СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ПРЯМОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧ

Существование зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются следующими леммами и теоремами двойственности.

Л е м м а 11.1 (основное неравенство теории двойственности). *Если* X *– некоторый план исходной задачи, а* Y *– произвольный план двойственной задачи, то значение целевой функции исходной задачи при плане* X *всегда не превосходит значение целевой функции двойственной задачи при плане* Y *, т.е.* $F(X) \le T(Y).$

Л е м м а 11.2. *Если* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *– допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство* $F(X^*) = T(Y^*)$*, то* X^* *– оптимальное решение исходной задачи, а* Y^* *– оптимальное решение двойственной задачи.*

Т е о р е м а 11.1. Первая теорема двойственности (основная теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план* $\mathbf{X}^*$*, то и другая имеет оптимальный план* $\mathbf{Y}^*$ *и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.*

$$F(\mathbf{X}^*) = F_{\max} = T(\mathbf{Y}^*) = T_{\min}.$$

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена (для исходной – сверху, для двойственной – снизу), то область допустимых решений другой задачи пустая.

Из этой теоремы вытекают необходимые и достаточные условия:

а) **разрешимости** задач – существование хотя бы одного допустимого плана у каждой задачи;

б) **оптимальности** допустимых планов **X** и **Y** – выполнение равенства $F(\mathbf{X}) = T(\mathbf{Y})$.

Т е о р е м а 11.2. Вторая теорема двойственности (теорема о дополнительной нежесткости). *Для того чтобы два допустимых решения* $\mathbf{X}^*$ *и* $\mathbf{Y}^*$ *пары двойственных задач были их оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \; j = \overline{1,n}; \qquad (*)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_{i0}\right) = 0, \; i = \overline{1,m}. \qquad (**)$$

Данная теорема позволяет:

а) установить оптимальность решения одной задачи по свойствам решения двойственной;

б) найти оптимальное решение одной задачи по решению двойственной.

Теорема верна для симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей формах соотношения (*) и (**) верны только для ограничений в виде неравенств и для неотрицательных переменных.

Полученные выше результаты непосредственно характеризуют взаимосвязь прямой и двойственной задач:

1. В оптимуме

$$\begin{pmatrix}\text{Значение целевой функции} \\ \text{прямой задачи}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Значение целевой функции} \\ \text{двойственной задачи}\end{pmatrix}$$

2. На любой итерации процесса решения прямой задачи

$$\begin{pmatrix}\text{Коэффициент} \\ \text{z - уравнения} \\ \text{при переменной } x_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Левая часть соответ -} \\ \text{ствующего ограничения} \\ \text{двойственной задачи}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Правая часть соответ -} \\ \text{ствующего ограничения} \\ \text{двойственной задачи}\end{pmatrix}$$

Эти соотношения позволяют дать важную экономическую интерпретацию двойственности и переменным двойственной задачи. Чтобы сделать это с помощью некоторых формальных категорий, рассмотрим прямую задачу как задачу распределения ограниченных ресурсов с целевой функцией, подлежащей максимизации. Условия прямой задачи можно интерпретировать следующим образом. Коэффициент c_j представляет собой **прибыль**, приходящуюся на единицу продукции j-го вида производственной деятельности. Расход ресурса i, запасы которого ограничены величиной a_{i0}, на единицу продукции j-го вида производственной деятельности равен a_{ij} единицам этого ресурса. Переменные двойственной задачи y_i представляют **ценность** единицы ресурса i (в экономической литературе они получили различные названия: **неявные**, **учетные**, **теневые**).

Двойственные оценки могут быть использованы для определения приоритета используемых ресурсов в соответствии с их вкладом в величину целевой функции.

В соответствии с основным неравенством теории двойственности в случае неоптимальных допустимых решений $F(X) < T(Y)$. Формулировка этого неравенства в рамках экономической интерпретации выглядит следующим образом:

(Прибыль) < (Общая ценность ресурсов).

Из этого соотношения следует, что до тех пор, пока прибыль меньше суммарной ценности ресурсов, решение остается неоптимальным. Оптимум достигается в случае, когда прибыль становится равной общей ценности ресурсов.

Чтобы дать представление о соответствующих обозначениях, часто встречающихся в литературе по линейному программированию, введем следующее определение:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

– суммарная оценка ресурсов, используемых при производстве единицы продукции j-го вида.

Разность $z_j - c_j$ равна фигурирующему в симплекс-таблице z-коэффициенту при переменной x_j (в наших обозначениях Δ_j). Ее часто называют **приведенными издержками** j-го вида производственной деятельности.

Условие оптимальности (в задаче максимизации), используемое в симплекс-методе, состоит в том, что вид производственной деятельности, не представленный в текущем решении (ему соответствует независимая переменная $x_j = 0$) должен вводиться в последующее решение с отличным от нуля и положительным уровнем использования ($x_j > 0$) только в том случае, когда z-коэффициент при данной переменной отрицателен. Дадим экономическую интерпретацию этому условию. Неиспользованный вид производственной деятельности j должен быть представлен в решении только в том случае, если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j < 0$, т.е. когда

$$\begin{pmatrix}\text{Оценка всех ресурсов, используемых} \\ \text{при производстве единицы продукции j}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{Прибыль от реализации} \\ \text{единицы продукции j}\end{pmatrix}$$

Таким образом, пока прибыль превышает суммарную оценку ресурсов, уровень использования данного вида производственной деятельности следует увеличивать. Следует заметить, что мы увеличиваем уровень его использования до того значения, при котором z-коэффициент при данной переменной станет равным нулю. Это эквивалентно полной реализации всех возможностей, связанных с получением прибыли от данного вида производственной деятельности.