0)\, dt$ сходится равномерно по $\lambda \in [0; +\infty)$. В общем случае следует воспользоваться теоремой 3 из [6, стр.228], либо теоремой 7 из [11, стр.681], которые можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 8.2 (о непрерывности, дифференцируемости и интегрировании в конечных пределах несобственного интеграла) *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена на множестве $[a, b] \times \times [0; \infty)$, а функция $g(y)$ абсолютно интегрируема на $[0; \infty)$. Тогда функция*

$$F(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x, y)g(y)\, dy, \quad x \in [a, b]$$

обладает следующими свойствами:

1) непрерывна на $[a, b]$;

2) $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{0}^{+\infty} f(x, y)g(y)\, dy = \int\limits_{0}^{+\infty} g(y)\, dy \int\limits_{a}^{b} f(x, y)\, dx$;

3) если, кроме того, существует и непрерывна $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ на $[a; b]\times \times[0; +\infty)$, причем $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant M$ для любого $(x, y) \in [a; b] \times [0; +\infty)$, то для всех $x \in [a; b]$ существует $F'(x)$, и $F'(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot g(y)\, dy$.

Последняя формула из 3) будет иметь место и при условиях: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant M(y)$ для любого $(x, y) \in [a; b] \times [0; +\infty)$, и функция $y \cdot g(y)$ абсолютно интегрируема на $[0; +\infty)$.

Первая и третья часть утверждения будет использована позже.

Таким образом заключение 2) теоремы 8.2 гарантирует нам законность изменения порядка интегрирования в (8.6).

Далее воспользуемся интегралом Дирихле

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\, dt = 1, \quad \omega > 0,$$

откуда

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2} \cdot \frac{\sin\omega t}{t}\, dt.$$

Поэтому

$$\mathfrak{I}(\omega) + \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} [f(x_0+t) - f(x_0+0)] \cdot \frac{\sin\omega t}{t}\, dt + \tag{8.7}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} [f(x_0-t) - f(x_0-0)] \cdot \frac{\sin\omega t}{t}\, dt.$$

Рассмотрим первый интеграл из (8.7) и запишем его в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \cdot \sin\omega t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \cdot \sin\omega t\, dt + \tag{8.8}$$
$$+\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(x_0+t)}{t} \cdot \sin\omega t\, dt - f(x_0+0)\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\, dt.$$

Первый интеграл из правой части равенства (8.8) стремится к нулю при $\omega \to +\infty$ по лемме Римана 2.1, так как функция $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ абсолютно интегрируема в силу условий Дини. Второй интеграл в (8.8) по той же лемме Римана стремится к нулю при $\omega \to +\infty$, так как в этом случае функция $\dfrac{f(x_0+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на $[1, +\infty)$ $\left(\left|\dfrac{f(x_0+t)}{t}\right| \leqslant |f(x_0+t)|\right)$. Наконец в третьем интеграле сделаем замену $u = \omega t$, тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t}\, dt = \int\limits_\omega^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du \to 0 \text{ при } \omega \to +\infty,$$

так как интеграл Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\, du = \dfrac{\pi}{2}$ является сходящимся.

Таким образом, левая часть в (8.8) стремится к нулю при $\omega \to +\infty$.

Совершенно аналогично доказывается, что второй интеграл из левой части (8.7) также имеет предел равный нулю при $\omega \to +\infty$.

Предельный переход при $\omega \to +\infty$ в (8.7), с учетом сказанного выше, и доказывает теорему. $\triangleleft$

Замечание 8.2 В отличие от рядов Фурье для интегралов Фурье не имеет место принцип локализации Римана, поскольку условие абсолютной интегрируемости функции f не является локальным условием.

Так же как и в теории рядов Фурье, указывая классы функций, для которых будут выполняться условия Дини, мы получим классы функций, для которых будет иметь место равенство (8.5).

Укажем эти классы.

