СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа №2

Симплекс-метод применяется к задачам линейного программирования, которые в канонической форме обладают свойствами: ранг матрицы системы основных ограничений равен числу уравнений, ограничения задачи не противоречивы, причём известен или легко строится начальный базисный план.

Алгоритм.

1.Задачу линейного программирования приводим к каноническому виду

$$c' x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0 \tag{1}$$

$$x, c \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \;-\; (n \times m) \text{ матрица}$$

2. Строим начальный базисный план. Для этого исходную задачу преобразуем к виду (2)

$$c'x \to \max, \quad (A_{Á}\, A_{Í}) \begin{pmatrix} x_{Á} \\ x_{Í} \end{pmatrix} = b, \quad x \ge 0 \quad (b \ge 0), \tag{2}$$

где $x_{Á} = \{x_j, j \in J_{Á}\}, \quad J_{Á} = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \in J, \quad x_{Í} = \{x_j, j \in J_{Í} = J \setminus J_{Á}\}, \quad J = \{1,2,...,n\},$
$A_{Á} = E_m, \quad A_{Í} = \{a_j, j \in J_{Í}\}, \quad a_j = \{a_{ij}, i \in I\}, \quad I = \{1,2,...,m\}$

Вектор $x^1 = \begin{pmatrix} x_{Á}^1 \\ x_{Í}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ – начальный базисный план задачи (1). Вычисляем на нём значение целевой функции и оценки:

$$z(x^2) = c'x^1 = c'_{Á} b, \quad c'_{Á} = \{c_j, j \in J_{Á}\}, \quad \Delta_j = c'_{Á} A_{Á}^{-1} a_j - c_j = c'_{Á} a_j - c_j, \quad j \in J_{Í}$$

и переходим к пункту 3.

3. Строим начальную симплексную таблицу, задающую базисный план x^1.

4. Проверяем выполнение критерия оптимальности плана. Если все оценки $\Delta_j \ge 0, \quad j \in J_{Í}$, то базисный план (2) оптимален. Задача решена. Если $\exists \Delta_j < 0, \quad j \in J_{Í}$, то идём к пункту 5.

5. Проверяем достаточные условия неограниченности целевой функции. Если

$$\exists \Delta_{j^*} < 0, \quad j^* \in J_{Í}, \quad a_{ij^*} \le 0, \quad \forall i \in I, \tag{3}$$

то задача (1) не имеет решения, так как целевая функция не ограничена на множестве планов. Если условие (3) не имеет места, то переходим к пункту 6.

6. Совершаем симплекс-итерацию – переход к новому базисному плану

а) строим новый базис с индексным множеством

$$J_{Á} = (J_{Á} \setminus q) \cup p,$$

где p b q находят из соотношений:

$\Delta_p = \min \Delta_j$ (р-ый столбец-разрешающий);

$Q_q = \dfrac{b_q}{a_{ip}} = \min\limits_{\{i: i \in I, a_{ip} > 0\}} \dfrac{b_i}{a_{ip}}$ (q-ая строка-разрешающая) ;

элемент таблицы a_{qp} – разрешающий.

б) строим новую симплексную таблицу, совершая основное симплексное преобразование по элементу a_{qp}:

$$a'_{qj} = \frac{a_{qj}}{a_{qp}}, \quad b'_q = \frac{b_q}{a_{qp}}, \quad a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} * a_{qi}}{a_{qp}},$$

$$b'_i = a_i - \frac{b_q * a_{ip}}{a_{qp}}, \quad \forall i \in I, \quad i \neq q, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_p * a_{qj}}{a_{qp}},$$

$$\forall j \in J, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x^2_Б \\ x^2_Н \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(J'_Б) \\ x^2(J'_Н) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \{b_i, i \in I\}, \quad J'_Н = J \setminus J_Б.$$

7. К новой таблице применяем п.4 алгоритма. И т.д.

Замечание 1. Расчет новой симплексной таблицы нужно начинать с определения значений столбца b и строки Δ, так как если для некоторого базисного плана выполняется критерий оптимальности (см. п.4), то нет необходимости вычислять оставшуюся часть таблицы.

Замечание 2. Для проверки правильности вычисления симплексных таблиц можно ввести столбец $\sum$, который равен сумме всех столбцов таблицы и также вычисляется по правилу прямоугольника.

Пример. Симплексным методом решить задачу

$$\begin{aligned} & z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ & 3x_1 + x_3 \le 5, \quad x_i \ge 0, i = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{4}$$

Решение.

1. Приводим задачу (4) к каноническому виду

$$\begin{aligned} & z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ & 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \quad x_i \ge 0, i = \overline{1,6} \end{aligned} \tag{5}$$

2. Из системы ограничений задачи (5) определяем начальный базисный план.

