1. ФУНКЦИИ $[x]$ и $\{x\}$

Вопросы для самоконтроля

1. Функция $[x]$ и ее свойства.
2. Каноническое разложение $n!$.
3. Функция $\{x\}$ и ее свойства.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Решите уравнение $\left[\frac{x+2}{2}\right] = x - 1$.
$\square$ Так как $\left[\frac{x+2}{2}\right]$ — целое число, то $x-1$ — целое, а значит x — целое. Из свойств целой части следует, что

$$x - 1 \le \frac{x+2}{2} < (x-1)+1.$$

Решая эти неравенства, получим: $2 < x \le 4$, $x = 3$ или $x = 4$. Теперь убеждаемся, что оба значения являются решениями.
Ответ. Уравнение имеет два решения: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ⊠

Пример 1.2. Решите уравнение $[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$.
$\square$ Обозначим $[x-1] = k$, где k — целое число. Из свойств целой части получим:

$$\begin{cases} k \le \frac{x+2}{2} < k+1 \\ k \le x-1 < k+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2k-2 \le x < 2k \\ k+1 \le x < k+2. \end{cases}$$

Так как $2k-2 \le x < k+2$ и $k+1 \le x < 2k$, то $1 < k < 4$. Поскольку k — целое, то $k = 2$ или $k = 3$.

Если $k = 2$, то $\begin{cases} 2 \le x < 4 \\ 3 \le x < 4 \end{cases}$ и $3 \le x < 4$.

Если $k = 3$, то $\begin{cases} 4 \le x < 6 \\ 4 \le x < 5 \end{cases}$ и $4 \le x < 5$.

Ответ. Уравнение имеет бесконечно много решений: $3 \le x < 5$. ⊠

Пример 1.3. Решите уравнение $x^2 - 10[x] + 9 = 0$.
$\square$ Пусть $[x] = k$. Из равенства $x^2 = 10k - 9$ следует, что $10k - 9 \ge 0$ и $k \ge \frac{9}{10} > 0$, т. е. k — натуральное число. Поскольку $x \ge k$, то $x^2 + 9 = 10k \le 10x$ и $x^2 - 10x + 9 \le 0$. Отсюда следует, что $1 \le x \le 9$, но тогда $1 \le k \le 9$. Подставляя вместо k значения $1, 2, \ldots, 9$ в уравнение $x^2 = 10k - 9$, и учитывая, что x — положительное число, получим: $x \in \{1, \sqrt{11}, \sqrt{21}, \ldots, \sqrt{81}\}$. Но из этих значений x исходному уравнению

удовлетворяют только числа $1, \sqrt{61}, \sqrt{71}, 9$.
Ответ. Уравнение имеет четыре решения: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{61}$, $x_3 = \sqrt{71}$, $x_4 = 9$. ⊠

Пример 1.4. Решите уравнение $\left[\frac{x-3}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right] = \ln x$.
$\square$ Поскольку $\frac{x}{4} = \left[\frac{x}{4}\right] + \left\{\frac{x}{4}\right\}$, то

$$\frac{x-3}{4} - \left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x-3}{4} - \frac{x}{4} + \left\{\frac{x}{4}\right\} = \left\{\frac{x}{4}\right\} - \frac{3}{4}.$$

Из определения дробной части следует, что $0 \le \left\{\frac{x}{4}\right\} < 1$. Поэтому

$$-\frac{3}{4} \le \left\{\frac{x}{4}\right\} - \frac{3}{4} < \frac{1}{4}.$$

Так как целая часть числа, принадлежаего промежутку $\left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, равна -1 или 0, то $\ln x = -1$ и $x = e^{-1}$, или $\ln x = 0$ и $x = 1$.

Сделаем проверку. Если $x = e^{-1}$, то

$$\left[\frac{e^{-1}-3}{4} - \left[\frac{e^{-1}}{4}\right]\right] = \left[\frac{1-3e}{4e} - 0\right] = -1 = \ln e^{-1} = -1,$$

т. е. $x = e^{-1}$ является решением.