Следствие 8.1 *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, и в любой точке x выполняется условие Гельдера тогда интеграл Фурье функции f сходится к $f(x)$ на $\mathbb{R}$, т. е.*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt \text{ для любого } x \in \mathbb{R}. \tag{8.9}$$

Этот факт следует из признака Дини 8.1 сходимости интеграла Фурье, если заметить, что, во-первых, $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а, во-вторых, в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ выполняются условия Дини (см. доказательство признака 3.1).

Следствие 8.2 *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет на $\mathbb{R}$ m ($m \geqslant 1$) непрерывных производных, то имеет место (8.9).*

Следствие 8.3 *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и кусочно-непрерывна на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, причем для любого $x \in \mathbb{R}$ либо существует конечная производная, либо существуют обе конечные односторонние производные $f'_{\pm}(x \pm 0)$ в расширенном смысле (признак 3.2), то имеет место формула (8.5).*

Следствие 8.4 *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, и в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия Дини. Тогда интеграл Фурье сходится к $f(x)$ и имеет место (8.9), причем:*

а) если функция $f(x)$ — четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos \lambda x\, d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t\, dt \text{ для любого } x \in \mathbb{R};$$

б) если функция $f(x)$ — нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos \lambda x\, d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t\, dt \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Этот факт следует из того, что если $f(x)$ — четная, то для всех $\lambda \geqslant 0$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt = 0,$$

если же $f(x)$ — нечетная, то для всех $\lambda \geqslant 0$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt = 0,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

8.3 Интеграл Фурье в комплексной форме

Прежде чем записать интеграл Фурье в комплексной форме сделаем несколько замечаний.

Замечание 8.3 Ниже будет использовано еще одно понятие интеграла.

Определение 8.3 *Пусть функция $f(t)$ определена на $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом отрезке $[-l, l] \subset \mathbb{R}$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta} f(t)\,dt,$$

то его называют главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ и обозначают v.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

Таким образом, по определению

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta} f(t)\,dt.$$

Заметим, что при определении несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ рассматривается предел $\lim\limits_{\substack{\eta\to+\infty\\ \xi\to-\infty}} \int\limits_{\xi}^{\eta} f(t)\,dt$. В определении же интеграла в смысле главного значения требуется лишь существование указанного предела для частного случая $\xi = -\eta$ и $\eta \to +\infty$.

Отсюда следует, что если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, то существует $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, и они равны между собой.

Совершенно аналогично вводится понятие интеграла в смысле главного значения в изолированной особой точке $c \in (a, b)$ для функции $f(t)$:

$$v.p. \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = \lim_{\delta\to+0} \left[\int\limits_{a}^{c-\delta} f(t)\,dt + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(t)\,dt \right].$$

В качестве примеров рассмотрим интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$. Как несобственные они не существуют, но в смысле главного значения они существуют и равны нулю.

Замечание 8.4 Дальше нам придется рассматривать комплексно-значные функции $w(t) = u(t) + iv(t)$ действительного переменного t. Производную функции $w(t)$ определим по формуле $w^{'}(t) = u^{'}(t) + iv^{'}(t)$, если $u^{'}(t)$ и $v^{'}(t)$ существуют.

Например, для функции $e^{i\alpha t} = \cos\alpha t + i\sin\alpha t$ имеем производную $(e^{i\alpha t})' = -\alpha\sin\alpha t + i\alpha\cos\alpha t = i\alpha\cdot e^{i\alpha t}$.

Аналогично определяются и интегралы: собственный, несобственный, в смысле главного значения от функции $w(t)$

$$\int\limits_{a}^{b} w(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} u(t)\,dt + i\int\limits_{a}^{b} v(t)\,dt,\ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

Теорема 8.3 (интеграл Фурье в комплексной форме) *Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, и в любой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия Дини. Тогда интеграл Фурье для функции f сходится к $f(x)$ всюду, и имеет место формула Фурье интеграла Фурье в комплексной форме:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)}\,dt \right] d\lambda \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. $\triangleright$ В силу условий теоремы имеет место формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt.$$

Отсюда следует, что существует несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$, где

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(\lambda)$ — четная, т. е. $\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

2) интеграл $\varphi(\lambda)$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как $|f(t) \cos \lambda(t-x)| \leqslant |f(t)|$, и f абсолютно интегрируема. Функция $f(t) \cos \lambda(t-x)$ непрерывна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, поэтому $\varphi(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$ в силу четности $\varphi(\lambda)$.

