Решение задачи безусловной минимизации

Лабораторная работа 7

Пусть дана задача на безусловный минимум

$$f(x) \to \min, x \in R^n \tag{1}$$

и известно начальное приближение x^1. Требуется построить приближенное (улучшить план x^1) или точное решение задачи (1). Последовательные приближения строим по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k \ell^k, k = 1,2,..., \tag{2}$$

где ℓ^k - направление, а θ_k – шаг на к-й итерации.

Метод наискорейшего спуска (МНС)

Применим в случае $f(x) \in C^{(1)}$. В этом методе в качестве ℓ^k выбирают направление антиградиента

$$\ell^k = -\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1,2,..., \tag{3}$$

а шаг θ_k на итерации находят как решение задачи одномерной оптимизации

$$\varphi(\theta) = f\left(x^k - \theta\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}\right) \to \min, \theta \ge 0, k = 1,2,... \tag{4}$$

Метод Ньютона (МН)

В основном применяется при условии $f(x) \in C^2, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0$. В методе полагают $\theta_k = 1$

$$\ell^k = -\left(\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1,2,... \tag{5}$$

Анализ решения.

Если на к-й итерации для плана $x^* = x^k$ выполняется условие

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

то дальнейшее улучшение планов по МНС и МН невозможно. План удовлетворяет необходимому условию оптимальности 1-го порядка, и, следовательно, подозрителен на решение. Он может быть подвергнут исследованию на оптимальность с помощью известных для задачи (1) более сильных (необходимых и достаточных) условий оптимальности.

Например. Если $f(x) \in C^{(2)}$, то условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \ge 0$ является необходимым, а условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x} > 0$ достаточным для локальной оптимальности плана x^*. Если $f(x), x \in R^n$ выпуклая функция, то условие (6) является критерием оптимальности плана x^*.

Пример.

Решить методом наискорейшего спуска задачу

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 7 \to \min, x \in R^2, \tag{7}$$

начав итерационный процесс в точке $x^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Решение.

Вычисляем градиент целевой функции: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix}$

1-я итерация. 1. Проверяем для начального плана условие (6)

$$\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. Составляем и решаем задачу (4):

$$\varphi(\theta) = (5-8\theta)^2 + (10-16\theta)^2 - 2(5-8\theta) - 4(10-16\theta) + 7 = 320\theta^2 - 320\theta + 82,$$

а) находим стационарную точку функции $\varphi(\theta)$;

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 640\theta - 320 = 0, \theta^0 = \frac{1}{2} > 0,$$

б) так как $\dfrac{\partial^2 \varphi(\theta^0)}{\partial \theta} = 640 > 0$

решение задачи $\varphi(\theta) \to \min, \theta \geq 0$ и $\theta_1 = \dfrac{1}{2}$

3. Строим x^2:

$$x^2 = x_1 - \theta_1 \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

2-я итерация.

1. Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, точка x^2 является стационарной точкой целевой функции.

Анализ полученного решения.

Целевая функция задачи (7) строго выпукла, так как

$$\frac{\partial^2 f(x^2)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Следовательно, план x^2 является оптимальным и $f(x^0) = 5$.

Пример 2.

Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации) и затем применить метод Ньютона к задаче

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 \to \min, x \in R^n, x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Сравнить полученные планы по целевой функции.

Решение.

Вычисляем градиент и матрицу вторых производных целевой функции

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} > 0$$

Улучшаем план x^1 методом наискорейшего спуска.

I-я итерация.

1. Вычисляем в точке x^1 градиент

$$\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Вычисляем θ_1

$$\varphi(\theta) = 36\theta^2 - 20\theta + 2,$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta_1)}{\partial \theta} = 72\theta_1 - 20 = 0, \theta_1 = \frac{5}{18}$$

3. Строим x^2:

$$x^2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\frac{5}{18}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-5/9\\1-10/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/9\\-1/9\end{pmatrix}$$

4. Подсчитываем $\Delta f=f\left(x^2\right)-f\left(x^1\right)$:

$$f\left(x^1\right)=2,\ f\left(x^2\right)=\frac{-7}{9},\ \Delta f=f\left(x^2\right)-f\left(x^1\right)=-2\frac{7}{9},$$

то есть целевая функция при переходе от x^1 к x^2 уменьшилась на $2\frac{7}{9}$

2-я итерация.

1. Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f\left(x^2\right)}{\partial x}=\begin{pmatrix}8/9\\-4/9\end{pmatrix}\neq 0$$

2.Вычисляем θ_2:

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{31}\left(96\theta^2-80\theta-63\right),$$

$$\frac{\partial\varphi(\theta_2)}{\partial\theta}=\frac{1}{81}\left(192\theta_2-80\right)=0,\theta_2=\frac{5}{12}$$

3. Строим x^3:

$$x^3=\begin{pmatrix}13/9\\-1/9\end{pmatrix}-\frac{5}{12}\begin{pmatrix}8/9\\-4/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29/27\\2/27\end{pmatrix}$$

4. Подсчитываем $f\left(x^3\right)-f\left(x^2\right)$:

$$f\left(x^3\right)=-239/243$$

$$f\left(x^3\right)-f\left(x^2\right)=-239/243+1/9=-58/243$$

то есть план x^3 лучше на 58/243

Применим к задаче (8) метод Ньютона.

1-я итерация.

Строим x^2 по формуле (2). Считаем ℓ^1, имеем

$$\frac{\partial^2 f(x)^{-1}}{\partial x^2}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/4\end{pmatrix}$$

$$\ell^{'}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$x^2=x^1+\ell^1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

2-я итерация.

Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f\left(x^2\right)}{\partial x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

x^2 - стационарная точка целевой функции.

Анализ решения.

Так как целевая функция задачи (8) строго выпукла, то $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ оптимальный план, $f(x^0) = -1$.

План x^3 , построенный по МНС, является ξ–оптимальным с

$$\xi = f(x^3) - f(x^0) = 1 - {}^{239}\!/_{243} = \frac{4}{243}$$

ЗАДАНИЕ

Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации), а затем применить метод Ньютона к задаче

$f(x) \to \min, x \in R^n$

сравнить полученный план по целевой функции.

1. $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \to \min, x^1 = (0{,}0)$
2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \to \min, x^1 = (1{,}0)$
3. $f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \to \min, x^1 = (5{,}3)$
4. $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \to \max, x^1 = (0{,}0)$
5. $f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max, x^1 = (7{,}4)$
6. $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min, x^1 = (8{,}9)$
7. $f(x) = 5(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 \to \min, x^1 = (4{,}5)$
8. $f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 2(x_2 - 3)^2 \to \max, x^1 = (6{,}4)$
9. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2) \to \max, x^1 = (3{,}-1)$
10. $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to \max, x^1 = (2{,}3)$
11. $f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \to \max, x^1 = (5{,}2)$
12. $f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \to \max, x^1 = (3{,}10)$
13. $f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \to \max, x^1 = (2{,}7)$
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \to \min, x^1 = (2{,}2)$
15. $f(x) = -20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \to \max, x^1 = (2{,}3)$
16. $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \to \max, x^1 = (3{,}5)$
17. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 \to \min, x^1 = (2{,}6)$
18. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \to \min, x^1 = (4{,}2{,}1)$
19. $f(x) = 3x_1 - 0{,}2x_1^2 + x_2 - 0{,}5x_2^2 \to \max, x^1 = (1{,}2)$
20. $f(x) = 2x_1 - 0{,}1x_1^2 + 3x_2 - 3x_2^2 \to \max, x^1 = (3{,}1)$
21. $f(x) = 3x_1 - (x_1 - 2)^2 - (2x_2 + 1)^2 \to \max, x^1 = (5{,}4)$
22. $f(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 + 0{,}1)^2 \to \min, x^1 = (0{,}5)$
23. $f(x) = -6x_1 + 4x_2^2 + x_1^2 - 18 \to \min, x^1 = (3{,}2)$
24. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 11)^2 \to \min, x^1 = (7{,}0)$
25. $f(x) = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 \to \max, x^1 = (0{,}1{,}2)$
26. $f(x) = (9x_1 - 10)^2 + (0{,}1x_2 + 10)^2 \to \min, x^1 = (0{,}5)$