3. ДИСКРЕТНЫЕ АНСАМБЛИ И ЭНТРОПИЯ

Вопросы для самоконтроля

1. Дискретный ансамбль сообщений. Примеры.
2. Дискретный ансамбль $\{XY, p(x,y)\}$ на произведении двух множеств и порожденные им ансамбли $\{X, p_1(x)\}$ и $\{Y, p_2(y)\}$. Статистически независимые ансамбли.
3. Условные ансамбли $\{X, p(x_i \mid y_j)\}$ и $\{Y, p(y_j \mid x_i)\}$, их построение.
4. Условные ансамбли $\{X, p(x_i \mid B)\}$, $B \subseteq Y$, и $\{Y, p(y_j \mid A)\}$, $A \subseteq X$, их построение.
5. Собственная информация сообщения и ее свойства. Примеры. Измерения в битах, натах и хартли.
6. Энтропия дискретного ансамбля, примеры. Избыточность.
7. Неотрицательность и ограниченность энтропии с доказательствами (свойства 4.1–4.2).
8. Свойства 4.3–4.7 энтропии. Доказательство свойства 4.4.
9. Двоичный ансамбль. Построение графика функции $h(p)$.

Замечание. Имеется таблица значений величин $(-p \log p)$ для всех p от $0,001$ до $0,999$, которой удобно пользоваться при вычислениях энтропии.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Является ли дискретным ансамблем множество $X = \{0, 1\}$ с распределением вероятностей:

x	0	1
$p(x)$	-1/3	4/3

.

☐ По определению дискретного ансамбля $\{X, p(x)\}$ вероятности $p(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$p(x_i) \geq 0 \text{ для любых } i \text{ и } \sum_i p(x_i) = 1.$$

Поскольку $p(0) = -\frac{1}{3} < 0$, то множество X не является дискретным ансамблем.

Ответ. Нет, не является. ⊠

Пример 3.2. Пусть $X = Y = \{0, 1\}$ и задан ансамбль $\{XY, p(x,y)\}$:

$$p(0,0) = 1/16,\ p(0,1) = 1/8,\ p(1,0) = 3/8,\ p(1,1) = 7/16.$$

Постройте условные ансамбли $\{X, p(x \mid 0)\}$ и $\{Y, p(y \mid 1)\}$.

☐ Напомним определение 3.4′. Пусть задан ансамбль $\{XY, p(x,y)\}$. Предположим, что y_j — такой элемент множества Y, для которого $p_2(y_j) \neq 0$. Число

$$p(x_i \mid y_j) =: \frac{p(x_i, y_j)}{p_2(y_j)} \qquad (3.4')$$

называется *условной вероятностью сообщения* X_i *относительно сообщения* y_j. Здесь $p_2(y_j) =: \sum_{x_i \in X} p(x_i, y_j)$, формула (3.2′). Вычисляем

$$p_2(0) = p(0,0) + p(1,0) = 1/16 + 3/8 = 7/16,$$

$$p(0 \mid 0) = \frac{p(0,0)}{p_2(0)} = \frac{1/16}{7/16} = 1/7,\ p(1 \mid 0) = \frac{p(1,0)}{p_2(0)} = \frac{3/8}{7/16} = 6/7.$$

Аналогично, вспоминаем определение 3.4. Пусть задан ансамбль $\{XY, p(x,y)\}$. Предположим, что x_i — такой элемент множества X, для которого $p_1(x_i) \neq 0$. Число

$$p(y_j \mid x_i) =: \frac{p(x_i, y_j)}{p_1(x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{y_j \in Y} p(x_i, y_j)} \qquad (3.4)$$

называется *условной вероятностью сообщения* y_j *относительно сообщения* x_i. Здесь $p_1(x_i) =: \sum_{y_j \in Y} p(x_i, y_j)$, формула (3.2). Вычисляем

$$p_1(1) = p(1,0) + p(1,1) = 3/8 + 7/16 = 13/16,$$

$$p(0 \mid 1) = \frac{p(1,0)}{p_1(1)} = \frac{3/8}{13/16} = 6/13,\ p(1 \mid 1) = \frac{p(1,1)}{p_1(1)} = \frac{7/16}{13/16} = 7/13.$$

Ответ. $\{X, p(0 \mid 0) = 1/7,\ p(1 \mid 0) = 6/7\}$,
$\{Y, p(0 \mid 1) = 6/13,\ p(1 \mid 1) = 7/13\}$. ⊠

Пример 3.3. Вычислите энтропии трех дискретных ансамблей:

$$X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = 1/4,\ p(x_2) = 3/4\},$$

$$Y = \{y_1, y_2 \mid p(y_1) = p(y_2)\},$$

$$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 1/8,\ p(z_2) = 7/8\}.$$

Какой ансамбль обладает большей энтропией?