Если $x = 1$, то

$$\left[\frac{1-3}{4} - \left[\frac{1}{4}\right]\right] = \left[-\frac{1}{2} - 0\right] = -1 \ne \ln 1 = 0.$$

Поэтому $x = 1$ не является решением.
Ответ. Уравнение имеет единственное решение: $x = e^{-1}$. ⊠

Пример 1.5. Решите уравнение $\{(x+1)^2\} = x^2$.
$\square$ Из определения дробной части следует, что $0 \le x^2 < 1$, т. е. $x \in (-1; 1)$. Кроме того, по свойствам дробной части равенство $\{x^2 + 2x + 1\} = x^2 = \{x^2\}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому в исходном уравнении значение $2x$ должно быть целым числом. Ясно, что при $x \in (-1; 1)$ значение $2x$ целое в точности тогда, когда $x \in \{-0{,}5; 0; 0{,}5\}$. Проверка показывает, что все три значения являются решениями исходного уравнения.
Ответ. Уравнение имеет три решения: $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}5$. ⊠

Пример 1.6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2\\ y+[z]+3\{x\}=2{,}5\\ z+[x]+\{y\}=1{,}5.\end{cases}$$

□ Будем пользоваться равенством $s=[s]+\{s\}$, которое справедливо для любого $s\in\mathbb{R}$. Складывая уравнения системы, получим

$$2x+2y+2z+2\{x\}=6,\ x+y+z+\{x\}=3.$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения исходной системы, получим

$$\begin{cases} \{x\}+\{y\}+[z]=1\\ [x]+\{z\}-\{x\}=0{,}5\\ [y]+2\{x\}=1{,}5.\end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что возможны только два случая: $[y]=1$, $\{x\}=0{,}25$, либо $[y]=0$, $\{x\}=0{,}75$.

Если $[y]=1$, $\{x\}=0{,}25$, то второе уравнение последней системы примет вид: $[x]+\{z\}=0{,}75$, поэтому $[x]=0$, $\{z\}=0{,}75$. Первое уравнение последней системы примет вид: $\{y\}+[z]=0{,}75$, поэтому $[z]=0$, $\{y\}=0{,}75$. Таким образом, $x=[x]+\{x\}=0{,}25$, $y=[y]+\{y\}=1{,}75$, $z=[z]+\{z\}=0{,}75$. Проверка показывает, что эти значения являются решением исходной системы.

При $[y]=0$, $\{x\}=0{,}75$, рассуждая аналогично, получим, что $x=1{,}75$, $y=0{,}25$, $z=0{,}25$ — решение системы.

Ответ. Система имеет два решения: $x=0{,}25$, $y=1{,}75$, $z=0{,}75$ и $x=1{,}75$, $y=0{,}25$, $z=0{,}25$. ⊠

Пример 1.7. Найдите каноническое разложение числа 100!. Сколькими нулями оканчивается его десятичная запись?

□ Так как $100!=2^{a_2}3^{a_3}5^{a_5}7^{a_7}11^{a_{11}}13^{a_{13}}17^{a_{17}}\cdots 97^{a_{97}}$, то
$a_2=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]=97$,
$a_3=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{27}\right]+\left[\frac{100}{81}\right]=48$, $a_5=\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{25}\right]=24$,
$a_7=\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{49}\right]=16$, $a_{11}=\left[\frac{100}{11}\right]=9$, $a_{13}=\left[\frac{100}{13}\right]=7$,
$a_{17}=\left[\frac{100}{17}\right]=5$, $a_{19}=\left[\frac{100}{19}\right]=5$, $a_{23}=4$, $a_{29}=a_{31}=3$,
$a_{37}=a_{41}=a_{43}=a_{47}=2$, $a_{53}=a_{59}=a_{61}=a_{67}=a_{71}=a_{73}=a_{79}=a_{83}=$

$=a_{89}=a_{97}=1$. Таким образом, $100!=2^{97}\cdot 3^{48}\cdot 5^{24}\cdot 7^{16}\cdot 11^{9}\cdot 13^{7}\cdot 17^{5}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot 29^{3}\cdot 31^{3}\cdot 37^{2}\cdot 41^{2}\cdot 43^{2}\cdot 47^{2}\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97$.

В десятичной записи числа 100! нулей будет столько, сколько пар чисел 2 и 5 в каноническом разложении этого числа. Так как $a_2=97$, $a_5=24$, то число 100! оканчивается 24 нулями.

Ответ. 24 нуля. ⊠

Пример 1.8. Перечислите все натуральные трехзначные числа n такие, что количество натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся на 5, принадлежит промежутку $[79;85]$.