Наряду с функцией $\varphi(\lambda)$ рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(t-x)\, dt.$$

Функция $\psi(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ по тем же причинам, что и $\varphi(\lambda)$. Кроме того, $\psi(\lambda)$ — нечетная, поэтому всегда существует интеграл $\int\limits_{-\eta}^{\eta} \psi(\lambda)\, d\lambda = 0$. Следовательно, $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda)\, d\lambda = 0$ (хотя несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda)\, d\lambda$ может и не существовать).

Тогда из формулы Фурье имеем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda - \frac{i}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\lambda) - i\psi(\lambda))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \big[\cos\lambda(t-x) - i\sin\lambda(t-x)\big]\, dt \Big\}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)}\, dt \right] d\lambda. \triangleleft$$

Замечание 8.5 Если f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет непрерывные производные $f^{(m)}$, $m \geqslant 1$, то можно показать, интегрируя по частям, что $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ также абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, и поэтому формулу Фурье можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)}\, dt \right] d\lambda,$$

где все интегралы понимаются как несобственные.

Тема 9 Преобразование Фурье

9.1 Определение преобразования Фурье

Для абсолютно интегрируемой и непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$, для которой в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия Дини, формулу Фурье запишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right] d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Определим функцию $\Phi(\lambda)$ равенством

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt, \tag{9.1}$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{9.2}$$

Заметим, что формула (9.1) справедлива для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Определение 9.1 *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то функция $\Phi(\lambda)$, определяемая равенством (9.1) называется преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F[f]$ или $\hat{f}(\lambda)$, таким образом,*

$$F[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt, \text{ для любого } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пример 9.1 Найдем преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > a, \end{cases}$$

тогда

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Этот пример показывает, что хотя функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, но $\hat{f}(\lambda)$ не является таковой, т. е. отображение $F : f \to \hat{f}$ не переводит пространство абсолютно интегрируемых функций в себя.

Замечание 9.1 Формулу (9.2) называют формулой обращения для преобразования Фурье. Между формулами (9.1) и (9.2) существует формальное сходство — вторая из них отличается от первой лишь знаком в показателе степени и множителем $\dfrac{1}{2\pi}$ перед интегралом. Однако при всем внешнем сходстве формулы (9.1) и (9.2) совершенно различны по существу: в формуле (9.1) интеграл существует в несобственном смысле, так как f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, а в формуле (9.2), вообще говоря, интеграл существует лишь в смысле главного значения. Кроме того, формула (9.1) есть определение функции $\hat{f}(\lambda)$, а формула (9.2) представляет собой иную запись формулы Фурье, т. е. содержит утверждение, что стоящий там справа интеграл равен исходной функции f при дополнительных условиях (непрерывность, выполнение условий Дини), налагаемых на абсолютно интегрируемую функцию.

Определение 9.2 *Пусть функция $g(\lambda)$ определена на $\mathbb{R}$. Обратным преобразованием Фурье функции g называется функция*

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

при условии, что главное значение интеграла существует.

Обозначим обратное преобразование Фурье следующим образом

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Замечание 9.2 Если g — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то обратное преобразование Фурье функции g всегда существует, и кроме того

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

т. е. интеграл существует в несобственном смысле.

9.2 Обращение для преобразования Фурье и для обратного преобразования Фурье

Теорема 9.1 (обращения для преобразования Фурье и для обратного преобразования Фурье) *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, непрерывна на $\mathbb{R}$, и в любой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия Дини. Тогда имеет место равенство*

$$F^{-1}\big[F[f]\big] = F\big[F^{-1}[f]\big] = f.$$

Доказательство. $\triangleright$ Поскольку для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы 8.3, то по формуле Фурье в комплексной форме имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)}\, dt \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Это равенство равносильно следующему $f = F^{-1}\big[F[f]\big]$.

Осталось доказать, что $F\big[F^{-1}[f]\big] = f$.

Для этого формулу Фурье в комплексном виде запишем несколько иначе. Формулу Фурье для $f(x)$, в силу четности функции косинус, рассмотрим в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t)\, dt.$$

Поскольку функция синус нечетная функция, то

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t)\, dt = 0.$$

(см. доказательство теоремы 8.3).

Из последних двух равенств получим формулу Фурье, записанную в другом виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(x-t)}\, dt \right] d\lambda.$$

Отсюда

$$f(x) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right]d\lambda = F\big[F^{-1}[f]\big],$$

причем здесь преобразование Фурье понимается как соответствующий интеграл в смысле главного значения. $\lhd$

9.3 Свойства преобразования Фурье

Теорема 9.2 (линейность преобразования Фурье) *Пусть функции f_1 и f_2 абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда имеет место свойство линейности преобразования Фурье*

$$F\big[\alpha f_1 + \beta f_2\big] = \alpha F\big[f_1\big] + \beta F\big[f_2\big]$$

или

$$(\alpha \widehat{f_1 + \beta} f_2)(\lambda) = \alpha\widehat{f_1}(\lambda) + \beta\widehat{f_2}(\lambda).$$

Эта теорема следует непосредственно из свойства линейности интеграла.

Теорема 9.3 (о непрерывности, ограниченности и убывании на бесконечности преобразования Фурье). *Пусть функции $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, тогда:*

1) $\hat{f}(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} |\hat{f}(\lambda)| = 0$;

3)$|\hat{f}(\lambda)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $\rhd$ Для доказательства 1) и 2) запишем функцию $\hat{f}(\lambda)$ в виде

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt - i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

Функции $a(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$ и $b(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$ будут непрерывны для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ по первому заключению теоремы 8.2 о непрерывности, дифференцируемости и интегрировании в конечных пределах несобственного интеграла, так как f — абсолютно интегрируема, а $|\cos\lambda t| \leqslant 1$ и $|\sin\lambda t| \leqslant 1$. Непрерывность функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и доказывает непрерывность $\hat{f}(\lambda)$.

Второе утверждение теоремы следует из того, что по лемме Римана 2.1 функции $a(\lambda) \to 0$ и $b(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Третье утверждение очевидно:

$$|\hat{f}(\lambda)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\lambda t}|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt. \triangleleft$$

Теорема 9.4 (о преобразовании Фурье производной) *Пусть функции $f(x)$ абсолютно интегрируема и дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f'(x)$ абсолютно интегрируема, тогда*

$$F[f'] = i\lambda F[f] \ \ (\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda \hat{f}).$$

Доказательство. $\triangleright$ Для функции $f(x)$ имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\, dt,$$

и поскольку $f'(x)$ абсолютно интегрируема, то существует

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\, dt = l.$$

Покажем, что $l = 0$. Допустим, что $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = |l| > 0$. Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}$, что при $x > a$ выполняется неравенство $|f(x)| > \dfrac{|l|}{2}$, откуда по признаку сравнения для несобственных интегралов следует, что $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится, что противоречит абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Ранее мы показали, что $\left(e^{-i\lambda t}\right)' = -i\lambda e^{-i\lambda t}$, поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$F[f'] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = f(t) \cdot e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (-i\lambda e^{-i\lambda t})\, dt =$$

$$= i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = i\lambda F[f]. \triangleleft$$

Следствие 9.1 *Пусть существуют непрерывные производные $f^{(k)}(x)$ $k = 1, 2, \ldots, \infty$, и для $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ функции $f^{(m)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, тогда*

$$F[f^{(m)}] = (i\lambda)^m F[f] \quad (\widehat{f^{(m)}}(\lambda) = (i\lambda)^m \hat{f}(\lambda)).$$

Теорема 9.5 (о связи гладкости функции и скорости убывания на бесконечности ее преобразования Фурье) *Пусть существуют непрерывные производные $f^{(k)}(x)$ $k = 1, 2, \ldots, \infty$, и для $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ функции $f^{(m)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, тогда*

$$|\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right) \quad \text{при } |\lambda| \to \infty.$$