☐ Вычисляем энтропии ансамблей по формуле

$$H(X) =: -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x). \tag{4.2}$$

$$H(X) = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(\log_2 3 - \log_2 4) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\log_2 3 = 2 - \frac{3}{4}\log_2 3,$$

$$H(Y) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1,$$

$$H(Z) = -\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8} = \frac{3}{8} - \frac{7}{8}(\log_2 7 - \log_2 8) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{21}{8} - \frac{7}{8}\log_2 7 = 3 - \frac{7}{8}\log_2 7.$$

$$H(X) - H(Y) = 1 - \frac{3}{4}\log_2 3 < 0, \text{ т. е. } H(Y) > H(X).$$

$$H(Z) - H(Y) = 2 - \frac{7}{8}\log_2 7 < 0, \text{ т. е. } H(Y) > H(Z).$$

На вопрос «Какой ансамбль обладает большей энтропией? » можно ответить также, используя свойство 4.2.

Ответ. Энтропия больше у ансамбля $\{Y, p(y)\}$. ⊠

Пример 3.4. Распределение вероятностей на произведении ансамблей X и Y задано в виде следующей матрицы:

$$p(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Определите энтропии порожденных ансамблей $\{X, p_1(x)\}$ и $\{Y, p_2(y)\}$.

☐ Ясно, что ансамбли X и Y состоят из трех элементов:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},\ Y = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

Нам известно, что ансамбль $\{XY, p(x, y)\}$ индуцирует два ансамбля $\{X, p_1(x)\}$ и $\{Y, p_2(y)\}$:

$$X = \{x_1, \ldots, x_M\},\ p_1(x_i) =: \sum_{y_j\in Y} p(x_i, y_j), i = 1, 2, \ldots, M, \tag{3.2}$$

$$Y = \{y_1, \ldots, y_N\},\ p_2(y_j) =: \sum_{x_i\in X} p(x_i, y_j),\ j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.3}$$

Эти формулы в нашем случае принимают вид:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\},\ p_1(x_i) = \sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j),$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\},\ \ p_2(y_i) = \sum_{i=1}^{3} = p(x_i, y_j).$$

Здесь вероятность $p(x_i, y_j)$ сообщения (x_i, y_j) совпадает с элементом матрицы, стоящем на пересечении i-й строки и j-го столбца. Вычисляем:

$$p_1(x_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},\ p_1(x_2) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{2}{8},\ p_1(x_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8};$$

$$p_2(y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},\ p_2(y_2) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{2}{8},\ p_2(y_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Поскольку

$$p_1(x_1) = p_2(y_1) = p_1(x_3) = p_2(y_3) = \frac{3}{8},\ p_1(x_2) = p_2(y_2) = \frac{2}{8},$$

то ансамбли $\{X, p_1(x)\}$ и $\{Y, p_2(y)\}$ имеют равные энтропии. Находим энтропии этих ансамблей:

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{3} p_1(x_i)\log_2 p_1(x_i) = -\left(\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\log_2\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}\right) =$$

$$= -\left(\frac{6}{8}(\log_2 3 - \log_2 8) - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{6}{8}\log_2 3 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}\log_2 3.$$

Ответ. $H(X) = H(Y) = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}\log_2 3$. ⊠

Пример 3.5. Имеются два ансамбля $\{X, p(x)\}$ и $\{Y, p(y)\}$, распределения вероятностей которых заданы матрицами:

$$\begin{pmatrix} X \\ p(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} Y \\ p(y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Определите, какой ансамбль имеет большую энтропию, если:

1) $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2 = q_3$; 2) $p_1 = q_2$, $p_2 = q_2 + q_3$.