□ Представим трехзначное число n в виде $n=100a+10b+c$, где a,b,c — цифры, $a\neq 0$. Тогда количество натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся на 5, равно

$$n-\left[\frac{n}{5}\right]=100a+10b+c-\left[\frac{100a+10b+c}{5}\right]=$$
$$=80a+8b+c-\left[\frac{c}{5}\right].$$

Здесь мы использовали свойство: $[x+k]=[x]+k$, $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$. Так как $0\le\left[\frac{c}{5}\right]\le 1$, то $79\le 80a+8b+c\le 86$. Этим неравенствам удовлетворяют значения $a=1$, $b=0$, $0\le c\le 6$. Для них n принимает значения $100,101,\ldots,106$.

Ответ. $100,101,\ldots,106$. ⊠

Индивидуальные задания

1. Решите уравнение.

1.1. $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$. 1.2. $\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$.
1.3. $\left[\frac{3x+5}{4}\right]=\frac{2x-1}{2}$. 1.4. $\left[\frac{x+7}{3}\right]=\frac{x-2}{5}$.
1.5. $\left[\frac{2x+8}{5}\right]=\frac{x+3}{2}$. 1.6. $\left[\frac{5x-4}{7}\right]=\frac{3x+1}{2}$.
1.7. $\left[\frac{6x+1}{5}\right]=\frac{4x-3}{7}$. 1.8. $\left[\frac{3x-5}{4}\right]=\frac{2x+1}{2}$.
1.9. $\left[\frac{x-7}{3}\right]=\frac{x+2}{5}$. 1.10. $\left[\frac{x+8}{7}\right]=\frac{3x+5}{2}$.
1.11. $\left[\frac{5x+3}{4}\right]=\frac{2x-3}{5}$. 1.12. $\left[\frac{2x+5}{3}\right]=\frac{7x-3}{4}$.
1.13. $\left[\frac{4x-7}{8}\right]=\frac{2x+5}{3}$. 1.14. $\left[\frac{2x+3}{3}\right]=\frac{3x+4}{7}$.
1.15. $\left[\frac{5x+4}{7}\right]=\frac{3x-1}{2}$.

2. Решите уравнение.

2.1. $[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right]$. 2.2. $\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left[\frac{x-2}{2}\right]$.

2.3. $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$. 2.4. $\left[\frac{x-2}{3}\right]=\left[\frac{x+3}{2}\right]$.

2.5. $[x+2]=\left[\frac{x-1}{2}\right]$. 2.6. $\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left[\frac{x+2}{5}\right]$.

2.7. $\left[\frac{x+5}{3}\right]=[x-1]$. 2.8. $\left[\frac{x-1}{4}\right]=[x+5]$.

2.9. $[x+3]=\left[\frac{x+2}{5}\right]$. 2.10. $\left[\frac{x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+5}{2}\right]$.

2.11. $\left[\frac{x-2}{5}\right]=\left[\frac{x+3}{3}\right]$. 2.12. $[x-1]=\left[\frac{x+2}{3}\right]$.

2.13. $\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left[\frac{x-7}{3}\right]$. 2.14. $\left[\frac{x-7}{2}\right]=\left[\frac{x-3}{3}\right]$.

2.15. $\left[\frac{x+6}{5}\right]=[x-3]$.

3. Решите уравнение.

3.1. $x^2-[x]-30=0$. 3.2. $2x^2-5[x]+2=0$.

3.3. $x^2-5[x]+6=0$. 3.4. $3x^2-8[x]+5=0$.

3.5. $5x^2+3[x]-2=0$. 3.6. $5x^2-3[x]-2=0$.

3.7. $x^2+3[x]+2=0$. 3.8. $2x^2+7[x]+5=0$.

3.9. $2x^2+5[x]+2=0$. 3.10. $3x^2+5[x]+2=0$.

3.11. $2x^2-7[x]+5=0$. 3.12. $3x^2+8[x]+5=0$.

3.13. $2x^2+3[x]+1=0$. 3.14. $3x^2-5[x]+2=0$.

3.15. $2x^2-[x]-3=0$.

4. Решите уравнение.

4.1. $\left[\frac{x-1}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\lg x$. 4.2. $\left[\frac{x+3}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]\right]=\lg x$.

4.3. $\left[\frac{x-2}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\lg 5x$. 4.4. $\left[\frac{2x-4}{3}-\left[\frac{2x}{3}\right]\right]=\ln 3x$.

4.5. $\left[\frac{2x-2}{4}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\log_5 x$. 4.6. $\left[\frac{6x-3}{3}-[2x]\right]=\lg 7x$.

4.7. $\left[\frac{8x-4}{3}-\left[\frac{8x}{3}\right]\right]=\lg x$. 4.8. $\left[\frac{x+3}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]\right]=\log_7 x$.

