УДК 519.833

ЛОБАРЁВ Дмитрий Сергеевич, *старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии Псковского государственного педагогического университета. Автор 6 научных публикаций*

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ЭКСПЕРТНЫМИ ОЦЕНКАМИ

В статье рассматриваются вопросы, связанные с выбором решений при наличии нескольких критериев. Представлено решение многокритериальной динамической задачи с экспертными оценками. Экспертные оценки представляют собой количественную информацию об относительной важности критериев задачи. Проводится линейная свертка критериев относительного весового вектора и решается задача оптимального управления.

Динамическая задача, оптимальное решение, экспертные оценки, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина

При изучении многокритериальных динамических задач существует проблема поиска оптимального решения. При наличии нескольких критериев необходимо искать разумный компромисс, который заключается в выборе такого управления, что доставляет возможно меньшие значения одновременно всем критериям. Причем, в выборе такого решения лицу, принимающему решение (ЛПР) могут помочь независимые эксперты, которые высказываются о важности представленных критериев. Тогда многокритериальная динамическая задача может быть сведена к однокритериальной [1–3].

Динамическая задача имеет стандартную форму [2]. Экспертные оценки определяют матрицу, каждая строка которой представляет мнение эксперта, выраженное в числовой форме. Также задано мнение ЛПР об экспертах. Сначала ищется нормированный весовой вектор, который устраивает всех экспертов и ЛПР. Затем проводиться линейная свертка критериев относительно этого вектора. Далее решается однокритериальная задача оптимального управления.

Рассматривается многокритериальная динамическая задача с экспертными оценками

$$\tilde{A} = \left\langle \Sigma, U, \left\{ J_i \right\}_{i=\overline{1,m}}, P, L \right\rangle \cdot \qquad (1)$$

Аналогичные задачи рассматриваются в [4]. Здесь Σ – управляемая динамическая система, которая описывается системой линейных дифференциальных уравнений и начальными условиями

$$\overset{\circ}{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \ , \qquad (2)$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \qquad (3)$$

где A и B – матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times q)$ соответственно. В (1) U есть множество программных управлений, выбором которых распоряжается ЛПР. Пусть на управление ограничений не наложено, т.е. $u = (u_1,...,u_q) \in U = R^q$. Здесь $t \in [t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы, где t_0 и t_1 – моменты начала и окончания процесса соответственно. В (2)–(3) представлено изменение фазового вектора $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$ под воздействием управления. Начальное условие $x(t_0) = x_0 \in R^n$ задано и определяет начальное состояние системы.

Задано множество критериев динамической задачи:

$$J_i = \int_{t_0}^{t_1} u^T D_i u dt + x^T(t_1) C_i x(t_1), \ i = \overline{1,m} . \qquad (4)$$

Здесь D_i и C_i – положительно определенные симметрические матрицы размера $(q \times q)$ и $(n \times n)$ соответственно [5]. Экспертам, независимо друг от друга, для сравнения предлагается набор критериев $J_1, J_2,..., J_m$, которые выступают в качестве сравниваемых объектов. В матрице экспертных оценок $P = (p_{ij})_{p \times m}$ каждая строка указывает на мнение эксперта в виде коэффициентов важности критериев (4) в задаче (1).

Лицо, принимающее решение, дает оценку экспертам, учитывая их компетентность в рассматриваемой задаче. Определяется диагональная матрица $L = (l_{ij})_{p \times p}$, элементы на главной диагонали которой положительны и указывают на важность (или «вес») экспертов при оценивании критериев.

Задача нахождения компромиссного решения при учете как мнения всех экспертов, так и ЛПР об экспертах сводится к нахождению весового вектора $\Omega = (\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_p)$. Такой вектор может быть получены из матрицы мнений экспертов P и матрицы L, которая указывает мнение ЛПР

$$\Omega = e_p \cdot L \cdot P. \qquad (5)$$

Здесь e_p есть вектор-строка, состоящий из p - единиц. Элементы весового вектора Ω можно нормировать так, что $\sum \alpha_i = 1$.

Решением задачи (1) считается то, которое доставляет возможно меньшее значение линейной свертке критериев $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i J_i$. На содержательном уровне ЛПР, учитывая мнение экспертов, выбирает такую стратегию $u^*(t)$, которая доставляет возможно меньшие значения сразу всем критериям (4). Оптимальная пара $(x^*(t), u^*(t))$ находится как решение задачи (1).

Представленную многокритериальную динамическую задачу (1) можно свести к задаче оптимального управления (2)–(3) с функционалом качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^T D \ udt + x^T(t_1) C \ x(t_1), \qquad (6)$$

где матрицы $D = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i D_i$, $C = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i$ учитывают мнение экспертов и ЛПР.