☐ Для первого ансамбля при равновероятном распределении воспользуемся формулой Хартли:

$$H(X) = \log\ M. \tag{4.3}$$

Имеем: $H(X) = \log_2 2 = 1$, $H(Y) = \log_2 3 > 1$. Откуда, $H(Y) > H(X)$. Следовательно, ансамбль с тремя сообщениями дает большее количество информации.

Для второго случая воспользуемся формулой (4.2) Шеннона:

$$H(X) = p_1 \log_2 1/p_1 + p_2 \log_2 1/p_2.$$

С учетом условия задачи имеем $p_1 = q_1$; $p_2 = q_2 + q_3$ и

$$H(X) = q_1 \log_2 1/q_1 + q_2 \log_2 1/(q_2 + q_3) + q_3 \log_2 1/(q_2 + q_3).$$

С другой стороны

$$H(Y) = q_1 \log_2 1/q_1 + q_2 \log_2 1/q_2 + q_3 \log_2 1/q_3.$$

Поскольку

$$\frac{1}{q_2 + q_3} < \frac{1}{q_2}, \quad \frac{1}{q_2 + q_3} < \frac{1}{q_3},$$

то $H(X) < H(Y)$.

Ответ. Ансамбль с тремя символами имеет большую энтропию. ⊠

Индивидуальные задания

1. Является ли дискретным ансамблем $\{X, p(x)\}$?

1.1.

x	1	2	3	4
$p(x)$	-1	1	-1	1

1.2.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/2	1/3	1/4	1/5

1.3.

x	1	2	3	4
$p(x)$	-1	1	1/2	1/2

1.4.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/4	1/4	1/2	-1/2

1.5.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1	1	1	1

1.6.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/4	-1/4	1/2	1/2

1.7.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/2	0	1/2	0

1.8.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/4	2/5	3/7	4/11

1.9.

x	1	2	3	4
$p(x)$	1	2	3	4

1.10.

x	1	2	3	4
$p(x)$	3/7	1/2	-3/7	-1/2

Является ли дискретным ансамблем $\{XY, p(x, \mathrm{y})\}$?

1.11. $p(x,\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$. 1.12. $p(x,\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

1.13. $p(x,\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. 1.14. $p(x,\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$.

1.15. $p(x,\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

2. Пусть $\{X, p(x)\}$ — ансамбль сообщений о результатах бросания правильной игральной кости, $\{Y, p(y)\}$ и $\{Y, q(y)\}$ — ансамбли сообщений о результате бросания неправильных монет, $Y = \{0, 1\}$. Постройте ансамбль сообщений $\{XY, p(x, y)\}$, если вероятности $p(x, y)$ определяются следующим образом: если на игральной кости выпало четное число очков, то бросается первая неправильная монета; если же выпало нечетное число очков, то бросается другая неправильная монета. Составьте таблицу распределение вероятностей на множестве XY.

2.1. $p(0) = 1/4$, $p(1) = 3/4$; $q(0) = 3/4$, $q(1) = 1/4$.
2.2. $p(0) = 1/8$, $p(1) = 7/8$; $q(0) = 7/8$, $q(1) = 1/8$.
2.3. $p(0) = 1/16$, $p(1) = 15/16$; $q(0) = 15/16$, $q(1) = 1/16$.
2.4. $p(0) = 1/32$, $p(1) = 31/32$; $q(0) = 31/32$, $q(1) = 1/32$.
2.5. $p(0) = 1/64$, $p(1) = 63/64$; $q(0) = 63/64$, $q(1) = 1/64$.
2.6. $p(0) = 2/3$, $p(1) = 1/3$; $q(0) = 1/3$, $q(1) = 2/3$.
2.7. $p(0) = 1/3$, $p(1) = 2/3$; $q(0) = 2/3$, $q(1) = 1/3$.
2.8. $p(0) = 3/8$, $p(1) = 5/8$; $q(0) = 5/8$, $q(1) = 3/8$.
2.9. $p(0) = 3/16$, $p(1) = 13/16$; $q(0) = 13/16$, $q(1) = 3/16$.
2.10. $p(0) = 3/32$, $p(1) = 29/32$; $q(0) = 29/32$, $q(1) = 3/32$.
2.11. $p(0) = 1/4$, $p(1) = 3/4$; $q(0) = 3/8$, $q(1) = 5/8$.
2.12. $p(0) = 5/8$, $p(1) = 3/8$; $q(0) = 3/16$, $q(1) = 13/16$.