4.9. $\left[\frac{2x+4}{2}-[x]\right]=\log_5 3x$. 4.10. $\left[\frac{3x+7}{6}-\left[\frac{x}{2}\right]\right]=\lg 3x$.

4.11. $\left[\frac{4x-3}{3}-\left[\frac{4x}{3}\right]\right]=\ln 3x$. 4.12. $\left[\frac{3x+6}{4}-\left[\frac{3x}{4}\right]\right]=\ln x$.

4.13. $\left[\frac{7x-5}{3}-\left[\frac{7x}{3}\right]\right]=\log_5 3x$. 4.14. $\left[\frac{9x+4}{2}-\left[\frac{9x}{2}\right]\right]=\lg 2x$.

4.15. $\left[\frac{2x+3}{2}-[x]\right]=\lg x$.

5. Укажите наибольшее и наименьшее решения уравнения.

5.1. $\{(x+1)^3\}=x^3$. 5.2. $\{(2x-1)^3\}=8x^3$.

5.3. $\{(2x+1)^3\}=8x^3$. 5.4. $\{(x-1)^3\}=x^3$.

5.5. $\{(1-2x)^3\}=-8x^3$. 5.6. $\{(1-x)^3\}=-x^3$.

5.7. $\{(x-2)^2(x+2)\}=x^3$. 5.8. $\{(x-2)^3\}=x^3$.

5.9. $\{(x+2)^2(x-2)\}=x^3$. 5.10. $\{(x+1)^2(x-1)\}=x^3$.

5.11. $\{(x-1)^2(x+1)\}=x^3$. 5.12. $\{(x-1)^2(x+2)\}=x^3$.

5.13. $\{(x+1)^2(x-2)\}=x^3$. 5.14. $\{(x-2)^2(x+1)\}=x^3$.

5.15. $\{(x+2)^2(x-1)\}=x^3$.

6. Решите систему уравнений.

6.1. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}1 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}3. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} 2x+2[y]+2\{z\}=1{,}3 \\ y+2[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+2\{y\}=0{,}7. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}5 \\ y+3[z]+\{x\}=1{,}2 \\ z+[x]+\{y\}=0{,}3. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4 \\ y+[z]+3\{x\}=1{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}5. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4 \\ y+[z]+3\{x\}=3{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}5. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x+[y]+5\{z\}=3 \\ y+[z]+\{x\}=3{,}4 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}6. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x+[y]+7\{z\}=4 \\ y+[z]+\{x\}=1{,}6 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}4. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}5 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=3{,}4. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x+[y]+2\{z\}=3 \\ 2y+2[z]+2\{x\}=1{,}7 \\ z+2[x]+\{y\}=1{,}3. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2 \\ y+[z]+7\{x\}=4{,}4 \\ z+[x]+\{y\}=1{,}6. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}5 \\ z+[x]+3\{y\}=3{,}5. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=2 \\ y+[z]+\{x\}=2{,}8 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}6. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x+2[y]+\{z\}=2{,}9 \\ y+[z]+2\{x\}=2 \\ 2z+2[x]+2\{y\}=1{,}1. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1 \\ y+[z]+5\{x\}=4{,}5 \\ z+[x]+\{y\}=2{,}5. \end{cases}$

7. Найдите каноническое разложение числа $n!$. Сколькими нулями оканчивается его десятичная запись?

7.1. $n=16$. 7.2. $n=18$. 7.3. $n=23$. 7.4. $n=20$.
7.5. $n=28$. 7.6. $n=27$. 7.7. $n=30$. 7.8. $n=25$.
7.9. $n=24$. 7.10. $n=32$. 7.11. $n=22$. 7.12. $n=29$.
7.13. $n=31$. 7.14. $n=33$. 7.15. $n=21$.

8. По указанному каноническому разложению $n!$ восстановите числа n и α_i.

8.1. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}$.

8.2. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}$.

8.3. $n!=2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}$.

8.4. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^4\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}$.

8.5. $n!=2^{31}\cdot 3^{14}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}$.

8.6. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{10}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^2\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}$.

8.7. $n!=2^{31}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^3\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}$.

8.8. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}$.

8.9. $n!=2^{32}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^8\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}$.

8.10. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{15}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^5\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}$.

8.11. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^8\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^3\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}\cdot 37^{\alpha_{37}}$.

8.12. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^9\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^2\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}$.

8.13. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{17}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^2\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}\cdot 37^{\alpha_{37}}$.