Решение задачи вида (2), (3), (6) подробно рассмотрены в [2, с. 336–338]. Используя алгоритм принципа максимума Понтрягина, находим вид оптимального управления

$$u^*(t) = D^{-1} B^T \psi(t), \qquad (7)$$

где $\psi \ (t)$ – неизвестная функция, которую найдем из системы

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot D^{-1} B^T \psi(t), \quad x(t_0) = x_0 , \\ &\overset{\circ}{\psi}(t) = -A^T \psi(t), \quad \psi(t_1) = -C \cdot x(t_1). \end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, задача нахождения оптимального управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (8).

Пример. Рассматривается двухкритериальная динамическая задача с двумя экспертами. Динамическая управляемая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{x}_1(t) = u_1(t), \qquad x_1(0) = x_{10} , \\ &\overset{\circ}{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t), \quad x_2(0) = x_{20} \ . \end{aligned} \qquad (9)$$

Здесь $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $u=(u_1,u_2)\in R^2$, $t\in[0,2]$. Заданы критерии

$$J_1=\int_0^2\left(u_1^2+4u_2^2\right)dt+2x_1^2(2)+x_2^2(2), \quad (10)$$

$$J_2=\int_0^2\left(u_1^2+u_2^2\right)dt+2x_1^2(2)+4x_2^2(2). \quad (11)$$

Оценка критериев экспертами представлена матрицей

$$P=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Оценка ЛПР относительно компетентности экспертов имеет вид $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Тогда из выражения (5) находим вектор согласования мнений экспертов и ЛПР

$$\Omega=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14\end{pmatrix}.$$

Нормированный вектор весовых коэффициентов примет вид

$$\overline{\Omega}=\left(1/3,\,2/3\right). \quad (12)$$

Сводим полученную многокритериальную задачу к задаче оптимального управления (2), (3) и (6).

Здесь матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$C=1/3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2/3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$D=1/3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+2/3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Целевая функция (6) примет вид

$$J=\int_0^2\left(u_1^2+2u_2^2\right)dt+2x_1^2(2)+3x_2^2(2). \quad (13)$$

Находим вид оптимального управления (7)

$$u^*(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\psi(t). \quad (14)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями (8) и находим её решение

$$x_1(t)=\left(1/4\,t^3-t+1\right)x_{10}+\left(5/24\,t^2-1/2\,t\right)x_{20},$$

$$x_2(t)=\left(1/12\,t^3-1/2\,t^2+3/4\,t\right)x_{10}+\left(5/72\,t^3-1/4\,t^2-5/24\,t+1\right)x_{20},$$

$$\psi_1(t)=(t-2)x_{10}+\left(5/6\,t-1\right)x_{20},$$

$$\psi_2(t)=-x_{10}-5/6\,x_{20}.$$

Вектор оптимального управления примет вид $u^*(t)=\left(u_1^*(t),u_2^*(t)\right)$, где

$$u_1^*(t)=\left(1/2\,t-1\right)x_{10}+\left(5/12\,t-1/2\right)x_{20},$$

$$u_2^*(t)=-1/4\,x_{10}-5/24\,x_{20}. \quad (15)$$

Значение функционалов качества (10) и (11)

$$J_1^A=43/36\,x_{10}^2+143/108\,x_{10}x_{20}+715/1296\,x_{20}^2,$$

$$J_2^A=65/72\,x_{10}^2+181/216\,x_{10}x_{20}+905/2592\,x_{20}^2. \quad (16)$$

Таким образом, в (15) приведено оптимальное управление задачи модельного примера (9)–(11). В (16) представлены оптимальные значения функционалов (10)–(11).

В статье представлен подход к решению многокритериальных задач при наличии количественной информации об относительной важности как критериев, так и экспертов. Количество экспертов, а также их оценки могут меняться со временем. После нахождения весового компромиссного вектора проводится линейная свертка критериев. Задача оптимального управления решается на основе принципа максимума Понтрягина. На основе конечного набора информации об относительной важности критериев и экспертов найдено единственное решение многокритериальной задачи.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Основы динамического программирования. Минск, 1975.
2. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М., 2003.
3. *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М., 1999.
4. *Матвеев В.А.* Исследование конусной оптимальности в многокритериальной динамической задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. № 5(119). С. 92–107.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.

Lobaryov Dmitry

THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPAL IN MULTICRITERIA PROBLEMS UNDER EXPERT ESTIMATION

In article the questions connected with a choice of decisions under the several criteria are considered. The decision of a multicriteria dynamic problem with expert estimations is presented. Expert estimations represent the quantitative information on relative importance of a problem's criteria. Conducted a linear convolution of criteria relative weight vector and solve the problem of optimal control.

Контактная информация:
e-mail: *lds1979@mail.ru*

Рецензент – *Андреев П.Д.*, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова