ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа 1

Метод применим к задачам линейного программирования с двумя переменными:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \end{cases}$$

Алгоритм:

1. В декартовой системе координат на плоскости строим множество X планов задачи как пересечение k полуплоскостей, задаваемых линейными неравенствами системы (2)

При этом возможен один из случаев:

а) X – пустое множество;

б) X – выпуклый многоугольник;

в) X – выпуклая неограниченная многоугольная область.

Если а), то задача не имеет решения; б) или в) – переходим к п.2.

2. По целевой функции Z строим вектор $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ (градиент целевой функции), через начало координат проводим прямую Z_0 (линию нулевого уровня целевой функции): $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$

3. При решении задачи максимизации (минимизации) прямую Z_0 перемещаем параллельно в направлении вектора $\overline{C}$ (вектора $-\overline{C}$) в наиболее отдалённую точку A (точку B) множества планов X. Координаты точки A (точки B) и составляют оптимальный план задачи максимизации (минимизации) функции Z на множестве X.

Если множество X – ограничено, то задача всегда имеет решение. Если же X – неограниченная многоугольная область, то задача может не иметь решения в случае, когда не существует наиболее удалённой точки, т.е. целевая функция неограниченно возрастает (убывает) на X.

Если задача имеет оптимальный план, то он достигается либо в одной из вершин границы множества X, либо на одной из её сторон (альтернативный оптимум).

Замечание. Некоторые задачи линейного программирования с числом переменных n>2 могут быть сведены к эквивалентным линейным задачам с двумя переменными. Для этого систему ограничений-равенств исходной задачи приводим к единичному базису. Определяем из неё базисные переменные (эти выражения называют уравнениями связи). Подставляем их в целевую функцию и ограничения-неравенства задачи. После решения полученной эквивалентной задачи с двумя переменными, решение исходной задачи (базисные переменные) находят из уравнений связи.

Пример. Решить графическим методом задачу:

$$z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1, \\ x_i \ge 0, \\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение. 1. Приводим систему ограничений-неравенств к единичному базису

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Уравнения связи имеют вид:

$$x_3 = -1 + 3x_2,$$
$$x_4 = 2 - 2x_2 - x_1$$

2. Исключаем базисные переменные x_3, x_4 из задачи (3):

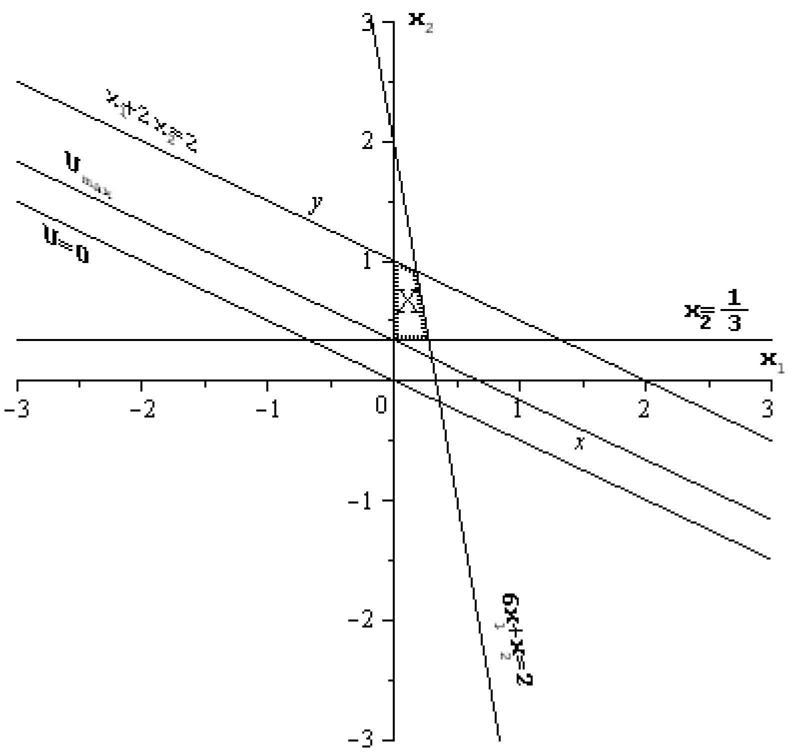
$$z = 2x_1 + x_2 + (-1 + 3x_2) + 3(2 - 2x_2 - x_1) = -x_1 - 2x_2 + 5;$$
$$6x_1 - 2x_2 + (-1 + 3x_2) \le 1.$$
$$6x_1 + x_2 \le 2,$$
$$-1 + 3x2 \ge 0,$$
$$x_2 \ge \frac{1}{3};$$
$$2 - 2x_2 - x_1 \ge 0,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 2$$

3. Обозначив u=z-5, получаем задачу (5) эквивалентную задаче (3):

$$u = -x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_1 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

4. На плоскости x_1Ox_2 строим множество X планов задачи (5), вектор $\overline{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, линию нулевого уровня u=0 и линии уравнений $u=u_{max}$, $u=u_{min}$.



5. Анализ. Область X – четырёхугольник ABCD. В точке A (0, $\frac{1}{3}$) целевая функция u имеет максимальное значение u_{max} = u (0, $\frac{1}{3}$) = - $\frac{2}{3}$.

Функция u имеет минимальное значение во всех точках отрезка BC, так как линии уровня функции u параллельны этому отрезку, задача минимизации имеет альтернативный оптимум.

Имеем B (0,1), C ($\frac{2}{11}, \frac{10}{11}$).

Координаты $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ произвольной точки отрезка BC можно записать

$$\tilde{x}_1 = \alpha x_{1B} + (1-\alpha)x_{1C} = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11},$$

$$\tilde{x}_2 = \alpha x_{2B} + (1-\alpha)x_{2C} = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11},$$

$\left(-\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11}, \frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11}\right)$ - общее решение задачи минимизации функции u.

Используя решение задачи (5) и уравнения (4), получаем решение исходной задачи (3).

$x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=0$, $x_4=\frac{4}{3}$ – оптимальный план задачи максимизации.

$\tilde{x}_1 = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11}, \tilde{x}_2 = \frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11}, \tilde{x}_3 = \frac{3}{11}\alpha + \frac{19}{11}, \tilde{x}_4 = 0, \alpha \in [0,1]$ - оптимальный план задачи минимизации, $Z_{max}=4\frac{1}{3}$ $Z_{min}=3$.

Задание. Графическим методом решить следующие задачи:

1. $z = x_1 - x_2 + x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

2. $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

3. $z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

4. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_2 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

5. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \ge 0, i = 1,3,4 \end{cases}$$

6. $z = x_1 - 2x_3 + 3x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \ge -7 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

7. $z = -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

8. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1,3,4 \end{cases}$$

$9.z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$10.z = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ -4x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$11.z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 =\le 2 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$12.z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \le 2 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$13.z = -4x_1 + 3x_2 - x_5 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

$14.z = x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$15.z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$16.z = 3x_1 - 2x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \le 2 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$17.z = 5x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$18.z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$19.z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$20.z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$21.z = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \le 13 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$22.z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

23. $z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

24. $z = x_1 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 72 \\ -3x_3 + 11x_4 - x_5 = 16 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

25. $z = 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

26. $z = -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = -6 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_6 = 3 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Вопросы к лабораторной работе 1

1. Постановка задачи оптимизации
2. Определение оптимального плана
3. Определение локального оптимального плана
4. Определение минимизирующей последовательности
5. Постановка производственной задачи