8.14. $n!=2^{\alpha_2}\cdot 3^{15}\cdot 5^8\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^{\alpha_{13}}\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}$.

8.15. $n!=2^{35}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdot 11^{\alpha_{11}}\cdot 13^3\cdot 17^{\alpha_{17}}\cdot 19^{\alpha_{19}}\cdot 23^{\alpha_{23}}\cdot 31^{\alpha_{31}}\cdot 37^{\alpha_{37}}$.

9. Перечислите все натуральные трехзначные числа n такие, что количество натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся на 5, принадлежит промежутку $[b;c]$.

9.1. $b=79$, $c=85$. 9.2. $b=80$, $c=86$.
9.3. $b=90$, $c=98$. 9.4. $b=95$, $c=100$.
9.5. $b=70$, $c=81$. 9.6. $b=76$, $c=85$.
9.7. $b=95$, $c=101$. 9.8. $b=70$, $c=82$.
9.9. $b=77$, $c=87$. 9.10. $b=97$, $c=105$.
9.11. $b=86$, $c=91$. 9.12. $b=90$, $c=95$.
9.13. $b=80$, $c=90$. 9.14. $b=91$, $c=105$.
9.15. $b=78$, $c=95$.

2. ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА, σ И τ

Вопросы для самоконтроля

1. Мультипликативные функции.
2. Функция Эйлера и ее свойства.
3. Вычисление значений функции Эйлера.
4. Функция $\sigma(n)$ и ее свойства.
5. Вычисление значений функции $\sigma(n)$.
6. Функция $\tau(n)$ и ее свойства.
7. Вычисление значений функции $\tau(n)$.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Вычислите значения функций Эйлера, $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ от числа 113400.

☐ Воспользуемся тем, что если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ — каноническое разложение числа n, то значения функций Эйлера, $\sigma(n)$ и $\tau(n)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_t^{\alpha_t - 1}(p_t - 1),$$

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_t + 1),$$

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_t^{\alpha_t+1} - 1}{p_t - 1}\right).$$

Так как $113400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, то имеем:

$\varphi(113400) = (2^3 - 2^2)(3^4 - 3^3)(5^2 - 5)(7 - 7^0) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5,$

$\tau(113400) = (3+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5,$

$\sigma(113400) = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^5-1}{3-1} \cdot \frac{5^3-1}{5-1} \cdot \frac{7^2-1}{7-1} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 31.$

Ответ. $\varphi(113400) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, $\tau(113400) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $\sigma(113400) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 31$. ⊠

Пример 2.2. Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа $\varphi(111!)$?

☐ Каноническое разложение числа 111! и значение функции Эйлера имеют вид: $111! = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \dots 109$,

$$\varphi(111!) = 2^{\alpha_2 - 1} \cdot 3^{\alpha_3 - 1}(3-1) \cdot 5^{\alpha_5 - 1}(5-1) \dots (109-1).$$

Число нулей, которыми заканчивается десятичная запись, совпадает с

количеством 5 в каноническом разложении $\varphi(111!)$. К значению

$$\alpha_5 - 1 = \left[\frac{111}{5}\right] + \left[\frac{111}{5^2}\right] - 1 = 22 + 4 - 1 = 25$$

необходимо добавить число простых чисел p_i, для которых $p_i - 1$ делится на 5. Такими простыми числами будут числа 11, 31, 41, 61, 71, 101: $11 - 1 = 10$, $31 - 1 = 30$, $41 - 1 = 40$, $61 - 1 = 60$, $71 - 1 = 70$, $101 - 1 = 100$ делятся на 10, то десятичная запись числа $\varphi(111!)$ заканчивается 32 нулями.

Ответ. 32 нуля. ⊠

Пример 2.3. Решите уравнения $\varphi(x) = i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

☐ Напомним, что если $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < \dots < p_k$, то $\varphi(x) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$.

Ясно, что решениями уравнения $\varphi(x) = 1$ будут только 1 и 2. Несложно проверить, что решениями уравнения $\varphi(x) = 2$ будут только числа 3, 4 и 6.

Пусть $\varphi(x) = 3$. Так как $p_i - 1 \neq 3$, то $p_j = 3$ для некоторого j и $p_j(p_j - 1)$ делит $\varphi(x) = 3$, что невозможно. Значит уравнение $\varphi(x) = 3$ не имеет решений.