Доказательство. $\triangleright$ В условиях теоремы по следствию 9.1 имеем $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda)$. Поскольку функция $f^{(k)}$ абсолютно интегрируема, то по теореме 9.3 имеем $|\widehat{f^{(k)}}(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, т. е. $|\hat{f}(\lambda)| = \dfrac{|\widehat{f^{(k)}}(\lambda)|}{|\lambda|^k} \to$ $\to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, т. е. $|\hat{f}(\lambda)| = o\left(\dfrac{1}{|\lambda|^k}\right)$. $\triangleleft$

Следствие 9.2 *Пусть функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и функции $f^{(m)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$. Тогда функция $\widehat{f^{(m)}}(\lambda)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, причем $\widehat{f^{(m)}}(\lambda)$ убывает при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $\dfrac{1}{|\lambda|^k}$, $(k = 1, 2, \ldots,)$.*

Теорема 9.6 (о связи скорости убывания функции на бесконечности и гладкости ее преобразования Фурье) *Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\hat{f}(\lambda)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем*

$$\hat{f}'(\lambda) = F[-ixf(x)] \text{ и } \hat{f}'(\lambda) \to 0 \ \text{ при } |\lambda| \to \infty.$$

Доказательство. $\triangleright$ В силу условий теоремы существует преобразование $\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt$, причем $\hat{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. После формального дифференцирования по λ несобственного интеграла справа получим следующий интеграл,зависящий от параметра λ,

$$-i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Так как $|tf(t)\cdot e^{-i\lambda t}| = |tf(t)|$ для всех λ и t, а функция $tf(t)$ абсолютно интегрируема, то при условии, что $f(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, по признаку Вейерштрасса интеграл будет равномерно сходиться по λ, и по теореме о дифференцировании несобственного интеграла от непрерывных функций имеем

$$\hat{f}'(\lambda) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt = F[-ixf(x)].$$

В общем случае, т. е. при условии, что $f(x)$ и $xf(x)$ только абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, формула следует из третьего утверждения теоремы 8.2. $\triangleleft$

Следствие 9.3 *Пусть функции $x^m f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ при $m = 0, 1, 2, \ldots, k$, тогда $\hat{f}(\lambda)$ является k раз непрерывно дифференцируемой и*

$$\hat{f}^{(m)}(\lambda) = F[(-ix)^m f(x)],$$

причем

$$|\hat{f}^{(m)}(\lambda)| \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Тема 10 Свертка функций

10.1 Определение и основные свойства свертки

В различных вопросах математики, в особенности математической физики, часто используется понятие свертки функций.

Определение 10.1 *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $\mathbb{R}$, а несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ сходится при всех $x \in \in \mathbb{R}$. Тогда функция, задаваемая этим интегралом, называется сверткой функций f и g и обозначается $f * g$. Таким образом,*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt. \tag{10.1}$$

Дальше нас будут интересовать свойства свертки.

Теорема 10.1 (о непрерывности, ограниченности и абсолютной интегрируемости свертки) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда существует свертка $(f * g)(x)$, причем она непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $|f(x)| \leqslant M_1$, $|g(x)| \leqslant M_2$ для всех $x \in \mathbb{R}$, тогда и $|g(x-t)| \leqslant M_2$ для всех x, $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку f — абсолютно интегрируема, то по признаку Вейерштрасса несобственный интеграл (10.1) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Учитывая этот факт и то, что подынтегральная функция $f(t)g(x-t)$ непрерывна, по теореме о непрерывности равномерно сходящегося интеграла получаем непрерывность свертки $(f * g)(x)$ на $\mathbb{R}$.

Ограниченность свертки $(f * g)(x)$ следует из оценки

$$|(f * g)(x)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |g(x-t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|\,ds = M < +\infty.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки $(f{*}g)(x)$ на $\mathbb{R}$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(f{*}g)(x)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x{-}t)|\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|\,ds < +\infty. \quad (10.2)$$

Поскольку функции f и g абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то из оценки (10.2) следует абсолютная интегрируемость свертки $f * g$.