$x^1 = (0,0,0,1,2,5)$, $J_{\acute{A}} = \{4,5,6\}$

3. Составляем для задачи (5) начальную симплекс-таблицу и применяем симплекс-метод:

c			-1	1	3	0	0	0		
$c_{\acute{A}}$	Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Σ	θ
0	a_4	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	4	$1/1 \to$
0	a_5	2	-4	2	-1	0	1	0	0	–
0	a_6	5	3	0	1	0	0	1	10	5/1
	Δ	0	1	-1	$-3\uparrow$	0	0	0	-3	
	a_3	1	2	-1	1	1	0	0	4	–
	a_5	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	4	$3/1 \to$
	a_6	4	1	1	0	-1	0	1	6	4/1
	Δ	3	7	$-4\uparrow$	0	3	0	0	9	
	a_3	4	0	0	1	2	1	0	8	–

a_2	3	-2	1	0	1	1	0	4	–
a_6	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	2	1/3 →
Δ	15	-1↑	0	0	7	4	0	26	
a_3	4								
a_2	11/3								
a_1	1/3								
Δ	$15\frac{1}{3}$	0	0	0	$6\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$25\frac{2}{3}$	

Таблица 3 задаёт оптимальный план:

$x^0 = \{\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 4, 0, 0, 0\}$ задачи (4), так как все оценки

$$\Delta_j \ge 0, \quad j \in J_{Í} = \{4,5,6\}, \quad z_{\max} = z(x^0) = 15\frac{1}{3}.$$

Ответ. Задача (3) имеет решение

$$x_1^0 = \frac{1}{3}, \quad x_2^0 = \frac{11}{3}, \quad x_3^0 = 4, \quad z_{\max} = 15\frac{1}{3}.$$

Задание 2. Симплексным методом решить следующие задачи:

1. $z = 2x_1 + x_2 \to \max$
   $2x_1 + x_2 \le 4,$
   $x_1 - x_2 + x_3 \le 4,$
   $-x_1 + x_3 \ge -1, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

3. $z = x_2 - x_1 \to \max$
   $-2x_1 + x_2 \le 2,$
   $x_1 - x_2 \le 2,$
   $x_1 + x_2 \le 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,2}$

5. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$
   $2x_1 + x_2 - x_3 \le 2,$
   $2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6,$
   $8x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 12, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

7. $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$
   $x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5,$
   $2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3,$
   $2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

9. $z = 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_5 \to \max$

$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$
$x_2 - x_3 + x_5 = 4$
$x_2 + x_4 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,5}$

2. $z = 3x_1 - x_3 \to \max$
   $x_1 - x_2 + x_4 = 5,$
   $2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4,$
   $-2x_2 + x_6 = 8, x_i \ge 0, i = \overline{1,6}$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$
   $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6,$
   $x_2 - x_3 + x_4 \le 2,$
   $x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$

6. $z = 8x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$
   $2x_1 - x_2 + x_3 = 20,$
   $-6x_1 + x_2 \le 12,$
   $x_1 - x_2 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

8. $z = -x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$

$-x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 4,$
$2x_1 + x_2 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

10. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$
$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5,$
$x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 3,$
$x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,6}$

11. $z = -5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$
$x_1 - x_2 - x_3 \le 2,$
$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$2x_1 + x_2 + x_5 = 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,5}$

13. $z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$
$3x_1 - x_3 \le 8,$
$-x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

15. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$
$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$
$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

17. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 7, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

19. $z = x_1 + x_2 - x_3 \to \max$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1,$
$x_1 + x_3 \le 2,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

21. $z = 6x_1 + x_2 - x_3 \to \min$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9,$
$-x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

23. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 + 2x_3 \le 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

25. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2,$
$-x_1 + x_2 - x_3 \ge -1, x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$

12. $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4,$
$2x_1 + x_2 \le 1,$
$x_2 + 4x_3 \le 3, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

14. $z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to \min$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 5,$
$x_1 - 3x_3 \le 1,$
$x_2 + x_3 \le 4, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

16. $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$
$-5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15,$
$x_1 - x_2 \le 4,$
$-2x_1 + x_3 \le 2, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

18. $z = -8x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10,$
$x_1 + x_2 - x_3 \le 5,$
$4x_1 + x_2 \le 7, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

20. $z = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3,$
$3x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

22. $z = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$-x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6,$
$2x_1 + x_3 \le 5, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

24. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$2x_1 + x_3 + x_4 \le 1,$

$x_2 - 2x_4 \le 3$

$x_1 - x_2 + x_3 \le 4, x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$

26. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$

$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$

$-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10, x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$

Вопросы к лабораторной работе 2

1. Постановка задачи линейного программирования в канонической форме
2. Определение базисного плана
3. Критерий оптимальности в симплекс-методе
4. Достаточное условие неограниченного возрастания целевой функции
5. Алгоритм симплекс-метода, правило прямоугольника