Пусть $\varphi(x) = 4$. Если $x = 2^\alpha$, то $\varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1} = 4$ и $x = 8$. Пусть теперь $x \neq 2^\alpha$, т. е. x делится на нечетное простое число p_i. Тогда $p_i - 1$ делит 4 и $p_i \in \{3, 5\}$. Если x делится на 3, то $x = 3m$, 3 не делит m, $\varphi(3m) = 2\varphi(m)$, $\varphi(m) = 2$, $m = 4$, $x = 12$. Если x делится на 5, то $x = 5m$, 5 не делит m, $\varphi(5m) = 4\varphi(m)$, $\varphi(m) = 1$, $m \in \{1, 2\}$, $x \in \{5, 10\}$.

Ответ. Уравнение $\varphi(x) = 1$ имеет два решения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Уравнение $\varphi(x) = 2$ имеет три решения: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$. Уравнение $\varphi(x) = 3$ решений не имеет. Уравнение $\varphi(x) = 4$ имеет четыре решения: $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 10$, $x_4 = 12$. ⊠

Пример 2.4. Решите уравнение $\varphi(x) = 10$.

☐ Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < \dots < p_k$. Тогда $\varphi(x) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) = 2 \cdot 5$.

Если $p_i = 5$ для некоторого i, то $p_i - 1 = 5 - 1 = 4$ и 4 делит 10, что невозможно. Поэтому 5 не делит x и $p_j - 1$ делится на 5 для некоторого j. Так как $p_j - 1$ — четное число, то $p_j - 1 = 2 \cdot 5$ и $p_j^{\alpha_j} = 11$. Теперь $x = 11m$, причем 11 не делит m. Из равенства $10 = \varphi(11m) = 10\varphi(m)$ получаем, что $\varphi(m) = 1$ и $m \in \{1, 2\}$.

Ответ. Уравнение имеет два решения: $x_1 = 11$, $x_2 = 22$. ⊠

Пример 2.5. Решите уравнение $\varphi(x) = 40$.
□ Опять считаем, что $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < \dots < p_k$, $\varphi(x) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1) = 2^3 \cdot 5$.

Предположим, что 5^2 делит x. Тогда $x = 5^2m$, 5 не делит m, и $\varphi(x) = \varphi(5^2)\varphi(m) = 40$, $\varphi(m) = 2$, $m \in \{3, 4, 6\}$, $x \in \{75, 100, 150\}$.

Пусть теперь 5^2 не делит x. Тогда 5 делит $p_i - 1$ для некоторого i. Ясно, что $p_i - 1 = 2^k5$, где $1 \le k \le 3$, т.е. $p_i \in \{11, 41\}$. Если $p_i = 11$, то $x = 11m$, 11 не делит m, $\varphi(m) = 4$, $m \in \{5, 8, 10, 12\}$ и $x \in \{55, 88, 110, 132\}$. Если $p_i = 41$, то $x = 41m$, 41 не делит m, $\varphi(m) = 1$, $m \in \{1, 2\}$ и $x \in \{41, 82\}$.
Ответ. Уравнение имеет девять решений:
$x \in \{41, 55, 75, 82, 88, 100, 110, 132, 150\}$. ⊠

Пример 2.6. Найдите все простые делители числа x из уравнения $3\varphi(x) = x$.
□ По условию 3 делит x, значит $3 - 1 = 2$ делит $\varphi(x)$, а из равенства $3\varphi(x) = x$ следует, что x делится на 6. Будем считать, что

$$x = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},\ 3 < p_1 < \dots < p_k,\ k \ge 0.$$

Предположим, что $k > 0$. По условию

$$3 \cdot 2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1} \cdot 2 \cdot p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1) = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

поэтому $(p_1-1) \dots (p_k-1) = p_1 \dots p_k$. Так как $p_1 - 1 < \dots < p_k - 1 < p_k$, то p_k делит $(p_1-1) \dots (p_k-1)$, что невозможно. Поэтому допущение $k > 0$ неверно. Значит, $k = 0$ и $x = 2^\alpha 3^\beta$.
Ответ. $\{2,\ 3\}$. ⊠

Пример 2.7. Решите уравнение $\varphi(3^x5^y) = 40$.
□ Так как $\varphi(3^x5^y) = 3^{x-1}(3 - 1)5^{y-1}(5 - 1) = 40 = 2^35$, то $3^{x-1}5^{y-1} = 5$. Поэтому $x = 1$, а $y = 2$.
Ответ. $x = 1$, $y = 2$. ⊠

Пример 2.8. Найдите натуральное число x, если известно, что 12 делит x и $\tau(x) = 14$.
□ Натуральное число x записывается в виде:

$$x = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},\ \alpha \ge 2,\ \beta \ge 1,$$

$$3 < p_1 < p_2 < \dots < p_k,\ k \ge 0.$$

По условию

$$\tau(x) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 14 = 2 \cdot 7,$$

где $\alpha + 1 \ge 3$, $\beta + 1 \ge 2$. Это возможно лишь в случае, когда $k = 0$, $\alpha + 1 = 7$, $\beta + 1 = 2$ и $x = 2^6 \cdot 3 = 192$.
Ответ. $x = 192$. ⊠

Пример 2.9. Пусть $n = p^\alpha q^\beta$, где p и q — различные простые, α и β — натуральные числа. Найдите $\tau(n^3)$, если $\tau(n^2) = 81$.
□ Поскольку значение $\tau(n)$ не зависит от p и q, то можно считать, что $\alpha \le \beta$. По условию

$$\tau(n^2) = \tau(p^{2\alpha}q^{2\beta}) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 81 = 3^4.$$

Возможны только следующие случаи:

$2\alpha + 1 = 1$, $2\beta + 1 = 3^4$, откуда $\alpha = 0$, а это противоречит тому, что α — натуральное;

$2\alpha + 1 = 3$, $2\beta + 1 = 3^3$, откуда $\alpha = 1$, $\beta = 13$;

$2\alpha + 1 = 3^2$, $2\beta + 1 = 3^2$, откуда $\alpha = 4$, $\beta = 4$.

Поэтому либо

$$\tau(n^3) = \tau(p^{3\alpha}q^{3\beta}) = \tau(p^3q^{39}) = (3 + 1)(39 + 1) = 160,$$

либо

$$\tau(n^3) = \tau(p^{3\alpha}q^{3\beta}) = \tau(p^{12}q^{12}) = 13 \cdot 13 = 169.$$

Ответ. $\tau(n^3) \in \{160, 169\}$. ⊠

Индивидуальные задания

1. Вычислите значения функций Эйлера, σ и τ от числа a.
1.1. $a = 142560$. 1.2. $a = 421200$.
1.3. $a = 539000$ 1.4. $a = 476000$.
1.5. $a = 105840$. 1.6. $a = 273000$.
1.7. $a = 853776$. 1.8. $a = 794976$.
1.9. $a = 702702$. 1.10. $a = 343035$.
1.11. $a = 798525$. 1.12. $a = 606375$.
1.13. $a = 268125$. 1.14. $a = 523908$.
1.15. $a = 548856$.

2. Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа $\varphi(a!)$?

2. 1. $a = 92$. 2. 2. $a = 72$. 2. 3. $a = 88$.
2. 4. $a = 104$. 2. 5. $a = 64$. 2. 6. $a = 90$.
2. 7. $a = 69$. 2. 8. $a = 80$. 2. 9. $a = 100$.
2. 10. $a = 60$. 2. 11. $a = 85$. 2. 12. $a = 70$.
2. 13. $a = 98$. 2. 14. $a = 109$. 2. 15. $a = 79$.

3. Пусть $a! = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\ldots$ — каноническое разложение $a!$. Вычислите $\tau(2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5})$.

3. 1. $a = 23$. 3. 2. $a = 16$. 3. 3. $a = 18$.
3. 4. $a = 27$. 3. 5. $a = 20$. 3. 6. $a = 28$.
3. 7. $a = 24$. 3. 8. $a = 30$. 3. 9. $a = 25$.
3. 10. $a = 29$. 3. 11. $a = 32$. 3. 12. $a = 22$.
3. 13. $a = 21$. 3. 14. $a = 31$. 3. 15. $a = 33$.

4. Пусть $a! = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\ldots$ — каноническое разложение $a!$. Вычислите $\sigma(5^{\alpha_5}7^{\alpha_7}11^{\alpha_{11}})$.

4. 1. $a = 21$. 4. 2. $a = 31$. 4. 3. $a = 33$.
4. 4. $a = 23$. 4. 5. $a = 16$. 4. 6. $a = 18$.
4. 7. $a = 27$. 4. 8. $a = 20$. 4. 9. $a = 28$.
4. 10. $a = 24$. 4. 11. $a = 30$. 4. 12. $a = 25$.
4. 13. $a = 29$. 4. 14. $a = 32$. 4. 15. $a = 22$.

5. Решите уравнение.