2.13. $p(0) = 3/16$, $p(1) = 13/16$; $q(0) = 1/4$, $q(1) = 3/4$.
2.14. $p(0) = 3/8$, $p(1) = 5/8$; $q(0) = 7/64$, $q(1) = 57/64$.
2.15. $p(0) = 3/32$, $p(1) = 29/32$; $q(0) = 9/32$, $q(1) = 24/32$.

3. Пусть $X = Y = \{0, 1\}$ и задан ансамбль $\{XY, p(x, y)\}$. Постройте условные ансамбли $\{X, p(x \mid 0)\}$, $\{X, p(x \mid 1)\}$, $\{Y, p(y \mid 0)\}$, $\{Y, p(y \mid 1)\}$.

3.1. $p(0,0) = 1/15$, $p(0,1) = 4/15$, $p(1,0) = 8/15$, $p(1,1) = 2/15$.
3.2. $p(0,0) = 1/20$, $p(0,1) = 7/20$, $p(1,0) = 9/20$, $p(1,1) = 3/20$.
3.3. $p(0,0) = 1/25$, $p(0,1) = 7/25$, $p(1,0) = 14/25$, $p(1,1) = 3/25$.
3.4. $p(0,0) = 1/30$, $p(0,1) = 7/30$, $p(1,0) = 11/30$, $p(1,1) = 11/30$.
3.5. $p(0,0) = 1/35$, $p(0,1) = 6/35$, $p(1,0) = 19/35$, $p(1,1) = 9/35$.
3.6. $p(0,0) = 1/40$, $p(0,1) = 7/40$, $p(1,0) = 19/40$, $p(1,1) = 13/40$.
3.7. $p(0,0) = 1/45$, $p(0,1) = 13/45$, $p(1,0) = 17/45$, $p(1,1) = 14/45$.
3.8. $p(0,0) = 1/50$, $p(0,1) = 17/50$, $p(1,0) = 19/50$, $p(1,1) = 13/50$.
3.9. $p(0,0) = 1/55$, $p(0,1) = 17/55$, $p(1,0) = 19/55$, $p(1,1) = 18/55$.
3.10. $p(0,0) = 1/60$, $p(0,1) = 17/60$, $p(1,0) = 23/60$, $p(1,1) = 19/60$.
3.11. $p(0,0) = 18/55$, $p(0,1) = 19/55$, $p(1,0) = 17/55$, $p(1,1) = 1/55$.
3.12. $p(0,0) = 13/50$, $p(0,1) = 19/50$, $p(1,0) = 17/50$, $p(1,1) = 1/50$.
3.13. $p(0,0) = 17/45$, $p(0,1) = 14/45$, $p(1,0) = 1/45$, $p(1,1) = 13/45$.
3.14. $p(0,0) = 7/40$, $p(0,1) = 1/40$, $p(1,0) = 13/40$, $p(1,1) = 19/40$.
3.15. $p(0,0) = 6/35$, $p(0,1) = 1/35$, $p(1,0) = 9/35$, $p(1,1) = 19/35$.

4. Вычислите энтропии заданных дискретных ансамблей. Какой ансамбль обладает большей энтропией?

4.1. $X = \{x_1, \ldots, x_6 \mid p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/4,$
$p(x_4) = p(x_5) = p(x_6) = 1/12\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = p(y_2) = p(y_3)\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 7/16,\ p(z_2) = 9/16\}$.

4.2. $X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = 127p(x_2)\}$;
$Y = \{y_1, y_2 \mid p(y_1) = p(y_2)\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 15/32,\ p(z_2) = 17/32\}$.

4.3. $X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = p(x_2)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = p(y_2) = p(y_3)\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4 \mid p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = p(z_4)\}$.