Осталось обосновать законность изменения порядка интегрирования в (10.2). Это следует из теоремы о перестановке порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах, так как, во-первых, несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt$ равномерно сходится по x на $\mathbb{R}$, во-вторых, из (10.2) следует, что повторный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dx$ существует, в-третьих, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dx$ равномерно сходится на любом отрезке $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$. Докажем это.

Нам достаточно доказать равномерную сходимость на любом отрезке $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}$ каждого из интегралов $\int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} |f(t)g(x-t)|\,dx$.

Проведем рассуждения для первого интеграла (для второго аналогично). Так как $|f(x)| \leqslant M_1$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и g — абсолютно интегрируемая, то для любого отрезка $[x_1; x_2]$ и для любого $t \in [t_1; t_2]$ имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)g(x-t)|\,dx = |f(t)| \int\limits_{x_1}^{x_2} |g(x-t)|\,dx \leqslant M_1 \int\limits_{x_1-t}^{x_2-t} |g(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_{x_1-t_2}^{x_2-t_1} |g(s)|\,ds. \quad (10.3)$$

Последнее неравенство следует из того, что отрезок $[x_1 - t; x_2 - t] \subset \subset [x_1 - t_2; x_2 - t_1]$ для любого $t \in [t_1; t_2]$, и неотрицательности подынтегральной функции.

По критерию Коши сходимости несобственных интегралов имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0 > 0$ такое, что для всех $x_2 - t_1 > x_1 - t_2 > x_0$

имеем $\int\limits_{x_1-t_2}^{x_2-t_1}|g(s)|\,ds \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M_1}$, а поэтому для всех $t\in[t_1;t_2]$ получаем из (10.3), что $\int\limits_{x_1}^{x_2}|g(x-t)|\,dx \leqslant \varepsilon$. В силу критерия Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, получаем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[t_1;t_2]$. $\lhd$

Замечание 10.1 При сделанных в теореме предположениях для функций f и g (непрерывность, ограниченность и абсолютная интегрируемость) свертка $f*g$ обладает теми же свойствами (непрерывность, ограниченность и абсолютная интегрируемость). В частности, в этом случае для свертки всегда существует преобразование Фурье, можно применить операцию свертки функций $f*g$ и некоторой непрерывной, ограниченной и абсолютно интегрируемой функции h, т.е. определена функция $(f*g)*h$.

Замечание 10.2 Операция свертки функций коммутативна и ассоциативна в классе абсолютно интегрируемых, непрерывных, ограниченных функций на $\mathbb{R}$, т.е.

1) $f*g=g*f$ (коммутативность);
2) $(f*g)*h=f*(g*h)$ (ассоциативность).

10.2 Преобразование Фурье свертки

Теорема 10.2 (о преобразовании Фурье свертки) *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, тогда*

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g],\quad \Big((\widehat{f*g})(\lambda)=\hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)\Big),$$

таким образом, преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций.

Доказательство. $\rhd$ Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, поэтому по теореме 10.1 функция $(f*g)(x)$ непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема, и для нее существует преобразование Фурье

$$F[f*g](\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda t}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(t-s)|\,ds\right]\,dt.$$

Меняя в этом интеграле порядок интегрирования (законность этой операции доказывается рассуждениями аналогичными тем, которые приведены для обоснования законности изменения порядка интегрирования в преобразовании (10.2), с учетом того, что $|e^{-i\lambda t}| = 1$) и делая замену $t - s = z$, получим

$$F[f * g](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)\, e^{-i\lambda t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, e^{-i\lambda(s+z)}\, dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\lambda s}\, ds \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-i\lambda z}\, dz =$$

$$= F[f](\lambda) \cdot F[g](\lambda),$$

т. е. $\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$. $\triangleleft$

Ранее мы отметили, что, если f — абсолютно интегрируема, то $\hat{f}$, вообще говоря, таковой не является. Поставим задачу описания классов функций, которые переводятся преобразованием Фурье $F : f \to \hat{f}$ сами в себя. Свойства функций, входящих в такие классы, следуют из теоремы о связи между степенью гладкости функции и скорости убывания на бесконечности ее преобразования Фурье и теоремы о связи между скоростью убывания функции на бесконечности и степенью гладкости ее преобразования Фурье.