5. 1. $\varphi(x) = 8$. 5. 2. $\varphi(x) = 12$.
5. 3. $\varphi(x) = 24$. 5. 4. $\varphi(x) = 16$.
5. 5. $\varphi(x) = 18$. 5. 6. $\varphi(x) = 36$.
5. 7. $\varphi(x) = 40$. 5. 8. $\varphi(x) = 42$.
5. 9. $\varphi(x) = 56$. 5. 10. $\varphi(x) = 60$.
5. 11. $\varphi(x) = 84$. 5. 12. $\varphi(x) = 88$.
5. 13. $\varphi(x) = 100$. 5. 14. $\varphi(x) = 108$.
5. 15. $\varphi(x) = 112$.

6. Найдите все простые делители числа x из уравнения.

6. 1. $11\varphi(x) = 4x$. 6. 2. $35\varphi(x) = 12x$.
6. 3. $31\varphi(x) = 12x$. 6. 4. $19\varphi(x) = 9x$.
6. 5. $65\varphi(x) = 24x$. 6. 6. $13\varphi(x) = 4x$.
6. 7. $77\varphi(x) = 30x$. 6. 8. $15\varphi(x) = 4x$.
6. 9. $23\varphi(x) = 20x$. 6. 10. $29\varphi(x) = 12x$.

6. 11. $33\varphi(x) = 16x$. 6. 12. $51\varphi(x) = 16x$.
6. 13. $31\varphi(x) = 8x$. 6. 14. $37\varphi(x) = 12x$.
6. 15. $41\varphi(x) = 16x$.

7. Решите уравнение.

7. 1. $\varphi(3^x5^y7^z) = 720$. 7. 2. $\varphi(3^x13^y) = 12168$.
7. 3. $\varphi(3^x5^y) = 600$. 7. 4. $\varphi(5^x7^y) = 600$.
7. 5. $\varphi(3^x5^y7^z) = 25200$. 7. 6. $\varphi(5^x7^y11^z) = 18480$.
7. 7. $\varphi(5^x7^y11^z) = 4200$. 7. 8. $\varphi(5^x11^y) = 2200$.
7. 9. $\varphi(2^x13^y) = 1248$. 7. 10. $\varphi(3^x17^y) = 4896$.
7. 11. $\varphi(3^x7^y11^z) = 1980$. 7. 12. $\varphi(2^x17^y) = 2176$.
7. 13. $\varphi(3^x5^y) = 5400$. 7. 14. $\varphi(5^x7^y) = 5880$.
7. 15. $\varphi(3^x7^y13^z) = 4056$.

8. Найдите n, если известен его делитель m и значение $\tau(n)$.

8. 1. $m = 135$, $\tau(n) = 21$. 8. 2. $m = 104$, $\tau(n) = 15$.
8. 3. $m = 88$, $\tau(n) = 21$. 8. 4. $m = 75$, $\tau(n) = 14$.
8. 5. $m = 99$, $\tau(n) = 10$. 8. 6. $m = 40$, $\tau(n) = 33$.
8. 7. $m = 36$, $\tau(n) = 21$. 8. 8. $m = 56$, $\tau(n) = 22$.
8. 9. $m = 52$, $\tau(n) = 26$. 8. 10. $m = 68$, $\tau(n) = 22$.
8. 11. $m = 175$, $\tau(n) = 10$. 8. 12. $m = 98$, $\tau(n) = 15$.
8. 13. $m = 117$, $\tau(n) = 14$. 8. 14. $m = 80$, $\tau(n) = 15$.
18. 15. $m = 45$, $\tau(n) = 14$.

9. Пусть $n = p^\alpha q^\beta$, где p и q — различные простые числа, α и β — натуральные числа. Найдите $\tau(n^3)$, если известно значение $\tau(n^2)$.

9. 1. $\tau(n^2) = 77$. 9. 2. $\tau(n^2) = 75$.
9. 3. $\tau(n^2) = 85$. 9. 4. $\tau(n^2) = 91$.
9. 5. $\tau(n^2) = 93$. 9. 6. $\tau(n^2) = 95$.
9. 7. $\tau(n^2) = 99$. 9. 8. $\tau(n^2) = 105$.
9. 9. $\tau(n^2) = 111$. 9. 10. $\tau(n^2) = 115$.
9. 11. $\tau(n^2) = 117$. 9. 12. $\tau(n^2) = 119$.
9. 13. $\tau(n^2) = 121$. 9. 14. $\tau(n^2) = 133$.
9. 15. $\tau(n^2) = 135$.