4.4. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = p(x_2),\ p(x_3) = 25p(x_1)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = p(y_2) = p(y_3)\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3 \mid p(z_1) = 3p(z_2),\ p(z_3) = 5p(z_2)\}$.

4.5. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = 16p(x_2),\ p(x_3) = 64p(x_2)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = 3p(y_2),\ p(y_3) = 23p(y_2)\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3 \mid p(z_1) = p(z_2) = p(z_3)\}$.

4.6. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \mid p(x_1) = 2p(x_2),\ p(x_3) = p(x_4) = 0{,}125\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4 \mid p(y_1) = 1/2,\ p(y_2) = p(y_3),\ p(y_4) = 1/4\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4 \mid p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = p(z_4)\}$.

4.7. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = p(x_2) = p(x_3)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = 3p(y_2),\ p(y_3) = 5/9\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 2p(z_2)\}$.

4.8. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \mid p(x_1) = 4p(x_2) = 0{,}6,\ p(x_3) = p(x_4)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4 \mid p(y_1) = 4p(y_4),\ p(y_2) = p(y_3),\ p(y_4) = 3/20\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4 \mid p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = p(z_4)\}$.

4.9. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = p(x_2),\ p(x_3) = 25p(x_1)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = 3p(y_2),\ p(y_3) = 23p(y_2)\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3 \mid p(z_1) = 3p(z_2),\ p(z_3) = 5p(z_2)\}$.

4.10. $X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = 255p(x_2)\}$;
$Y = \{y_1, y_2 \mid p(y_1) = p(y_2)\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 7/16,\ p(z_2) = 9/16\}$.

4.11. $X = \{x_1, \ldots, x_6 \mid p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/4,$
$p(x_4) = p(x_5) = p(x_6) = 1/12\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = 1/3\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 7/16,\ p(z_2) = 9/16\}$.

4.12. $X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = 1/12,\ p(x_2) = 11/12\}$;
$Y = \{y_1, y_2 \mid p(y_1) = p(y_2)\}$;
$Z = \{z_1, z_2 \mid p(z_1) = 9/16,\ p(z_2) = 7/16\}$.

4.13. $X = \{x_1, x_2 \mid p(x_1) = p(x_2)\}$;
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = 4p(y_2), p(y_3) = 3/8\}$;
$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4 \mid p(z_1) = 2p(z_2), p(z_3) = p(z_4) = 1/4\}$.

4.14. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = 6p(x_2),\ p(x_3) = 20/27\};$
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = p(y_2) = p(y_3)\};$
$Z = \{z_1, z_2, z_3 \mid p(z_1) = 3p(z_2),\ p(z_3) = 5/9\}.$

4.15. $X = \{x_1, x_2, x_3 \mid p(x_1) = 16p(x_2),\ p(x_3) = 64/81\};$
$Y = \{y_1, y_2, y_3 \mid p(y_1) = 3p(y_2),\ p(y_3) = 23/27\};$
$Z = \{z_1, z_2, z_3 \mid p(z_1) = p(z_2) = p(z_3)\}.$

5. Распределение вероятностей на произведении множеств X и Y задано в виде матрицы $p(x_i, y_j)$. Постройте порожденные ансамбли $\{X, p_1(x)\}$, $\{Y, p_2(y)\}$, и найдите их энтропии. Являются ли эти ансамбли статистически независимыми?

5.1. $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.2. $\begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$

5.3. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$

5.4. $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.5. $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}.$

5.6. $\begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$

5.7. $\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

5.8. $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}.$

5.9. $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

5.10. $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.11. $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 1/9 \\ 2/9 & 0 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 0 \end{pmatrix}.$

5.12. $\begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 1/11 & 1/11 & 0 & 2/11 \\ 1/1 & 0 & 1/11 & 1/11 \end{pmatrix}.$

5.13. $\begin{pmatrix} 1/13 & 1/13 & 1/13 \\ 2/13 & 1/13 & 1/13 \\ 3/13 & 1/13 & 2/13 \end{pmatrix}.$

5.14. $\begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 1/12 \\ 1/6 & 1/4 & 1/12 \\ 1/4 & 1/12 & 0 \end{pmatrix}.$

5.15. $\begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 & 1/2 \end{pmatrix}.$

6. Задан ансамбль $\{X, p(x)\}$. Найдите его избыточность. Найдите другой ансамбль $\{Y, p(y)\}$, у которого все сообщений равновероятны, а разность $|H(Y) - H(X)|$ минимальна.