Определение 10.2 *Функция f, определенная на $\mathbb{R}$, называется быстро убывающей при $x \to \infty$, если для любых $k, m = 0, 1, 2, \ldots$ существует постоянная $C_{k,m}$ такая, что*

$$(1 + |x|)^k |f^{(m)}(x)| \leqslant C_{k,m} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

Через S обозначим совокупность всех быстро убывающих функций.

Замечание 10.3 Из определения следует, что, если $f \in S$, то f — бесконечно дифференцируемая функция.

Замечание 10.4 Если на множестве S ввести стандартные операции сложения функций и умножения функции на число, то S станет линейным пространством.

К классу быстро убывающих функций относится, например, функция e^{-x^2}.

Замечание 10.5 Из оценки (10.4) следует, что $|f^{(m)}(x)| \leqslant \dfrac{C_{k,m}}{(1+|x|)^k}$. Поэтому по теореме сравнения ($k \geqslant 2$) сходимости несобственного интеграла следует, что функции $f^{(m)}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) абсолютно интегрируемы, и, в частности, S является подпространством пространства абсолютно интегрируемых функций.

Теорема 10.3 *Отображение $F : f \to \hat{f}$ определено на S, причем $F(S) = S$ и отображение F биективно из S на S.*

Доказательство. $\triangleright$ Тот факт, что отображение Фурье F определено на S, следует из замечания 10.5. Докажем равенство $F(S) = S$. Оно будет доказано, если мы покажем, что $F(S) \subset S$ и $S \subset F(S)$.

Сначала докажем первое включение, т. е. докажем, что функция $\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) \in S$ для любой функции $f \in S$. Из оценки (10.4) для $k, m = 0, 1, 2, \ldots$ имеем неравенство

$$(1 + |x|)^k |f^{(m)}(x)| \leqslant C_{k+2,m}(1 + |x|)^{-2} \text{ для всех } x \in \mathbb{R},$$

откуда

$$|x^k f^{(m)}(x)| \leqslant C_{k+2,m}(1 + |x|)^{-2} \text{ для всех } x \in \mathbb{R},$$

которое показывает, что функции $x^k f^{(m)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ (по теореме сравнения для несобственных интегралов) и, в частности, будут абсолютно интегрируемы функции $x^k f(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. По теореме о связи между скоростью убывания функции на бесконечности и степенью гладкости ее преобразования Фурье имеем, что $\hat{f}(\lambda)$ бесконечно дифференцируема. С другой стороны, так как сама функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема (замечание 10.3), абсолютно интегрируема и абсолютно интегрируемы ее производные $f^{(m)}(x)$ (замечание 10.5), то по теореме о связи между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье получаем, что $\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) = o\left(\dfrac{1}{|\lambda|^k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее производная $(x^k f(x))^{(m)} = \sum\limits_{s=0}^{m} C_m^s (x^k)^{(s)} f^{(m-s)}(x)$, очевидно, будет абсолютно интегрируемой функцией. Применим к ней преобразование Фурье

$$F\big[\big(x^k f(x)\big)^{(m)}\big] = (i\lambda)^m F[x^k f(x)] = (i\lambda)^m i^k \hat{f}^{(k)}(\lambda).$$

В первом равенстве мы применили следствие 9.1, а во втором — следствие 9.3.