6.1. $p(x_1) = 0,1,\quad p(x_2) = 0,15,\quad p(x_3) = 0,15,\quad p(x_4) = 0,6.$
6.2. $p(x_1) = 0,15,\quad p(x_2) = 0,2,\quad p(x_3) = 0,35,\quad p(x_4) = 0,3.$
6.3. $p(x_1) = 1/4,\quad p(x_2) = 1/5,\quad p(x_3) = 1/4,\quad p(x_4) = 3/10.$
6.4. $p(x_1) = 0,25,\quad p(x_2) = 0,15,\quad p(x_3) = 0,3,\quad p(x_4) = 0,3.$
6.5. $p(x_1) = 0,3,\quad p(x_2) = 0,2,\quad p(x_3) = 0,25,\quad p(x_4) = 0,25.$
6.6. $p(x_1) = 3/10,\quad p(x_2) = 1/4,\quad p(x_3) = 1/4,\quad p(x_4) = 1/5.$
6.7. $p(x_1) = 0,4,\quad p(x_2) = 0,15,\quad p(x_3) = 0,15,\quad p(x_4) = 0,3.$
6.8. $p(x_1) = 3/20,\quad p(x_2) = 1/4,\quad p(x_3) = 3/10,\quad p(x_4) = 3/10.$
6.9. $p(x_1) = 0,5,\quad p(x_2) = 0,25,\quad p(x_3) = 0,15,\quad p(x_4) = 0,1.$
6.10. $p(x_1) = 0,2,\quad p(x_2) = 0,25,\quad p(x_3) = 0,25,\quad p(x_4) = 0,3.$
6.11. $p(x_1) = 3/5,\quad p(x_2) = 1/10,\quad p(x_3) = 3/20,\quad p(x_4) = 3/20.$
6.12. $p(x_1) = 0,55,\quad p(x_2) = 0,15,\quad p(x_3) = 0,15,\quad p(x_4) = 0,15.$
6.13. $p(x_1) = 0,35,\quad p(x_2) = 0,25,\quad p(x_3) = 0,2,\quad p(x_4) = 0,2.$
6.14. $p(x_1) = 0,45,\quad p(x_2) = 0,2,\quad p(x_3) = 0,25,\quad p(x_4) = 0,1.$
6.15. $p(x_1) = 3/20,\quad p(x_2) = 3/10,\quad p(x_3) = 7/20,\quad p(x_4) = 1/5.$

7. Имеются два ансамбля, распределения вероятностей которых заданы матрицами:

$$\begin{pmatrix} X \\ p(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} Y \\ p(y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Какой ансамбль имеет большую энтропию?

7.1. $p_1 = q_2,\quad p_2 = q_2 + q_3.$ 7.2. $p_1 = q_2,\quad p_2 = q_1 + q_3.$
7.3. $p_1 = 3q_2,\quad p_2 = q_1 + 2q_3.$ 7.4. $p_1 = 3p_2,\quad q_1 = q_2 = q_3.$
7.5. $p_1 = 2q_2,\quad p_2 = q_1 + q_3.$ 7.6. $p_1 = 3q_2,\quad p_2 = q_1 + 2q_3.$
7.7. $p_1 = p_2,\quad q_1 = q_2 = q_3.$ 7.8. $p_1 = q_1,\quad p_2 = q_2 + q_3.$
7.9. $p_1 = 3q_2,\quad p_2 = q_1 - 2q_3.$ 7.10. $p_1 = 3q_1,\quad p_2 = q_2 - 2q_3.$
7.11. $p_1 = q_1,\quad p_2 = q_1 q_2.$ 7.12. $p_1 = q_2,\quad p_2 = q_1 + q_3.$
7.13. $p_1 = 3q_2,\quad p_2 = q_1 + 2q_3.$ 7.14. $p_2 = 2p_1,\quad q_1 = q_2 = q_3.$
7.15. $p_1 = 2q_1,\quad p_2 = q_2 + q_3.$