Откуда, с учетом того, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $\big(x^k f(x)\big)^{(m)}$ есть функция ограниченная, имеем

$$|\lambda|^m |f^{(k)}(\lambda)| = \Big|F\big[\big(x^k f(x)\big)^{(m)}\big]\Big| \leqslant B'_{m,k}$$

и окончательно получим

$$\Big|(1 + |\lambda|)^m \hat{f}^{(k)}(\lambda)\Big| = \left|\sum_{s=0}^{m} C_m^s |\lambda|^{m-s} \hat{f}^{(k)}(\lambda)\right| \leqslant \sum_{s=0}^{m} C_m^s |\lambda|^{m-s} |\hat{f}^{(k)}(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{m} C_m^s B'_{m-s,k} = B_{m,k}.$$

Таким образом, функция $\hat{f}(\lambda)$ удовлетворяет всем требованиям функции из пространства S, т. е. $\hat{f}^{(k)}(\lambda) \in S$ и $F(S) \subset S$.

Докажем теперь включение $S \subset F(S)$. Пусть $g(\lambda)$ — любая функция из S. Как отмечено выше, для нее определено преобразование Фурье $\hat{g}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x}\, d\lambda \in S$.

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \hat{g}(-x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda$. Функция $f(x)$, очевидно, из S. Для функции $g(\lambda)$, в силу ее бесконечной дифференцируемости, выполнено условие Дини, поэтому по формуле обращения имеем

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x) e^{i\lambda x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{i\lambda x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} F[f](\lambda) = F[\frac{1}{2\pi} f](\lambda).$$

Итак, для любой функции $g(\lambda) \in S$ существует функция $\frac{1}{2\pi} f(x)$ такая, что $F[\frac{1}{2\pi} f] = g$. А это и означает, что $S \subset F(S)$. Таким образом, $F(S) = S$.

Докажем биективность отображения $F : S \to S$. Пусть f и $g \in S$, причем они, как было отмечено ранее, будут бесконечно дифференцируемы и, следовательно, для них выполнено условие Дини, кроме того, f и g абсолютно интегрируемы. Поэтому для них имеет место формула обращения. Пусть теперь $F[f] = F[g]$, т. е. $F[f - g] = 0$. По теореме обращения $F^{-1}F[f-g] = f-g = 0$, т. е. $f = g$, что и означает биективность отображения F. $\triangleleft$

Литература

1 Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. Т. 1 [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. — М. : Наука, 1969. — 344 с.

2 Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения: [Текст] / Н. Винер; [пер.с англ.] — М. : Физматгиз, 1963. — 256 с.

3 Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1990. — 624 с.

4 Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / В. А. Диткин, А. П. Прудников. — М. : Наука, 1974. — 624 с.

5 Зигмунд, А. Тригонометрические ряды [Текст]: в 2 т./ А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965.

Т.1. — М. : Мир, 1965. — 616 с.

Т.2. — М. : Мир, 1965. — 537 с.

6 Камынин, Л. И. Курс математического анализа: в 2 т. Т. 2 [Текст] / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во Московского университета, 1995. — 624 с.

7 Князев, П. Н. Интегральные преобразования [Текст] / П. Н. Князев. — Мн. : Вышэйшая школа, 1969. — 197 с.

8 Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ: в 2 т. Т. 2 [Текст] / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высшая школа, 1973. — 466 с.

9 Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1990. — 624 с.

10 Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных [Текст] / Л. Д. Кудрявцев [и др.] — Санкт-Петербург, 1994. — 496 с.

11 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа [Текст] / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1988. — 813 с.

12 Толстов, Г. П. Ряды Фурье [Текст] / Г. П. Толстов. — М. : Наука, 1980. — 381 с.

13 Функциональный анализ и интегральные уравнения [Текст]: лабораторный практикум / А. Б. Антоневич [и др.]; под ред. А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно. — Мн. : БГУ, 2003. — 179 с.

14 Харди, Г. Ряды Фурье [Текст] / Г. Харди, В. Рогозинский. — М. : Физматгиз, 1962. — 156 с.

15 Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении [Текст]: в 2 т./ Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985.

Т.1. — М.: Мир, 1985. — 260 с.

Т.2. — М.: Мир, 1985. — 399 с.

Учебное издание

Ющенко Дмитрий Петрович
Якубович Оксана Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ ФУРЬЕ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

для студентов математических специальностей вузов

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04. Подписано в печать 11.03.08. Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура "Таймс". Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104